Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°6

EXERCICE n°1

1°) • $M \in S_n \cap A_n \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S_n \\ M \in A_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = M^T \\ M = -M^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2M = 0_E \\ 2M^T = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow M = 0_E$

On a donc $S_n \cap A_n = \{0_E\}$ et donc $A_n + S_n = A_n \oplus S_n$

• $\forall M \in E \ , \ M = \underbrace{\dfrac{M+M^T}{2}}_{\in S_n} + \underbrace{\dfrac{M-M^T}{2}}_{\in A_n}$ donc $E \subset S_n + S_n$

(décomposition vue en cours)
Comme l'autre inclusion est évidente : $E = S_n + A_n$

• En regroupant les deux résultats précédent : $E = S_n \oplus A_n$

• Soit $M \in S_n$ et $N \in A_n$. Alors :
$< M, N >= tr(M^T N >$, mais $M \in S_n$ donc $< M, N >= tr(N)$
D'autre part : $< M, N >=< N, M >= tr(N^T M)$ et $N \in A_n$
donc $< M, N >= tr(-NM) = -tr(NM) = -tr(MN)$ par propriété de la trace.
Donc $< M, N >= tr(MN) = -tr(MN)$ et donc $< M, N >= 0$
On a alors : $\forall (M, N) \in S_n \times A_n \ , \ < M, N >$ et donc S_n et A_n sont orthognaux.

• Bilan : $\boxed{S_n \text{ et } A_n \text{ sont en somme directe orthogonale.}}$

2°) a) On utilise la décomposition vue au 1°) : M$= \underbrace{\dfrac{M+M^T}{2}}_{\in S_n} + \underbrace{\dfrac{M-M^T}{2}}_{\in A_n}$ et on en déduit :

$$\boxed{H = \tfrac{M+M^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

2°) b) Par le théorème de projection orthogonale : $\boxed{d(M, A_n) = ||H|| = \sqrt{< H, H >} = \sqrt{19}}$

EXERCICE n°2

1°) N_a est une application de E dans $\mathbb{R}$ est évident. De plus , pour $(P, Q, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$.

i) $N_A(P) \geq 0$ évident.

ii) $N(\lambda P) = |\lambda P(a)| + \int\limits_0^1 |\lambda P'(t)| \, dt = |\lambda| \, |\lambda P(a)| + |\lambda| \int\limits_0^1 |P'(t)| \, dt = |\lambda| \, N_a(P)$

iii) $N_a(P) = 0$

$\Rightarrow |P(a)| + \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt = 0$ (somme de deux termes positifs)

$\Rightarrow |P(a)| = 0$ et $\int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt = 0$ (théorème de l'intégrale nulle avec $t \mapsto |P'(t)|$ continue et positive sur $[0;1]$)

$\Rightarrow P(a) = 0$ et $\forall t \in [0;1]\ ,\ |P'(t)| = 0$

$\Rightarrow P(a) = 0$ et $\forall t \in [0;1]\ ,\ P'(t) = 0$

$\Rightarrow P(a) = 0$ et $P' = 0$ (polynôme admettant une infinité de racines)

$\Rightarrow P(a) = 0$ et P constant

$\Rightarrow \forall t \in [0;1]\ ,\ P(t) = 0$ (P a une infinité de racines)

$\Rightarrow P = 0_E$

iv) Par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ on a : $\forall t \in [0;1] \quad |(P+Q)'(t)| \leq |P'(t)| + |Q'(t)|$

On intègre entre 0 et 1 et on obtient : $\int\limits_0^1 |(P+Q)'(t)|\, dt \leq \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt + \int\limits_0^1 |Q'(t)|\, dt$

On sait aussi que $|(P+Q)(a)| \leq |P(a)| + |Q(a)|$. En ajoutant à l'inégalité ci-dessus :

$\int\limits_0^1 |(P+Q)'(t)|\, dt + |(P+Q)(a)| \leq \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt + \int\limits_0^1 |Q'(t)|\, dt + |P(a)| + |Q(a)|$

et donc $N_a(P+Q) \leq N_a(P) + N_a(Q)$

On a donc $\forall (P,Q,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$ $\begin{cases} i) N_a(P) \geq 0 \\ ii) N_a(\lambda P) = |\lambda|\, N_a(P) \\ iii) N_a(P) = 0 \Rightarrow P = 0_E \\ iv) N_a(P+Q) \leq N_a(P) + N_a(Q) \end{cases}$

Et donc $\boxed{N_a \text{ est bien une norme sur } E.}$

2°) $N_a(Q_n) = |Q_n(a)| + \int\limits_0^1 |Q_n'(t)|\, dt = |a^n| + \int\limits_0^1 n t^{n-1} dt = a^n + 1$ puisque $a \geq 0$ et $Q_n'(t) = nt^{n-1} \geq 0$ sur $[0;1]$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ N_a(Q_n) = a^n + 1}$

3°) Avec le 2°) : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \frac{N_a(Q_n)}{N_b(Q_n)} = \frac{1+a^n}{1+b^n} \sim \frac{1+a^n}{b^n}$ puisque $b^n + 1 \sim b^n$ car $b > 1$

Alors : $\frac{N_a(Q_n)}{N_b(Q_n)} \sim \frac{1}{b^n} + (\frac{a}{b})^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $b > a$ et $b > 1$

Si N_a et N_n étaient équivalentes, on aurait $\exists \alpha > 0$ tel que : $N_b(P) \leq \alpha N_a(P)$ pour tout P de E.
En particulier, en $P = Q_n$ on aurait : $1 \leq \alpha \frac{N_a(Q_n)}{N_b(Q_n)}$ et en utilisant la limite ci-dessus : $1 \leq 0$. ABSURDE

Donc $\boxed{\text{si } b > 1 \text{ et } a < b \text{ alors } N_a \text{ et } N_b \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

4°) On suppose $(a,b) \in [0;1]$.

Alors, $\forall P \in E$: $P(b) - P(a) = \int\limits_a^b P'(t) dt$ et donc $|P(b) - P(a)| \leq \int\limits_a^b |P'(t)|\, dt$

Comme de plus $[a,b] \subset [0,1]$ et $|P'(t)| \geq 0$, alors : $|P(a) - P(b)| \leq \int\limits_a^b |P'(t)|\, dt \leq \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt$

On utilise la deuxième inégalité triangulaire $|P(a)| - |P(b)| \leq |P(a) - P(b)|$.

Et donc : $|P(a)| \leq |P(b)| + \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt$

En ajoutant $\int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt$ on obtient :

$|P(a)| + \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt \leq |P(b)| + 2\int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt \Rightarrow |P(a)| + \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt \leq 2\,|P(b)| + 2\int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt$ car $|P(b)| \geq 0$
$\Rightarrow N_a(P) \leq 2N_b(P)$

On peut inverser les rôles de a et b et on a : $N_b(P) \leq 2N_a(P)$

En réunissant les deux inégalités obtenues précédemment, on a : $\forall P \in E \;\; \frac{1}{2}N_b(P) \leq N_a(P) \leq 2N_b(P)$

Donc $\boxed{N_a \text{ et } N_b \text{ sont équivalentes.}}$

EXERCICE n°3

1°) • Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
• Si $x > 0$ alors $0 \leq |f_n(x)| \leq nxe^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exp-puissance (car $x > 0$)
On a donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
• Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers la fonction nulle.}}$

2°) a) φ est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$

On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		1		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2°) b) Soit $a > 0$.
Alors comme $na \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ on a $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow na > 1$

Pour $n \geq n_0$, on a alors φ décroissante sur $[na, +\infty[$ et donc :
$x \geq a \Rightarrow nx \geq na \Rightarrow \varphi(nx) \leq \varphi(na)$
Comme $\forall x \geq a$, $|f_n(x)| \leq \varphi(nx)$ alors : $\forall x \geq a$, $|f_n(x)| \leq \varphi(na) = nae^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme la majoration ne dépend pas de x et est donc uniforme sur $[0, +\infty[$, alors on en déduit :

$\boxed{\text{Pour } a > 0,\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [a, +\infty[}$

3°) a) Les fonctions f_n sont clairement C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0$,
$f_n'(x) = nsin(x)e^{-nx} + nxcos(x)e^{-nx} - n^2xsin(x)e^{-nx} = ne^{-nx}(sin(x) + xcos(x) - nxsin(x))$
Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \geq 0\ ,\ f_n'(x) = ne^{-nx}((1-nx)sin(x) + xcos(x))}$

3°) b) Soit $n \geq 1$ et $x \in]0, \frac{1}{n}]$ alors $1 - nx > 0$, $sin(x) > 0$, $xcos(x) \geq 0$, $e^{-nx} > 0$ donc :
$\boxed{f_n(x) > 0 \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in]0, \frac{1}{n}]}$

3°) c) Sur $[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}[$ on a :
$f_n'(x)=0 \Leftrightarrow sin(x)+xcos(x)-nxsin(x)=0 \Leftrightarrow sin(x)+xcos(x)=nxsin(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{tan(x)}=n$

Posons : $\forall x\in[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}[\ ,\ \alpha(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{tan(x)}$
Alors α est dérivable et $\alpha'(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{(1+tan^2(x))}{tan^2(x)}<0$ sur$[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}[$
Or $\alpha(\frac{1}{n})=n+\frac{1}{tan(1/n)}>n$ et $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}}\alpha(x)=\frac{2}{\pi}<n$
Comme α est strictement décroissante on en déduit qu'il existe un unique $x_n\in[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha(x_n)=n$
Ou encore : il existe un unique $x_n\in[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}[$ tel que $f_n'(x_n)=0$
Comme $f_n'(\frac{\pi}{2})=ne^{-n\pi/2}(1-n\frac{\pi}{2})\neq 0$ alors : $\boxed{\text{il existe un unique } x_n\in[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}] \text{ tel que } f_n'(x)=0}$

3°) d) Comme $f_n'(\frac{\pi}{2})<0$
On en déduit le tableau de signe de f_n' et donc les variations de f_n.

x	0		x_n		$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(x_n)$	$\searrow$	$f_n(\frac{\pi}{2})>0$

3°) e) • Calculons et faisons un développement au voisinage de $n=+\infty$:

$$f_n'(\tfrac{3}{n})=ne^{-3}[(1-3)sin(\tfrac{3}{n})+\tfrac{3}{n}cos(\tfrac{3}{n})]=ne^{-3}[-2(\tfrac{3}{n}+o(\tfrac{1}{n}))+\tfrac{3}{n}(1+o(\tfrac{1}{n}))]=-ne^{-3}(\tfrac{3}{n}+o(\tfrac{1}{n}))\sim -3e^{-3}<0$$

Donc, avec le tableau de signe de f_n' (et par unicité de x_n) : $x_n<\frac{3}{n}$.

• Le tableau de variation de f_n et la question 2°) permettent de poser pour n assez grand :
$$\begin{cases} N_1(f_n)=\sup\limits_{x\in[\frac{\pi}{2},+\infty[}|f_n(x)| \\ N_2(f_n)=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)| \qquad (N_1 \text{ et } N_2 \text{ seront utilisées dans le 4°}) \\ N_\infty(f_n)=\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|f_n(x)| \end{cases}$$
Alors, avec le tableau de variation du d) on a : $N_\infty(f_n)=f_n(x_n)=nx_nsin(x_n)e^{-nx_n}$
On utilise $0\le sin(x_n)\le x_n\le\frac{3}{n}$ et $0\le e^{-nx_n}\le 1$, donc :
$N_\infty(f_n)\le n\frac{3}{n}\frac{3}{n}=\frac{9}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Donc par comparaison : $N_\infty(f_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Comme N est la norme de la convergence uniforme sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on en déduit que :
$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [0,\frac{\pi}{2}]}$

4°) On a facilement $N_2(f_n)\le N_1(f_n)+N_\infty(f_n)$.
De plus, par le 3°)e) $N_\infty(f_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $N_1(f_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par le 2°).
Donc, par comparaison : $N_2(f_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et par définition
$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [0,+\infty[}$