Lundi 25 novembre 2024

PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°3

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Dessiner une jolie fleur en dessous du mot FIN.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Questions de cours

1°) Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

2°) Enoncer le théorème spécial.

3°) Enoncer le théorème de projection orthogonale.

Exercice proche du cours n°1

1°) Donner le développement limité en $x = 0$, à l'ordre 2 de $f : x \mapsto sin(x) - ln(1 + x)$
2°) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = sin(\frac{1}{n}) - ln(1 + \frac{1}{n})$

Exercice proche du cours n°2

On pose $E = \mathbb{R}^2$ et $\forall X = (x, y) \in E$, $N(X) = Max(|x| , |x + y|)$
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice proche du cours n°3

On pose : $\forall n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
1°) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.
2°) Déterminer la nature de la série de terme général v_n.

Problème n°1

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$, $\varphi(P, Q) = \sum\limits_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$

On considère également les polynômes $L_p(X) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{3} \dfrac{X - k}{p - k}$ pour $p \in \{0; 1; 2; 3\}$.

1. (a) Vérifier que $L_0(X) = -\dfrac{1}{6}(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
   (b) Ecrire de même $L_1(X), L_2(X)$ et $L_3(X)$.
   (c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p, k) \in [\![0; 3]\!]^2$.

2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
   On notera $\| \ \|$ la norme associée.
   (b) Vérifier que $B = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Exprimer en fonction de Q, les coordonnées de Q dans la base B.

3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. Pour tout $p \in [\![0;3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p), N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_pN_p]$.

On pose alors $\delta(a,b) = \sum\limits_{p=0}^{3} d_p^2$.

L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a,b)$ est minimale.

4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.
5. Vérifier que $\delta(a,b) = \sum\limits_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$.
6. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

   On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0;3]\!]$.

   (b) Démontrer que $\delta(a,b) = \|Q - H\|^2$ où $H(X) = aX + b$.

   (c) En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0.

   On précisera le lien entre Q et H_0.

   Dans la suite du sujet, on pose $\bar{Y} = \sum\limits_{p=0}^{3} y_p$ et $\overline{XY} = \sum\limits_{p=0}^{3} p y_p$.

L'objectif des 2 prochaines questions est d'obtenir l'expression de H_0 qui a été défini dans la question précédente.

7. (a) Exprimer H_0 en fonction de φ, Q et des polynômes obtenus à la question 3 .

   (b) Déterminer H_0 en fonction de $\bar{Y}$ et $\overline{XY}$.

Problème 2 : Etude de deux fonctions définies par des séries

1°) Montrer que $f : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Pour la suite de l'exercice on admettra que : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$

2°) Montrer que pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}$ est convergente.

On définit alors la fonction φ par
$$\begin{array}{rccc} \varphi & : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} \end{array}$$

3°) Etudier, selon $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
(pour certain cas, on pourra utiliser D'Alembert)

On définit alors la fonction ψ_1 par $\begin{array}{cccc} \psi_1 & : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \end{array}$

et la fonction ψ par $\begin{array}{cccc} \psi & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \psi_1(e^{-x}) \end{array}$

On admet que Ψ_1 est de classe C^∞ sur son domaine et que :
$\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{d}{dx}\Big(\psi_1(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\Big)$

4°) **Régularité des fonctions φ et ψ**

4°) a) Montrer que la fonction ψ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et préciser sa dérivée en fonction de φ.

4°) b) En déduire que φ est C^∞ sur $]0,+\infty[$.

5°) **Un équivalent de Ψ en 0^+**

5°) a) Soit $x > 0$. Justifier que : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$ est convergente.

5°) b) Montrer que pour $x > 0$: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \psi(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$

5°) c) En déduire que, pour tout $x > 0$: $\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}du \leq \psi(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}du$

5°) d) Montrer que : $\psi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$

6°) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$

7°) **Un équivalent de φ en 0^+**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\big) - 2\sqrt{n}$

7°) a) i) Montrer que au voisinage de $+\infty$: $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{4n^{3/2}}$

ii) En déduire la convergence de $\sum(u_{n+1} - u_n)$

iii) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

7°) b) Montrer que, pour tout $x > 0$, la série numérique : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\big)e^{-nx}$ est convergente.

7°) c) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\big)e^{-nx} = \frac{\psi(x)}{e^x - 1}$

7°) d) En déduire que : $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$

Problème 3

On désigne par E l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ de $I = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telles que : $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}$ soit intégrable sur I.

1°) Montrer que : $(f, g) \in E^2 \Rightarrow t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I.

On pose : $\forall (f, g) \in E^2 \ , \ (f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$

2°) a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et que $(|)$ définit un produit scalaire sur E.

2°) b) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un sous espace vectoriel de E.
(remarque : on identifiera polynôme et fonction polynomiale)

On notera $||.||$ la norme associée au produit scalaire $(|)$

Pour tout entier naturel n on pose : $\begin{array}{rccc} \varphi_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & t^n e^{-t} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} L_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & e^t \varphi_n^{(n)}(t) \end{array}$

où $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ_n.

3°) Montrer que L_n est un polynôme de degré n dont on donnera le degré et l'expression dans la base canonique. Expliciter L_0 et L_1 et montrer que pour $k < n$: $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$

4°) Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, calculer $(L_n|L_m)$.

5°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\frac{1}{k!}L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

6°) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_n(t) = L_{n+2}(t) + (t - 2n - 3)L_{n+1}(t)$

6°) a) Montrer que : $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$

6°) b) Montrer que : $\forall n \geq 1 \ , \ \forall k \in [\![0; n-1]\!] \ , \ (P_n|L_k) = 0$

6°) c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $L_{n+2}(t) + (t-2n-3)L_{n+1}(t) + (n+1)^2 L_n(t) = 0$

6°) d) Déterminer L_2.

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, on pose : $\begin{array}{rccc} f_a & : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & e^{-at} \end{array}$

7°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_a \in E$

Dans la suite du problème on suppose que $f_a \in E$.

8°) Soit $n \in \mathbb{N}$.
8°) a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(L_k|f_a) = k! \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$
8°) b) En déduire l'expression du projeté orthogonal de f_a sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté $S_{n,a}$, en fonction des L_k
8°) c) Calculer $||S_{n,a}||^2$
8°) d) En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} ||S_{n,a} - f_a|| = 0$