PSI* 2023-2024, Mathématiques DS n°3 : Correction

Question de cours : Voir cours.

Exercice proche du cours n°1

1°) Au voisinage de $x = 0$:

$sin(x) - ln(1+x) = x + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

On a donc : $\boxed{\text{Au voisinage de } x = 0 : sin(x) - ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

2°) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut utiliser le 1°) pour obtenir : $u_n = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

Donc : $\begin{cases} u_n \sim \frac{1}{2n^2} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{cases}$

On a donc, par équivalent pour les séries à termes positifs : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

Exercice proche du cours n°2

Soit $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$ deux éléments de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i) $N(X) = Max(|x|, |x+y|) \geq 0$ est direct puisque l'on a le max de deux nombres positifs.

ii) $N(\lambda X) = N((\lambda x, \lambda y)) = Max(|\lambda x|, |\lambda(x+y)|) = |\lambda| Max(|x|, |x+y|) = |\lambda| N(X)$

iii) $N(X) = 0$
$\Rightarrow Max(|x|, |x+y|) = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |x| \leq 0 \\ 0 \leq |x+y| \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq x+y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^2}$

iv) On a $X + Y = (x + x', y + y')$, donc $N(X+Y) = Max(|x+x'|, |(x+x') + (y+y')|)$
Par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$: $|x + x'| \leq |x| + |x'|$, mais $|x| \leq N(X)$ et $|x'| \leq N(Y)$ donc $|x + x'| \leq N(X) + N(Y)$

De même : $|(x+x') + (y+y')| = |(x+y) + (x'+y')| \leq |x+y| + |x'+y'| \leq N(X) + N(Y)$

Donc $\begin{cases} |x+x'| \leq N(X) + N(Y) \\ |(x+x') + (y+y')| \leq N(X) + N(Y) \end{cases}$
Donc $Max(|x+x'|, |(x+x') + (y+y')|) \leq N(X) + N(Y)$ et donc $N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$

On a donc : $\forall X, Y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} N(X) \geq 0 \\ N(\lambda X) = |\lambda| N(X) \\ N(X) = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^2} \\ N(X+Y) \leq N(X) + N(Y) \end{cases}$ ce qui permet d'affirmer que

$\boxed{N \text{ est une norme sur } E = \mathbb{R}^2}$

Exercice proche du cours n°3

1°) On a de manière directe : $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|)_{n\geq 2} \text{ est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \end{cases}$

On peut appliquer le théorème spécial et on en déduit que : $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente.}}$

2°) Au voisinage de $+\infty$:
$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) = u_n - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

On pose $\forall n \geq 2$, $w_n = v_n - u_n$ et donc $w_n = -\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{-1}{n} < 0$
Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par la règle de l'équivalent pour les séries de termes de signe constant, on a : $\sum w_n$ divergente.

On a donc : $\begin{cases} v_n = u_n + w_n \\ \sum u_n \text{ est convergente} \\ \sum w_n \text{ est divergente} \end{cases}$, ce qui permet d'affirmer que : $\boxed{\sum v_n \text{ est divergente.}}$

Problème 1 (d'après concours PT 2024)

1) a) $L_0(X) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq 0}}^{3} \frac{X-k}{0-k} = \prod\limits_{k=1}^{3} \frac{X-k}{0-k} = \frac{X-1}{-1}\frac{X-2}{-2}\frac{X-3}{-3}$

On a bien : $\boxed{L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)}$

1) b) De même $L_1(X) = \frac{X}{1}\frac{X-2}{-1}\frac{X-3}{-2} = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3)$
De même $L_2(X) = \frac{X}{2}\frac{X-1}{1}\frac{X-3}{-1} = \frac{-1}{2}X(X-1)(X-3)$
De même $L_3(X) = \frac{X}{3}\frac{X-1}{2}\frac{X-2}{1} = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$

On a donc : $\boxed{\begin{cases} L_1(X) = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3) \\ L_2(X) = \frac{-1}{2}X(X-1)(X-3) \\ L_3(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2) \end{cases}}$

1) c) Soit $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$.
Directement si $k \neq p$ alors $L_p(k) = 0$ et si $k = p$, alors : $L_p(p) = \prod\limits_{\substack{\tilde{k}=0 \\ \tilde{k}\neq p}}^{3} \frac{p-\tilde{k}}{p-\tilde{k}} = 1$

On a donc : $\boxed{\forall (p,k) \in [\![0;3]\!]^2 \text{ , } L_p(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ 1 & \text{si } k = p \end{cases}}$

2) a) $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
i) $\varphi(P+\lambda Q, R) = \sum\limits_{k=0}^{3}(P(k)+\lambda Q(k))R(k) = \sum\limits_{k=0}^{3} P(k)R(k) + \lambda \sum\limits_{k=0}^{3} Q(k)R(k) = \varphi(P,R) + \lambda\varphi(Q,R)$
ii) $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$
iii) $\varphi(P,P) = \sum\limits_{k=0}^{3} P(k)^2 \geq 0$ comme somme de carrée.

iv) $\varphi(P,P)=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} P(k)^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0;3]\!]\ ,\ P(k)=0$
$\Rightarrow P$ admet 4 racines sur $\mathbb{R} \Rightarrow P = 0_E$ car P admet 4 racines et que P est au plus de degré 3.

On a donc : $\forall P,Q,R \in E\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} \varphi(P+\lambda Q, R) = \varphi(P,R) + \lambda\varphi(Q,R) \\ \varphi(P,Q) = \varphi(Q,P) \\ \varphi(P,P) \geq 0 \\ \varphi(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0_E \end{cases}$

donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[X]}$

2) b) Soit $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$

Si $p \neq k$ alors $\varphi(L_p, L_k) = \sum_{i=0}^{3} L_p(i)L_k(i)$
Mais comme $p \neq k$ alors i est différent de k ou de p donc $L_p(i)=0$ ou $L_k(i)=0$ et donc $\varphi(L_p,L_k)=0$

Si $p=k$ alors : $\varphi(L_p,L_p) = \sum_{i=0}^{3} L_p(i)^2 = 1$ car $L_p(i)=0$ si $p \neq i$ et $L_p(p)=1$

On a donc $\forall (p,k) \in [\![0;3]\!]^2\ ,\ \varphi(L_p,L_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ 1 & \text{si } k = p \end{cases}$

B est donc une famille orthonormée de vecteurs non nuls, elle est donc libre. Comme de plus $card(B) = dim(R_3[X])$ alors c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On a donc : $\boxed{B \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_3[X] \text{ pour le produit scalaire } \varphi}$

2) c) Soit $Q \in E$. On écrit : $Q = \sum_{k=0}^{3} q_k L_k$ dans la base B.
Si on évalue en $i \in [\![0;3]\!]$ alors $Q(i) = \sum_{k=0}^{3} q_k L_k(i) = q_i$ et donc

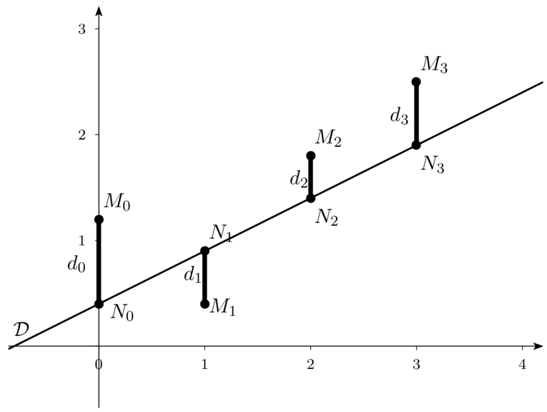
$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_3[X]\ ,\ Q = \sum_{k=0}^{3} Q(k)L_k. \text{ Les coordonnées de } Q \text{ dans } B \text{ sont } (Q(0),Q(1),Q(2),Q(3))}$

3) On applique l'algorithme de Schmidt à la base canonique $(1,X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$

Etape 1 : On pose : $P_0 = \frac{1}{||1||}$.
$\varphi(1,1) = \sum_{k=0}^{3} 1 = 4$, donc $||1|| = 2$ et donc $P_0 = \frac{1}{2}$

Etape 2 : On pose $P_1 = \frac{X - <X,P_0>P_0}{||X-<X,P_0>P_0||}$
$<X,P_0> = \sum_{k=0}^{3} \frac{k}{2} = \frac{3(3+1)}{2.2} = 3$
Donc $X - <X,P_0> P_0 = X - 3\frac{1}{2} = X - \frac{3}{2}$
$\left|\left|X - \frac{3}{2}\right|\right|^2 = \sum_{k=0}^{3} (k-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{20}{4} = 5$
On a donc $P_1 = \frac{X-3/2}{\sqrt{5}}$

$\boxed{\text{Une base orthonormée de } \mathbb{R}_1[X] \text{ est } (\frac{1}{2}, \frac{X-3/2}{\sqrt{5}})}$



4)

5) On a $M_p(p, y_p)$ et $N_p(p, ap+b)$ donc $\overrightarrow{N_pM_p} = (0, y_p - (ap+b))$ et donc $d_p^2 = (y_p - ap - b)^2$ et on a bien : $\boxed{\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3}(y_p - ap - b)^2}$

6) a) $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ a son graphe qui passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3
$\Leftrightarrow Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\forall i \in [\![0;3]\!]$, $Q(i) = y_i$
$\Leftrightarrow Q = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i$ d'après la question 2)c)

Donc $\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } Q \text{ de } \mathbb{R}_3[X] \text{ dont le graphe passe par les points } (M_i)_{i\in[\![0;3]\!]}}$

Remarque : cf cours, polynôme interpolateur de Lagrange.

6) b) Avec l'expression du 5) : $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3}(Q(p) - H(p))^2 = \sum_{p=0}^{3}(Q-H)(p)^2 = ||Q-H||^2$

On a donc bien : $\boxed{\delta(a,b) = ||Q-H||^2 \text{ avec } H(X) = aX + b}$

6) c) En utilisant que $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on remarque que :
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \delta(a,b) = \left(\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\delta(a,b)}\right)^2 = \left(\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ||Q-H||\right)^2 = \left(\inf_{H\in\mathbb{R}_1[X]} ||Q-H||\right)^2 = (d(Q, \mathbb{R}_1[X]))^2$$

Or on sait d'après le théorème de projection orthogonale qu'il existe un unique polynôme $H_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $d(Q, \mathbb{R}_1[X])) = ||Q - H_0||$

On en déduit l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0.

H_0 est le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$

7) a) Toujours par le théorème de projection orthogonale, avec la base orthonormée (P_0, P_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ trouvée au 3°) on a : $\boxed{H_0 =< Q, P_0 > P_0 + < Q, P_1 > P_1}$

7) b) • $< Q, P_0 >=< Q, \frac{1}{2} >= \frac{1}{2} < Q, 1 >= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} Q(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} y_k = \frac{\overline{Y}}{2}$

• $< Q, P_1 >= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{3} y_k(k - \frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y})$

• $H_0 = \frac{\overline{Y}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y})(\frac{X - \frac{3}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{Y}}{4} + \frac{1}{5}(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y})(X - \frac{3}{2}) = \frac{(7\overline{Y} - 3\overline{XY}) + (2\overline{XY} - 3\overline{Y})X}{10}$

Donc $\boxed{H_0 = \frac{(7\overline{Y} - 3\overline{XY}) + (2\overline{XY} - 3\overline{Y})X}{10}}$

$\boxed{\textbf{Problème 2 : d'après concours national marocain tsi 2018}}$

1°) f est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrabilité de f ne pose problème qu'aux bornes.

En 0 :
$f(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$ par Riemann (1/2<1), donc, par équivalent, f est intégrable sur $]0,1]$

En $+\infty$:
Pour $u \geq 1$, on a : $0 \leq \frac{1}{\sqrt{u}} \leq 1$ donc $0 \leq f(u) \leq e^{-u}$
Mais d'après le cours $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, par comparaison, f est intégrable sur $[1,+\infty[$

f est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$

2°) Soit $x>0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sqrt{n}e^{-nx}$ alors :
$\frac{A_n}{\frac{1}{n^2}} = n^{5/2}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exp-puissance puisque $x>0$

On a donc $A_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Comme $\frac{1}{n^2}>0$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemanne convergente alors, par négligeabilité $\sum A_n$ est convergente.

On a donc : $\boxed{\forall x>0 \text{ , } \sum \sqrt{n}e^{-nx} \text{ est convergente.}}$

3°) On va distinguer plusieurs cas :

Cas 1 : $x=0$
Alors de manière évidente $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum 0$ est convergente.

Cas 2 : $x \neq 0$
On pose alors, $B_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
Alors : $\left|\frac{B_{n+1}}{B_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}\sqrt{n}}{x^n\sqrt{n+1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$

La règle de D'alembert permet alors d'affirmer que : $\begin{cases} |x|<1 \Rightarrow \sum B_n \text{ convergente} \\ |x|>1 \Rightarrow \sum B_n \text{ divergente} \end{cases}$

Si $x=1$ on a une somme de Riemmann divergente ($\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$) et si $x=-1$, on a une série convergente (théorème spécial).

Bilan : $\boxed{\sum \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n \text{ est convergente si et seulement si } x \in [-1,1[}$

4°) a) • Quand x parcours $]0,+\infty[$, $x \mapsto e^{-x}$ parcours $]0,1[\subset]-1,1[$. Comme $\psi(x) = \psi_1(e^{-x})$ et que l'on a admit que ψ_1 était C^∞ sur $]-1,1[$ alors :

$\boxed{\psi \text{ est } C^\infty \text{ sur son domaine }]0,+\infty[\text{ comme composée de fonctions } C^\infty}$

• On a alors, en admettant que l'on peut dériver sous le signe somme (admis) : $\forall x > 0$, $\psi'(x) = -e^{-x}\psi_1'(e^{-x})$ et comme $\psi_1'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\sqrt{n}e^{-nx} = -\varphi(x)$ alors : $\psi'(x) = e^{-x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$ et donc $\boxed{\forall x > 0\ ,\ \psi'(x) = e^{-x}\varphi(x)}$

4°) b) On déduit du a) que $\varphi(x) = e^{x}\psi'(x)$ et donc, comme ψ est C^∞ alors :
$\boxed{\varphi \text{ est } C^\infty \text{ comme produit de fonctions } C^\infty}$

5°) a) Soit $x > 0$. On effectue dans l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$ le changement de variable C^1 bijectif $u = xt$, alors $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$ est de même nature que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}}}\frac{du}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$
Avec le 1°) on sait que cette intégrale est convergente, car $t \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

On a donc : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \text{ est convergente.}}$

5°) b) Soit $x > 0$ alors : $\psi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\right) = \frac{-e^{-xt}\sqrt{t} - e^{-xt}\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t} \leq 0$ donc $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$
Alors : $\forall n \geq 0\ ,\ \forall t \in]n, n+1[\ ,\ 0 \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$

On intègre sur $]n, n+1[$, alors : $\frac{e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n+1}} \leq \int\limits_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$

On somme la première inégalité pour n variant de 0 à $+\infty$ (on peut, car tout est convergent).
Alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n+1}} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$
Changement d'indice dans la première somme et relation de Chasles : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$

On a donc $\psi(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$

On somme la seconde pour n variant de $n = 1$ à $+\infty$ (on peut, car tout est convergent).
Alors : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$
Par la relation de Chasles : $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \psi(x)$

En combinant les deux inégalités obtenues précédement : $\boxed{\forall x > 0\ ,\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \psi(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt}$

5°) c) On effectue le changement de variable C^1 bijectif $u = xt$ dans les intégrales de l'inégalité ci-dessus (comme au 5°)a)).

On obtient : $\boxed{\forall x > 0\ ,\ \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}du \leq \psi(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}dt}$

5°) d) En multipliant le c) par $\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ on a : $\forall x>0$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \leq \frac{\psi(x)}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}dt$

Mais on sait (admis) que : $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}dt=\sqrt{\pi}$ donc le membre de gauche et le membre de droite de l'inégalité tendent vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1$ quand $x\to 0^+$ et donc, par encadrement $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\psi(x)}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}=1$

On a donc : $\boxed{\psi(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{x}}}$

6°) Avec le 5°) c) : $0\leq\psi(x)\leq\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Donc par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0}$

7°) a) i) $u_{n+1}-u_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+2\sqrt{n}$

Par téléscopage :

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}-u_n\\
&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+2\sqrt{n}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}+2\sqrt{n}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+2\sqrt{n}\left(1-\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\Big)-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{4}\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&=\frac{-1}{4}\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\boxed{u_{n+1}-u_n\underset{n=+\infty}{\sim}\frac{-1}{4n^{3/2}}}$

7°) a) ii) On a : $\begin{cases}u_{n+1}-u_n\underset{n=+\infty}{\sim}\frac{-1}{4n^{3/2}}<0\\ \sum\frac{1}{n^{3*2}}\text{ est une série de Riemann convegente car }3/2>1\end{cases}$, donc, par règle de l'équivalent : $\boxed{\sum(u_{n+1}-u_n)\text{ est convergente.}}$

7°) a) iii) D'après le théorème suite-série du cours : $\sum(u_{n+1}-u_n)$ convergente $\Rightarrow(u_n)$ convergente donc $\exists\gamma\in\mathbb{R}$ tel que $u_n=\gamma+o(1)$, donc $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}=\gamma+o(1)$ ou encore $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2\sqrt{n}+\gamma+o(1)$

qui donne : $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{n=+\infty}{\sim}2\sqrt{n}}$

7°) b) Avec le b) : $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}\sim 2\sqrt{n}e^{-nx}>0$

Or on sait, avec l'étude de φ que $\sum\sqrt{n}e^{-nx}$ est convergente pour $x>0$

Donc, par règle de l'équivalent ; $\boxed{\forall x>0\ ,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}\text{ est convergente.}}$

7°) c) On sait que pour $x>0$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}$ car on a une série géométrique de raison $e^{-x}\in]-1,1[$

Cette série est absolument convergente.

On sait aussi que $\psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est absolument convergente.

Par produit de Cauchy de deux séries absolument convergente on a :

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x}\big)$$

Donc $\frac{1}{e^x-1}\psi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{k}}\big)$

Finalement : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ \frac{\psi(x)}{e^x-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\big)e^{-nx}}$

7°) d) On travaille au voisinage de 0^+

- Avec le 5°) d) : $\frac{\psi(x)}{e^x-1} \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}{1+x-1+o(x)} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$

- Avec la question 7°) a) :

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\big)e^{-nx}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(2\sqrt{2} + \gamma + o(1)\big)e^{-nx}$

$= 2\varphi(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} m_n e^{-nx}$ avec $m_n = \gamma + o(1)$

Mais $m_n = \gamma + o(1)$, donc (m_n) est bornée, donc $\exists M > 0$ tel que :

$\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} m_n e^{-nx}\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} M e^{-nx} = M\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{M}{e^x-1} \sim \frac{M}{x}$

On en déduit que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\big)e^{-nx} = 2\varphi(x) + O(\frac{1}{x})$

- Alors : $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{2(e^x-1)} + O(\frac{1}{x})$

Comme $\frac{\psi(x)}{e^x-1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$ alors $\frac{\psi(x)}{2(e^x-1)}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o(\frac{1}{x^{3/2}})$
et donc $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o(\frac{1}{x^{3/2}}) + O(\frac{1}{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o(\frac{1}{x^{3/2}})$

On en déduit : $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}}$

Problème 3 : d'après CONCOURS ENGEES 2001 PC

1°) Soit $(f,g)\in E^2$.

Alors, $\forall t\in I$, $|f(t)g(t)|\leq \frac{f(t)^2+g(t)^2}{2}$ donc : $|f(t)g(t)|\, e^{-t}\leq \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t}+\frac{1}{2}g(t)^2e^{-t}$

On a : $t\mapsto \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t}+\frac{1}{2}g(t)^2e^{-t}$ est intégrable sur I comme combinaison linéaire de deux fonctions intégrables puisque $f\in E$ et $g\in E$

Alors, par la règle de comparaison $t\mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I.

On a bien : $\boxed{(f,g)\in E^2\Rightarrow t\mapsto f(t)g(t)e^{-t} \text{ est intégrable sur } I.}$

2°) a) • Montrons que E est un sous espace vectoriel de $C^\infty(I,\mathbb{R})$

E est non vide car la fonction nulle est clairement dans E.

Soit $(f,g)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors : $(f+\lambda g)^2=f^2+\lambda^2g^2+2\lambda fg$

et donc $\forall t\in I$, $(f+\lambda g)^2(t)e^{-t}=f^2(t)e^{-t}+\lambda^2g^2(t)e^{-t}+2\lambda f(t)g(t)e^{-t}$

Comme $f,g\in E$ alors $t\mapsto f^2(t)e^{-t}+\lambda^2g^2(t)e^{-t}$ est intégrable sur I et, avec le 1°) $t\mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I.

$t\mapsto ((f+\lambda g)(t))^2e^{-t}$ est donc une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I et est donc intégrable sur I. On obtient alors : $f+\lambda g\in E$

E est donc non vide, stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $C^\infty(I,\mathbb{R})$. C'est donc un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

• On note que avec le 1°), l'intégrale définissant $(|)$ est bien convergente.

Soit $(f,g,h)\in E^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

i) $(f,g+\lambda h)=\int_0^{+\infty} f(t)(g(t)+\lambda h(t))e^{-t}dt=\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt+\lambda\int_0^{+\infty} f(t)h(t)e^{-t}dt=(f,g)+\lambda(f,h)$ par linéarité de l'intégrale et car les intégrales sont convergentes.

ii) $(f|g)=(g,f)$ est direct avec la commutativité du produit.

iii) $(f|f)=\int_0^{+\infty}\underbrace{f(t)^2e^{-t}}_{\geq 0}dt$ donc $(f|f)\geq 0$

iv) $(f|f)=0\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)^2e^{-t}dt=0$, mais $t\mapsto f(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur I donc, par le théorème de l'intégrale nulle, on a : $\forall t\in I$, $\underbrace{e^{-t}}_{\neq 0}f(t)^2=0$ et donc $f=0_E$

On a donc : $\forall (f,g,h)\in E^3$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} i) & (f,g+\lambda h)=(f,|g)+\lambda(f,h)\\ ii) & (f|g)=(g|f)\\ iii) & (f|f)\geq 0\\ iv) & (f|f)=0\Rightarrow f=0_E\end{cases}$

Donc $(|)$ est un produit scalaire sur E.

• On en déduit que : $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel et que } (|) \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$

2°) b) On sait déjà que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel, il reste à voir que $\mathbb{R}[X] \subset E$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Alors $P \in E \Leftrightarrow t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, il n'y a problème que en $+\infty$.

Comme $\frac{P(t)^2 e^{-t}}{e^{-t/2}} = P(t)^2 e^{-t/2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exp-puissance, on a au voisinage de $+\infty$: $P(t)^2 e^{-t} = o(e^{-t/2})$.
Comme on sait d'après le cours que : $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors, par négligeabilité, $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc $P \in E$.
Donc $\forall P \in \mathbb{R}_[X]$, $P \in E$, donc $\mathbb{R}[X] \subset E$ et donc $\boxed{\mathbb{R}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

3°) • On remarque que pour $k \in [\![0; n]\!]$, $\frac{d^k}{dt^k}(t^n) = \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$ et $\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}) = (-1)^k e^{-t}$
Donc, par la formule de Leibniz :
$\varphi_n^{(n)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}) \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(t^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{(n-(n-k))!} t^{n-(n-k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{k!} t^k$

Donc $L_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!^2}{k!^2 (n-k)!} t^k$

On en déduit que : $\boxed{L_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et } L_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!^2}{k!^2 (n-k)!} t^k}$

• En particulier : $\boxed{L_0(t) = 1 \text{ et } L_1(t) = 1 - t}$

• Avec l'expression calculée ci-dessus : $\boxed{\text{pour } k < n : \varphi_n^{(k)}(0) = 0}$ puisque $\varphi_n^{(k)}(t)$ est factorisable par t car $n - k > 0$.

4°) • Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Quitte à échanger n et m on suppose $m \geq n$.
Alors : $(L_n | L_m) = \int\limits_0^{+\infty} L_n(t)(e^t \varphi_m^{(m)}(t)) e^{-t} dt = \int\limits_0^{+\infty} L_n(t) \varphi_m^{(m)}(t) dt$

En intégrant par parties :
$(L_n | L_m) = \left[\lim\limits_{t \to +\infty} L_n(t) \varphi_m^{(m-1)}(t) - L_n(0) \varphi_m^{(m-1)}(0) \right] - \int\limits_0^{+\infty} L_n^{(1)}(t) \varphi_m^{(m-1)}(t) dt$
On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} L_n(t) \varphi_m^{(m-1)}(t) = 0$ par comparaison exp-puissance, ce qui justifie l'intégration par partie et $L_n(0) \varphi_m^{(m-1)}(0)$ car $m - 1 < m$ et avec le 3°).

Il reste : $(L_n | L_m) = - \int\limits_0^{+\infty} L_n^{(1)}(t) \varphi_m^{(m-1)}(t) dt$

En réintégrant par parties on a : $(L_n | L_m) = \int\limits_0^{+\infty} L_n^{(2)}(t) \varphi_m^{(m-2)}(t) dt$

puis par itération : $(L_n | L_m) = \int\limits_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) \varphi_m^{(m-n)}(t) dt$

Cas 1 : $m = n$
Comme $L_n^{(n)}(t) = (-1)^n n!$ alors $(L_n | L_n) = (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} (-1)^n n! t^n e^{-t} dt = n! \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

Avec n intégration par partie on a $\int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$ et donc $(L_n, L_n) = (n!)^2$

Cas 2 : $m > n$

Alors, on peut encore intégrer par partie une fois et on a : $(L_n|L_m) = \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{L_n^{(n+1)}(t)}_{=0} \varphi_m^{(m-n-1)}(t)dt = 0$

car L_n est de degré n.

Bilan : $\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \ , \ (L_n|L_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (n!)^2 & \text{si } n = m \end{cases}}$

5°) $(\frac{1}{k!}L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthonormée par le calcul du 4°), de $n+1$ vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$, donc :
$\boxed{(\frac{1}{k!}L_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X]}$

6°) a) $P_n(t) = L_{n+2}(t) + (t - 2n - 3)L_{n+1}(t)$
On sait que $deg(L_{n+1}) = n + 1$ et que $deg(L_n) = n$, donc par combinaison linéaire on sait déjà que $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$
On sait, en utilisant le 3°) que :
$\begin{cases} L_{n+2}(t) = (-1)^{n+2}t^{n+2} + (-1)^{n+1}(n+2)^2t^{n+1} + \tilde{L}_{n+2}(t) \text{ avec } \tilde{L}_{n+2} \in \mathbb{R}_n[X] \\ L_{n+1}(t) = (-1)^{n+1}t^{n+1} + (-1)^n(n+1)^2t^n + \tilde{L}_{n+1}(t) \text{ avec } \tilde{L}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{cases}$

Donc le coefficient en t^{n+2} de P_n est : $(-1)^{n+2} + 1 \times (-1)^{n+1} = 0$
et le coefficient en t^{n+1} de P_n est :
$(-1)^{n+1}(n+2)^2 + (-1)^n(n+1)^2 + (-1)^{n+1}(-2n-3)$
$= -1^{n+1}[(n+2)^2 - (n+1)^2 - 2n - 3]$
$= -1^{n+1}[n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 - 2n - 3]$
$= 0$

On en déduit finalement que : $\boxed{P_n \in \mathbb{R}_n[X]}$

6°) b) Soit $n \geq 1$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$.
$(P_n|L_k) = \int\limits_0^{+\infty} P_n(t)L_k(t)e^{-t}dt = \int\limits_0^{+\infty} [L_{n+2}(t) + (t - 2n - 3)L_{n+1}(t)]L_k(t)e^{-t}dt$
Par linéarité, comme les intégrales sont convergentes :
$(P_n|L_k) = \int\limits_0^{+\infty} L_{n+2}(t)L_k(t)e^{-t}dt + \int\limits_0^{+\infty} tL_{n+1}(t)L_k(t)e^{-t}dt - (2n+3)\int\limits_0^{+\infty} L_{n+1}(t)L_k(t)e^{-t}dt$
En revenant au produit scalaire :
$(P_n|L_k) = (L_{n+2}|L_k) + (L_{n+1}|tL_k) - (2n+3)(L_{n+1}, L_k)$

Comme $(\frac{1}{k!}L_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et que $k < n+2$ et que $k < n+1$ alors $(L_{n+1}, L_k) = (L_{n+2}, L_k) = 0$

Il reste $(P_n|L_k) = -(2n+3)(L_{n+1}|tL_k)$
Comme $tL_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$, alors, en utilisant la base orthonormée du 5°), on écrit : $tL_k = \sum\limits_{i=0}^{k+1} b_iL_i$
Donc, par linéarité : $(L_{n+1}|tL_k) = \sum\limits_{i=0}^{k+1} b_i(L_{n+1}|L_i)$ et comme $(L_{n+1}|L_i) = 0$ puisque $i < n+1$ alors $(L_{n+1}|tL_k) = 0$

Finalement, on a bien : $\boxed{\forall n \geq 1 \text{ et } \forall k \in [\![0; n-1]\!] \ , \ (P_n|L_k) = 0}$

6°) c) Comme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ alors, on peut écrire P_n dans la base orthonormée $(\frac{1}{k!}L_k)_{0\leq k\leq n}$:
$P_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(P_n|\frac{1}{k!}L_k)\frac{1}{k!}L_k$

Avec le b), il reste : $P_n = (P_n|\frac{1}{n!}L_n)\frac{1}{n!}L_n$ et si on évalue en $t=0$: $P_n(0) = (P_n|\frac{1}{n!}L_n)\frac{1}{n!}L_n(0)$

Avec l'expression du 3°) : $L_n(0) = n!$
et $P_n(0) = L_{n+2}(0) - (2n+3)L_{n+1}(0) = (n+2)! - (2n+3)(n+1)! = (n+1)![n+2-2n-3] = -(n+1)(n+1)!$

Donc $-(n+1)(n+1)! = (P_n|\frac{1}{n!}L_n)\frac{1}{n!}\times n!$ donc $(P_n|\frac{1}{n!}L_n)\frac{1}{n!} = -\frac{1}{n!}(n+1)(n+1)! = -(n+1)^2$
On a donc $P_n = -(n+1)^2L_n$, en reprenant l'expression de P_n :
$P_n(t) = L_{n+2}(t) + (t-2n-3)L_{n+1}(t) = -(n+1)^2L_n$
et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall t \in [0,+\infty[\ ,\ L_{n+2}(t) + (t-2n-3)L_{n+1}(t) + (n+1)^2L_n(t) = 0}$

6°) d) Avec le 6°) c) On a : $L_2(t) + (t-3)L_1(t) + L_0(t) = 0$
$\Rightarrow L_2(t) = -(t-3)(1-t) + 1 = -t + t^2 + 3 - 3t + 1 = t^2 - 4t + 4$

On a donc : $\boxed{L_2(X) = X^2 - 4X + 4}$

7°) $f_a \in E$
$\Leftrightarrow t \mapsto (f_a(t))^2e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[\ \Leftrightarrow t \mapsto e^{-(2a+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[\ \Leftrightarrow (2a+1) > 0$ d'après le cours.

Donc : $\boxed{f_a \in E \Leftrightarrow a > \frac{-1}{2}}$

8°) a) $(L_k, f_a) = \int\limits_0^{+\infty} L_k(t)f_a(t)e^{-t}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\varphi_k^{(k)}(t)dt$

On intègre par partie :

$(L_k, f_a) = \lim\limits_{t\to+\infty}[e^{-at}\varphi_k^{(k-1)}(t)] - \varphi_k^{(k-1)}(0) + a\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\varphi_k^{(k)}(t)dt$

Mais, par la question 3°) $\varphi_k^{(k-1)}(0) = 0$ et la limite est nulle puisque :
$e^{-at}\varphi_k^{(k-1)}(t) = e^{-(a+1)t}\underbrace{e^t\varphi_k^{(k-1)}(t)}_{\text{polynôme}}$ et $a+1 > \frac{1}{2} > 0$

On a donc : $(L_k, f_a) = a\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\varphi_k^{(k-1)}(t)dt$

En réintégrant par parties : $(L_k, f_a) = a^2\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\varphi_k^{(k-2)}(t)dt$

Puis, par itération : $(L_k, f_a) = a^k\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\varphi_k^{(0)}(t)dt$

Donc : $(L_k, f_a) = a^k\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}t^ke^{-t}dt = a^k\int\limits_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}t^kdt$

Changement de variable C^1 bijectif : $u = (a+1)t$: $(L_k, f_a) = a^k\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}u^k\frac{1}{(a+1)^k}\frac{du}{a+1}$

On a déjà vu que : $\int\limits_0^{+\infty} u^ke^{-u}du = k!$ et donc $(L_k, f_a) = a^k\frac{1}{(a+1)^{k+1}}k!$

Bilan : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ (L_k, f_a) = k!\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}}$

8°) b) Par le 5°) $(\frac{1}{k!}L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ donc, par le théorème de projection orthogonale : $S_{n,a} = \sum\limits_{k=0}^{n}(f_a|\frac{1}{k!}L_k)\frac{1}{k!}L_k = \sum\limits_{k=0}^{n}(f_a|L_k)\frac{L_k}{(k!)^2}$

En utilisant le 8°) a) : $S_{n,a} = \sum\limits_{k=0}^{n} k!\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}\frac{L_k}{(k!)^2}$

Donc : $\boxed{S_{n,a} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}\frac{L_k}{k!}}$

8°) c) Comme la base $(\frac{L_k}{k!})_{0\leq k\leq n}$ orthonormée alors : $||S_{n,a}||^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}\right)^2$

Donc : $\boxed{||S_{n,a}||^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^{2k}}{(1+a)^{2k+2}}}$

8°) d) Par le théorème de Pythagore :
$||f_a||^2 = ||S_{n,a}||^2 + ||S_{n,a} - f_a||^2 \Rightarrow ||S_{n,a} - f_a||^2 = ||f_a||^2 - ||S_{n,a}||^2$

$||f_a||^2 = \int\limits_0^{+\infty}(f_a(t))^2e^{-t}dt = \int\limits_0^{+\infty}e^{-(2a+1)t}dt = [\frac{-1}{2a+1}e^{-(2a+1)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2a+1}$

Donc $||S_{n,a} - f_a||^2 = \frac{1}{2a+1} - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^{2k}}{(1+a)^{2k+2}} = \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{(1+a)^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^{2k}}{(1+a)^{2k}} = \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{(1+a)^2}\sum\limits_{k=0}^{n}((\frac{a}{1+a})^2)^k$

$q = (\frac{a}{a+1})^2 \in [0,1[$, en effet : $q \geq 0$ est évident et $1 - q = 1 - \frac{a^2}{(a+1)^2} = \frac{a^2+2a+1-a^2}{(a+1)^2} = \frac{2a+1}{(a+1)^2} > 0$ car $2a+1 > 0$ puisque $f_a \in E$. On en déduit $q < 1$ et enfin $q \in]0,1[$

Par somme des termes d'une suite géométrique de raison alors :
$||S_{n,a} - f_a||^2 = \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{(1+a)^2}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}||S_{n,a} - f_a||^2$
$= \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{(1+a)^2}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{(1+a)^2}\frac{1}{1-\frac{a^2}{(1+a)^2}} = \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{(1+a)^2-a^2} = \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{2a+1} = 0$

On a bien : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}||S_{n,a} - f_a|| = 0}$