Chapitre 10 : Suites de fonctions

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et les applications considérées sont de I dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

1.1 Convergence simple

1.1.1 Définition

Définition. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de I dans K et f une fonction de I dans K*
.

*Alors on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f si et seulement si $\forall t \in I \ , \ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$*

Remarque. *Autrement dit : $\forall t \in I \ , \forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq n_0 \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$*

1.1.2 Exemples

1.2 Convergence uniforme

1.2.1 Définition

On dit que la suite de fonctions $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to K$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in I \ , \ |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$

Remarque. *Attention, l'ordre des quantificateurs n'est pas le même que pour la convergence simple.*

1.2.2 Interprétation topologique

Rappel : On note $B(I, K)$ l'ensemble des applications bornées de I dans K et on pose, pour tout $f \in B(I, K)$: $||f||_{I,\infty} = \sup\limits_{t\in I} |f(t)|$ ce qui définit une norme sur $B(I, K)$.

On a alors :

Théorème . *La suite de fonctions $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to K$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f - f_n||_{I,\infty} = 0$*

Remarques. *$||f - f_n||_{I,\infty}$ n'est pas forcément définie pour toute les valeurs de n car $f - f_n$ n'est pas forcément bornée sur I.*
Par contre cette valeur est définie pour n "assez grand".
Détails voir preuve ci-dessous.

preuve :

1.2.3 Une petite propriété

Lemme. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction bornées de I dans K convergeant uniformément vers une fonction f de I dans K. Alors : f est bornée.*

preuve :

1.3 CU $\Rightarrow$ CS

Théorème . *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de I dans K et f une fonction de I dans K*
.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I

Remarques. *Autrement dit, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. (CU $\Rightarrow$ CS)*
La réciproque est évidement fausse (voir exemple)
En pratique, on montre d'abord la CS, car pour montrer la CU, il est bon de connaître f !!!
On peut noter ceci : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CU}{\longrightarrow}} f \Rightarrow f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CS}{\longrightarrow}} f$

preuve :

1.4 Exemples

1.5 Point méthode

Pour montrer la convergence uniforme on majore $|f(x) - f_n(x)|$ en éliminant les x mais en gardant du n pour que çà tende vers 0.
Une étude de $x \mapsto f(x) - f_n(x)$ sur I pour calculer $||f - f_n||_{I,\infty}$ peut être utile...

2 Continuité

2.1 Continuité en un point

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et soit $a \in I$.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ Alors :

$$\begin{cases} \textit{chaque } f_n \textit{ est continue en } a \\ (f_n) \textit{ converge uniformément vers } f \textit{ sur } I \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ est continue en } a$$

preuve :

2.2 Continuité global

2.2.1 Premier théorème

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et soit $a \in I$.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ Alors :

$$\begin{cases} \textit{chaque } f_n \textit{ est continue sur } I \\ (f_n) \textit{ converge uniformément vers } f \textit{ sur } I \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ est continue sur } I$$

preuve :

2.2.2 Corollaire important

Corollaire. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et soit $a \in I$.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ Alors :

$$\begin{cases} \textit{chaque } f_n \textit{ est continue sur } I \\ (f_n) \textit{ converge uniformément vers } f \textit{ sur tout segment inclus dans } I \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ est continue sur } I$$

preuve :

2.2.3 Exemple

3 Intégration et dérivation

3.1 Intégration sur un segment

3.1.1 Théorème

Théorème . *Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite d'application de $[a;b]$ dans K et f une application de $[a;b]$ dans K. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } [a;b] \\ (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a;b] \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque. *Autrement dit, la CU donne :* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$

preuve :

3.1.2 Exemples

3.2 Dérivabilité

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, soit f une fonction de I dans K Alors :

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \\ (f_n') \text{ converge uniformément vers une fonction } g \text{ sur } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ f' = g \end{cases}$$

Remarques. *En pratique, la convergence uniforme sur tout segment de I est suffisante.*
Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d}{dx} f_n(t) = \frac{d}{dx} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$
Comme on le verra dans la preuve on a aussi (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I (pas dans le théorème du programme, mais utile dans la preuve du théorème suivant)

preuve :

3.3 Extension aux suites de fonctions de classe C^k

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et $k \in \mathbb{N}^*$*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Alors :

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k-1]\!]\ ,\ (f_n^{(i)}) \text{ converge simplement sur } I \\ (f_n^{(k)}) \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la limite simple de } (f_n)\text{, notée } f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k]\!]\ ,\ \forall x \in I\ ,\ f^{(i)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(i)}(x) \end{cases}$$

preuve :

Exemple.