Chapitre 11 : Séries de fonctions

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et les applications considérées sont de I dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Modes de convergence d'une séries de fonctions

1.1 Convergence simple

1.1.1 Définitions

Définitions. *Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K.*
Alors on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ et on définit ainsi une suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans K.

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$

On dit que :
la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** *sur I (ou sur une partie D de I)*
si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** *sur I (ou sur une partie D de I)*

On note $D = \{t \in I \ , \ (S_n(t)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ converge}\}$.

La fonction S définie sur D par $\forall t \in D$, $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est appelée fonction somme de la série $\sum f_n$

Remarques. *On gardera ces notations.*
En fait, on va se ramener le plus souvent possible à des suites de fonctions ...

1.1.2 Exemples

exemple 1

Soit $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & n^2t^4e^{-tn} \end{array}$

exemple 2

Soit $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$

1.2 Convergence uniforme

1.2.1 Définition

Définition. *On dit que :*
la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** *sur I (ou sur une partie D de I)*
si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** *sur I (ou sur une partie D de I)*

1.2.2 Théorème

En pratique, on pose $\forall t \in D$, $R_n(t) = S(t) - S_n(t) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$ qui est appelé reste de la série de fonctions $\sum f_n$.

On a alors, le théorème suivant :

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement vers S sur D.*

Alors : $\sum f_n$ converge uniformément sur D
si et seulement si (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur D

preuve :

1.2.3 Exemples

exemple 1

Montrer que $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1+n^2}$ converge uniformément sur $[0,1]$

exemple 2

Montrer que $\zeta(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, mais pas sur $]1, +\infty[$.

1.3 Convergence normale

1.3.1 Définition

Définition. *Soit* $(f_n : I \longrightarrow k)$ *une suite de fonctions* **bornées sur** I.

Alors on dit que : la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* I *si et seulement si* $\sum ||f_n||_{I,\infty}$ *est convergente.*

1.3.2 CN ⇒ CU ⇒ CS

Théorème . $\sum f_n$ *converge normalement sur* I
$\Rightarrow \sum f_n$ *converge uniformément sur* I
$\Rightarrow \sum f_n$ *converge simplement sur* I

Remarques. *Pour montrer la convergence normale on essaye d'obtenir une majoration de la forme* $|f_n(t)| \leq a_n$ *avec* $\sum a_n$ *convergente.*
On a donc $CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$

preuve :

1.3.3 Exemples

exemple 1

$\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$
CN sur $[a, +\infty[$ pour $a > 1$ mais pas sur $]1, +\infty[$

exemple 2

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+t^2}$

Etude de la CS, de la CU et de la CN ...

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Continuité

2.1.1 En un point

Théorème . *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonction de* I *dans* K *et* $a \in I$*. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue en } a \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases} \Rightarrow \text{la fonction somme } S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue en } a.$$

preuve :

2.1.2 Sur un intervalle

Théorème . *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonction de* I *dans* K*. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque } f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases} \Rightarrow \text{la fonction somme } S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } I$$

Remarque. *On pourra montrer la convergence normale sur* I*, ou sur tout segment inclus dans* I*, où directement la convergence uniforme sur* I*, ou sur tout segment de* I *...*

preuve :

2.1.3 Exemples

exemple 1

$\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1; +\infty[$

exemple 2

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2.2 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème . *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* $[a; b]$ *dans* K*. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a; b] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \text{la série numérique } \sum \int\limits_a^b f_n(t)dt \text{ est convergente et } \int\limits_a^b S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_n(t)dt \end{cases}$$

Remarque. *Autrement dit :* $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_n(t)dt$

Exemple. *Soit* $1 < a < b$*, intégrale de* $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

2.3 Dérivation : théorème de dérivation terme à terme

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f'_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n \end{cases}$$

Remarque. *On peut bien sûr raisonner sur des segments inclus dans I et passer à I ensuite ...*

preuve :

Exemple. *Dérivée de la fonction ζ*

Exemple. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n cos(nx)}{n^3}$ *est de classe C^1 sur $]-1;1[$*

2.4 Généralisation

Théorème . *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k-1]\!] \text{ la série de fonctions } \sum f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } I \\ \text{la série de fonctions } \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la fonction somme } S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k]\!] \ , \ S^{(i)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)} \end{cases}$$

Remarque. *On peut bien sûr raisonner sur des segments inclus dans I et passer à I ensuite ...*

preuve :

Exemple. *éventuellement la fonction ζ ...*

3 Théorème de la double limite

3.1 Version : suite de fonctions (plus au programme ?)

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une extrémité éventuellement infinie de I.*
Soit $(f_n : I \longrightarrow K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : I \longrightarrow K$ une fonction. Alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la suite } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n \end{cases}$$

Remarque. $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & f \\ \downarrow x \to a & & \downarrow x \to a \\ \lambda_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \lambda \end{array}$$

preuve : Hors programme

3.2 Version : séries de fonctions (au programme)

Théorème . *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *dans* K *et* a *une borne de* I *(éventuellement infinie). Alors :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \lambda_n \\ \textit{la série de fonctions} \sum f_n \textit{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textit{la série } (\sum \lambda_n) \textit{ est convergente} \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \end{cases}$$

Remarque. $\lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$

preuve : Hors programme

3.3 Exemple

Exemple. *1*

Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nt+in^2 sin(t)}$

Exemple. *2*

Etude en $+\infty$ *et en* 1 *de* $\zeta(x)$

Sommaire