Pour le jeudi 12 décembre 2024

Devoir à la maison n°7 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile ou important, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (ou complément)
	rouge	assez difficile (ou si on a fait le reste)
	vert	difficile (ou si on a le temps)

On soignera particulièrement la rédaction sur les parties en noires.

EXERCICE n°1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in [0,1] \ , \ f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

a) Montrer que f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau de variation de f_n sur $[0,1]$.

c) Justifier l'existence et calculer $||f_n||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)|$.

d) Est-ce que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$?

EXERCICE n°2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in [0,+\infty[\ , \ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{exp(\frac{-1}{nx})}{2+nx} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,+\infty[$

b) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ et sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE n°3 : e3a 2020 PSI

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par : $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$

1.) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2.) Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3.) Etudier alors sa convergence uniforme sur J.

4.) Déterminer : $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

5.) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

5.1.) Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2.) Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x^{3/2}})$

EXERCICE n°4 : ccINP 2024 MPI

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ de la variable réelle et on note f sa somme.

Q1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

Q2) Démontrer que f est continue sur D.

Q3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Q4) Démontrer que, pour tout $x \in D$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$.

Q5) En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

PROBLEME : Centrale PC 2024, mathématiques 2