Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°5

EXERCICE

1°) Au voisinage de $+\infty$ on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{n!}$ par comparaison puissance factorielle.

On a donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme $0 < 1$, on sait alors, par la règle de D'Alembert que $\boxed{\sum \frac{2^n}{n+n!} \text{ est convergente}}$

2°) On a : $\forall n \geq 1$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Mais $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente, et donc par la règle de comparaison (termes positifs), $\sum |u_n|$ est absolument convergente.

Par absolue convergence on a alors que $\boxed{\sum \frac{sin(n)}{n\sqrt{n}} \text{ est convergente}}$

3°) On a : $\forall n \geq 2$, $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ puisque $\left|\frac{sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ pour $n \geq 2$

Mais $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, donc par la règle de comparaison (termes positifs), $\sum |u_n|$ est convergente. Par absolue convergence on a alors que $\boxed{\sum \frac{sin(n)}{n\sqrt{n}} \text{ est convergente}}$

4°) Au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = sin(ln(1+\frac{1}{n})) - \sqrt{\frac{1}{1+n^2}}$$
$$= sin(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - (n^2(1+\frac{1}{n^2}))^{\frac{-1}{2}}$$
$$= (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^3}))$$
$$= (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o(\frac{1}{n^3}))$$
$$= \frac{-1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

On a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2} < 0$.

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors par la règle de l'équivalent pours les séries à termes de signe constants, on a : $\boxed{\sum(sin(ln(1+\frac{1}{n})) - \sqrt{\frac{1}{1+n^2}}) \text{ qui est une série convergente.}}$

BECEAS 2023 : Une inégalité entre sommes de séries

1) a) $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit que : $\boxed{\sum a_n \text{ est convergente et que } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 1}$

1) b) i) $h_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+k)} = \frac{n}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{(n+1)(\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2})} = \frac{6}{(n+1)(2n+4)} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ h_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}}$

1) b) ii) On remarque que : $h_n = 3a_{n+1}$ et on en déduit donc la convegence de $\sum h_n$

On a alors (puisque les séries convergent) : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3a_{n+1} = 3[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n - a_1]$ et en utilisant le 1) a) :

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n = 3[1 - \frac{1}{2}] = \frac{3}{2}$ et on en déduit que : $\boxed{\sum h_n \text{ est convergente et que } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n = \frac{3}{2}}$

2) a) $q \in]0,1[$, on a donc une série géométrique convergente et, d'après le cours : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$

$h_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{q})^{k-1}} = \frac{n}{\frac{1-\frac{1}{q^n}}{1-\frac{1}{q}}} = \frac{n}{\frac{q^n-1}{q^n}} \frac{q-1}{q} = n(1-q)\frac{q^{n-1}}{1-q^n}$

On a donc : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-q} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ h_n = n(1-q)\frac{q^{n-1}}{1-q^n}}$

2) b) On a : $h_n \sim n(1-q)q^{n-1}$ et donc $\left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| \sim \frac{(n+1)(1-q)q^n}{n(1-q)q^{n-1}} \sim q$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| = q \in]0,1[$ donc par la règle de D'Alembert $\boxed{\sum h_n \text{ est convergente.}}$

On a : $0 \leq 1-q \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{1-q^n} \leq 1$ donc $0 \leq h_n \leq nq^{n-1}$

Calculons, comme si q variait sur $]0,1[$:
$\sum\limits_{n=1}^{N} nq^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{d}{dq}(q^n) = \frac{d}{dq} \sum\limits_{n=0}^{N} (q^n) = \frac{d}{dq}\left(\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right) = \frac{-(N+1)q^N(1-q)+(1-q^{N+1}}{(1-q)^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-q)^2}$

On a donc : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Comme $0 \leq h_n \leq nq^{n-1}$ et que les séries convergent, on a : $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Bilan : $\boxed{0 \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2}}$

3) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$P_n \Leftrightarrow (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 + \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2)$

Initialisation : $P_1 \Leftrightarrow (\sum\limits_{i=1}^{1} x_i y_i)^2 + \sum\limits_{1\leq i<j\leq 1} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = (\sum\limits_{i=1}^{1} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{1} x_i^2) \Leftrightarrow x_1^2 y_1^2 + 0 = (x_1^2)(y_1^2)$

La dernière égalité est bien sûr vraie, donc par équivalence P_1 est vraie.

Hérédité : on suppose P_n vraie. Alors :

$$(\sum_{i=1}^{n+1} x_iy_i)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n+1}(x_iy_j - x_jy_i)^2$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + x_{n+1}y_{n+1})^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_iy_{n+1} - x_{n+1}y_i)^2$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)^2 + x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)x_{n+1}y_{n+1} + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 + y_{n+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) + x_{n+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) - 2(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)x_{n+1}y_{n+1}$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)^2 + x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 + y_{n+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) + x_{n+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)$$

On utilise alors :P_n :

$$(\sum_{i=1}^{n+1} x_iy_i)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n+1}(x_iy_j - x_jy_i)^2$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) + x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) + x_{n+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)$$

D'autre part : $(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2)$

$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + y_{n+1}^2)$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) + x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

En regroupant les deux calculs ci-dessus on a donc P_{n+1}

Conclusion : on a démontrer par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ (\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)}$

3) b) On remarque que : $\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 \geq 0$ donc, avec le a) : $(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$

En passant à la racine carrée : $\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$

4) On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ u_k = \frac{1}{k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ (on peut la faire car la série est bien convergente)

Alors $u_{k+1} - u_k = [\frac{1}{(k+1)^2} - \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}] - [\frac{1}{k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}]$

Par téléscopage : $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k+1)^2} = \frac{k^2-(k+1)^2+k}{k^2(k+1)^2} = \frac{-k-1}{k^2(k+1)^2} \leq 0$ donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Or $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ (reste d'une série convergente) donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ u_k \geq 0$

On en déduit : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{k^2}}$

5) a) On applique Cauchy Schwarz avec $x_i = \sqrt{a_k}k$ et $y_i = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$ et on obtient (en renommant les indices) :

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2a_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

Comme : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ on a, en élevant au carré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)}$

5) b) On déduit de l'inégalité précédente : $\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leq 4\frac{1}{n^2(n+1)^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)$

Et on a donc : $h_n \leq 4\frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)$

Si on somme pour n variant de 1 à p : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{p} h_n \leq 4\sum\limits_{n=1}^{p}\frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)}$

5) c) On va réorganiser les indices :

$\sum\limits_{n=1}^{p}\frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)$

$= \sum\limits_{1\leq k\leq n\leq p}\frac{k^2 a_k}{n(n+1)^2}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{n=k}^{n}\frac{k^2 a_k}{n(n+1)^2}$

$\leq \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$ on utilise le 4)

$\leq \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k \frac{1}{2k^2}$

$\leq \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

En reportant dans le 5) b) : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{p} h_n \leq 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$

5) d) Comme la série $\sum a_k$ est convergente et que les a_k sont positifs on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$

Donc avec le c) : $\sum\limits_{n=1}^{p} h_n \leq 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$

Comme les h_n sont positifs alors la suite $(\sum\limits_{n=1}^{p} h_n)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et comme on vient de voir quelle est majorée, alors elle est convergente.

On en conclut : $\boxed{\sum h_n \text{ est convergente et en passant à la limite ci-dessus : } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \leq 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k}$

6) a) $\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{n^\alpha} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente par Riemann car $\alpha > 1$, par règle de l'équivalent la série $\sum \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$ est donc convergente.

Alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)^{\alpha+1}}$ (remplacé-compensé et terme nul pour $n=0$)

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}$ (changement d'indice)

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$

Mais $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha+1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{n^2}$ et en sommant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

En reportant dans l'inégalité ci-dessus : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geq \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{\pi^2}{6}}$

6) b) Par définition : $h_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}$

Pour $k \geq 1$, comme $\alpha > 1$, on a, par croissance sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto t^\alpha$: $k^\alpha \leq \int\limits_{k}^{k+1} t^\alpha dt$

En sommant de $k = 1$ à n, et par la relation de Chasles :

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha \leq \int\limits_{1}^{n+1} t^\alpha dt = [\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

En inversant cette inégalité et en reportant dans la définition de h_n, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \ h_n \geq (\alpha+1)\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}}$

6) c) Soit $A > 0$.

On sait que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et donc que $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq A + 1$

Mais $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, donc $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in]1, 1+\varepsilon[$, $\left| \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right| \leq 1$

Alors $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1 \geq A + 1 - 1 = A$

Par positivité des termes $\frac{1}{n^\alpha}$ et convergence de la série ($\alpha > 1$) : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq A$

Donc : $\forall A > 0$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in]1, 1+\varepsilon[$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geq A$ ce qui par définition de la limite signifie : $\boxed{\lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$

6) d) En sommant le b), on a, car les séries convergent : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \geq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha+1)\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$

En utilisant le a) et $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \geq (\alpha+1)\big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n - \frac{\pi^2}{6}\big)$

Avec la définition de C on a : $C \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \geq (\alpha+1)\big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n - \frac{\pi^2}{6}\big)$ et donc $C \geq (\alpha+1)\Big(1 - \frac{\pi^2}{6 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}\Big)$

En utilisant la limite du c) en conclut : $\boxed{C \geq 2}$

Remarque : C est donc la meilleur constante possible ...

7) a) Si on se place dans le cas de la question 2) : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2}$

Alors : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n$ et les résultats ci-dessus donnent : $\frac{1}{1-q} \leq K\frac{1}{(1-q)^2} \Longrightarrow 1 - q \leq K$, comme ce résultat est vraie pour tout $q \in]0, 1[$ alors $\boxed{K \geq 1}$

7) b) i) Si $n > N^2 + 1$ alors $g_n = \frac{1}{2^n}$ et $n - 1 > N^2$ et donc $g_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ Alors :

$a_n = \frac{(\frac{1}{2^n})^n}{(\frac{1}{2^{n-1}})^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-(n-1)^2} = \frac{1}{2^{2n-1}}$

$\sum a_n$ est donc une série géométrique (à partir d'un certain rang) de raison $\frac{1}{4}$ et donc $\boxed{\sum a_n \text{ est convergente.}}$

7°) b) ii) • On a : $0 \leq g_n \leq \frac{4}{2^n}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{2^n}$ et par somme d'une série géométrique

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$ On a bien : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4}$

• $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum\limits_{p=1}^{N} a_{p^2}$

Mais $a_{p^2} = \frac{(g_{p^2})^{p^2}}{(g_{p^2-1})^{p^2-1}} = \frac{(\frac{4}{2^{p^2}})^{p^2}}{(\frac{1}{2^{p^2-1}})^{p^2-1}} = 2^{2p^2-p^4+(p^2-1)^2} = 2$ Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum\limits_{p=1}^{N} 2 = 2N$

On a bien : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \geq 2N}$

7°) c) $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{(g_k)^k}{(g_{k-1})^{k-1}} = \frac{(g_n)^n}{(g_0)^0} = (g_n)^n$ par téléscopage et car $g_0 = 1$

On a donc : $\boxed{(g_n)^n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k}$

7°) d) • La fonction ln étant concave on a : $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ln(\frac{1}{a_k})}{n} \leq ln(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}{n})$

Donc : $\frac{-ln(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k)}{n} \leq ln(\frac{1}{h_n})$

On utilise le c) : $\frac{-ln((g_n)^n)}{n} - \leq ln(h_n)$

donc $-ln(g_n) \leq -ln(h_n)$ et donc $\boxed{h_n \leq g_n}$

• Avec le c) on a : $2N \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et avec la définition de K on a donc : $2N \leq K \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n$

Avec $h_n \leq g_n$ on obtient, en sommant : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4$ par le c)ii)

Donc $2N \leq 4K$

Cette inégalité devant être valable pour tout N il y a absurdité.

Bilan : $\boxed{\text{Il n'existe pas de constante } K > 0 \text{ telle que } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n}$

EPITA 2023

Q1) Soit $f, g, h \in C^0_{2\pi}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $< f+\lambda g, h >= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(f(t)+\lambda g(t))h(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)h(t)dt + \lambda\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)h(t)dt =< f,h > +\lambda < g,h >$

ii) $< f,g >) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)h(t)dt =< g,f >$ par commutativité du produit

iii) $< f,f >) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)^2dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale

iii) $< f,f >) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)^2dt = 0$

Comme $t \mapsto f(t)^2$ est continue et positive alors par le théorème de l'intégrale nulle, f est nulle sur $[0, 2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π périodicité.

On a donc : $\forall f,g,h \in C^0_{2\pi}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} i) < f+\lambda g >=< f,g > +\lambda < f,h > \\ ii) < f,g >=< g,f > \\ iii) < f,f >\geq 0 \\ iv) < f,f >= 0 \Rightarrow f = 0_{C^0_{2\pi}} \end{cases}$

Bilan : $\boxed{\text{On a bien } <,> \text{ qui est un produit scalaire sur } C^0_{2\pi}}$

Q2) Si on pose : $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ , } t = k\pi \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$

Alors $f \in C^{0,pm}_{2\pi}$ et $< f,f >= 0$ alors que f est non nulle.

$\boxed{<,> \text{ n'est donc pas un produit scalaire sur } C^{0,pm}_{2\pi}}$

Q3) Montrons que $<,>$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$

Les points i), ii) et iii) se démontrent comme en Q1), il ne reste que le point iv).

Soit donc $f \in \tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ telle que : $< f,f >= 0$

On considère $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 2\pi$ une subdivision adaptée à f.

Alors par la relation de Chasles : $< f,f >= 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)^2dt = 0$

Après comme $t \mapsto f(t)^2$ est positive, continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$, alors par le théorème de l'intégrale nulle f est nulle sur $]a_k, a_{k+1}[$.

En un point a_i, comme $f(a_i) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a_i+h)+f(a_i-h)}{2}$ on en déduit $f(a_i) = 0$

On a donc donc f nulle partout et donc f est bien la fonction nulle.

Finalement : $\boxed{<,> \text{ est bien un produit scalaire sur } \tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}}$

Q4) • Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $< c_i, c_j >= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} cos(it)cos(jt)dt$

Par formule trigonométrique : $< c_i, c_j >= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[cos((i+j)t) + cos((i-j)t)]dt$

Calculons, pour $k \in \mathbb{Z}$: $\int\limits_0^{2\pi} cos(kt)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ 2\pi \text{ si } k = 0 \end{cases}$

Alors, si $i \neq j$: $< c_i, c_j >= 0$

• Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $< c_i, s_j >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} cos(it)sin(jt)dt$

Par formule trigonométrique : $< c_i, s_j >= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} [sin((i+j)t) + sin((j-i)t)]dt$

Calculons, pour $k \in \mathbb{Z}$: $\int\limits_0^{2\pi} sin(kt)dt = 0$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Alors : $< c_i, s_j >= 0$

• Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $< s_i, s_j >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} sin(it)sin(jt)dt$

Par formule trigonométrique :

$< s_i, s_j >= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} [cos((i-j)t) - cos((i+j)t)]dt$

Alors, si $i \neq j$: $< s_i, s_j >= 0$

• On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: les éléments de $(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ sont orthogonaux deux à deux.
On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ (c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n) \text{ est orthogonale.}}$

Q5) • $< c_0, c_0 >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} dt = 1$ donc $||c_0|| = 1$

• Pour $i \in \mathbb{N}^*$, $< c_i, c_i >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} cos^2(it)dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+cos(2it)}{2} dt = \frac{2\pi}{4\pi} + 0 = \frac{1}{2}$ et donc $||c_i|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Pour $i \in \mathbb{N}^*$, $< s_i, s_i >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} sin^2(it)dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-cos(2it)}{2} dt = \frac{2\pi}{4\pi} - 0 = \frac{1}{2}$ et donc $||s_i|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Bilan : $\boxed{||c_0|| = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ ||s_i|| = ||c_i|| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

• On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ < c_0, \sqrt{2}c_1, \ldots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \ldots, \sqrt{2}s_n) \text{ est une base orthonormée de } F_n}$

Q6) Par le théorème de projection orthogonale et en utilisant la base orthonormée donnée par Q5) on a :
$p_n(f) =< f, c_0 > c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} [2 < f, c_k > c_k + 2 < f, s_k > s_k]$

Avec les intégrales : $\boxed{p_n(f) = \frac{\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt}{2\pi} c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} [\frac{\int\limits_0^{2\pi} cos(kt)f(t)dt}{\pi} c_k + \frac{\int\limits_0^{2\pi} sin(kt)f(t)dt}{\pi} s_k]}$

Remarque : c'est la fonction $S_n(f)$ de la partie suivante.

Q7) On commence par deux calculs préliminaires qui nous permettront de répondre à la question.
•Préliminaires : soit g une fonction de $C_{2\pi}^{0,pm}$. Alors :

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$ on utilise Chasles

$= \int\limits_{-\pi}^{0} g(t)dt + \int\limits_0^{\pi} g(t)dt$ changement de variable $u = t + 2\pi$ dans la première intégrale

$= \int\limits_{\pi}^{2\pi} g(u+2\pi)du + \int\limits_0^{\pi} g(t)dt$ on utilise $g(u+2\pi) = g(u)$ et on repose $t = u$ dans la première, puis Chasles

$= \int\limits_0^{2\pi} g(t)dt$ Donc $g \in C_{2\pi}^{0,pm} \Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} g(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$

• Soit g une fonction impaire. Alors :

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$ changement de variable $u=-t$

$= \int\limits_{\pi}^{-\pi} g(-u)(-du)$ on utilise g impaire et on remet les bornes dans l'ordre

$= -\int\limits_{-\pi}^{-\pi} g(u)du$ on utilise g impaire et on remet les bornes dans l'ordre

Donc $\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$ qui donne $\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = 0$

Donc g impaire $\Longrightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = 0$

• Supposons f impaire. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)dt$ par 2π périodicité.

Comme $t \mapsto cos(nt)f(t)$ est impaire (car f est impaire et cos paire) alors $a_n(f) = 0$

De la même manière $a_0(f) = 0$

• Supposons maintenant f paire. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(nt)dt$ par 2π périodicité.

Comme $t \mapsto sin(nt)f(t)$ est impaire (car f est paire et sin impaire) alors $b_n(f) = 0$

• On a donc : $\boxed{\begin{cases} f \in C_{2\pi}^{0,pm} \text{ et impaire} & \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n(f) = 0 \\ f \in C_{2\pi}^{0,pm} \text{ et paire} & \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ b_n(f) = 0 \end{cases}}$

Q8) Par intégration par partie, comme f est C^1 sur $[a,b]$, on a pour $x>0$:

$\int\limits_{a}^{b} f(t)e^{ixt}dt = [\frac{e^{ixt}}{ix}f(t)]_a^b - \int\limits_{a}^{b} \frac{e^{ixt}}{ix}f'(t)dt = \frac{e^{ixb}}{ix}f(b) - \frac{e^{ixa}}{ix}f(a) - \int\limits_{a}^{b} \frac{e^{ixt}}{ix}f'(t)dt$

Mais $\left|\frac{e^{ixb}}{ix}f(b)\right| \leq \frac{|f(b)|}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\frac{e^{ixb}}{ix}f(b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On obtient de même $\frac{e^{ixa}}{ix}f(a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme f est C^1 sur $[a,b]$ alors f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe M telle que : $\forall t \in [a,b]\ ,\ |f'(t)| \leq M$

On a alors : $\left|\int\limits_{a}^{b} \frac{e^{ixt}}{ix}f'(t)dt\right| \leq \int\limits_{a}^{b} \frac{M}{x}dt = \frac{M(b-a)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Et donc $\int\limits_{a}^{b} \frac{e^{ixt}}{ix}f'(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Finalement $\int\limits_{a}^{b} f(t)e^{ixt}dt$ est la somme de trois termes de limite nulle et donc : $\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(t)e^{ixt}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

• Comme $a_n(f) = \frac{1}{\pi}Re(\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)e^{int}dt)$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}Im(\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)e^{int}dt)$ on en déduit :

$\boxed{f \in C_{2\pi}^1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(f) = 0}$

Q9) $\bullet$ $t\mapsto \frac{sin((2n+1)t)}{sin(t)}$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0 car : $\frac{sin((2n+1)t)}{sin(t)}\underset{t=0}{\sim}\frac{(2n+1)t}{t}=2n+1$, donc l'intégrale I_n est bien convergente.

$\bullet$ $I_{n+1}-I_n$
$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin((2n+3)t)-sin((2n+1)t)}{sin(t)}dt$
$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin((2n+3)t)-sin((2n+1)t)}{sin(t)}dt$
$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2sin(\frac{(2n+3)t-(2n+1)t}{2})cos(\frac{(2n+3)t+(2n+1)t}{2})}{sin(t)}dt$
$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2sin(t)cos((2n+2)t)}{sin(t)}dt$
$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2cos((2n+2)t)dt$
$=0$ car $2n+2\neq 0$ (calcul déjà effectué)
On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}-I_n=0$ et donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$

Comme $I_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(t)}{sin(t)}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1dt=\frac{\pi}{2}$ on en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\frac{\pi}{2}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\frac{\pi}{2}}$

Q10) $\bullet$ Au voisinage de $t=0$: $\frac{t-sin(t)}{tsin(t)}=\frac{t-(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3))}{tsin(t)}=\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{tsin(t)}\sim\frac{t^3}{6t^2}=\frac{t}{6}\underset{t\to0}{\longrightarrow}0$

$\bullet$ On pose alors $\begin{array}{rcl} F & : & [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \frac{t-sin(t)}{tsin(t)} & \text{si } t\neq 0\end{cases}\end{array}$ qui est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ grâce au calcul précédent et C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ comme composée de fonctions C^1.

$\bullet$ Pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$ on a :
$F(t)=\frac{1}{sin(t)}-\frac{1}{t}$ donc $F'(t)=\frac{-cos(t)}{sin^2(t)}+\frac{1}{t^2}=\frac{sin^2(t)-t^2cos(t)}{t^2sin^2(t)}$
Au voisinage de $t=0^+$:

$$F'(t)=\frac{(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3))^2-t^2(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2sin^2(t)}=\frac{t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)-t^2+\frac{t^4}{2}+o(t^4)}{t^2sin^2(t)}=\frac{\frac{t^4}{6}+o(t^4)}{t^2sin^2(t)}\sim\frac{\frac{t^4}{6}+o(t^4)}{t^2t^2}\sim\frac{1}{4}$$

On en déduit $\lim\limits_{t\to0^+}F'(t)=\frac{1}{4}$, comme F est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ on en déduit par le théorème de prolongement de la fonction dérivée que F est dérivable en $t=0$ et que $F'(0)=\lim\limits_{t\to0}F'(t)=\frac{1}{4}$
On a donc F est C^1 en 0 et donc sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

Bilan : $\boxed{t\mapsto\frac{t-sin(t)}{tsin(t)} \text{ est prolongeable en une fonction de } C^1([0,\frac{\pi}{2}])}$,

ce prolongement est la fonction $\begin{array}{rcl} F & : & [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \frac{t-sin(t)}{tsin(t)} & \text{si } t\neq 0\end{cases}\end{array}$

Q11) $t \mapsto \frac{sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0 (par $2n+1$), donc J_n est bien convergente.

On remarque que : $I_n - J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin((2n+1)t)F(t)dt = \pi b_{2n+1}(F)$

Comme $F \in C^1([0, \frac{\pi}{2})$ alors on peut appliquer la question Q8) et on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{n \to +_infty}(I_n - J_n) = 0}$

Comme on a vu en Q9) que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$ alors on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$

Q12) • On effectue le changement de variable C^1 bijectif $u = (2n+1)t$ dans l'intégrale J_n et on a :
$J_n = \int\limits_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{du}{2n+1}$ et donc $J_n = \int\limits_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{sin(u)}{u} du$

Soit $X > 0$
Recherche : $N_X\pi + \frac{\pi}{2} \leq X < (N_X+1)\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow N_X\pi \leq X - \frac{\pi}{2} < (N_X+1)\pi \Leftrightarrow N_X \leq \frac{X - \frac{\pi}{2}}{\pi} < N_X + 1$

On pose alors : $N_X = \lfloor \frac{X - \frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor$
Alors par la relation de Chasles :
$\int\limits_0^X \frac{sin(t)}{t} dt = \int\limits_0^{N_X\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t} dt + \int\limits_{N_X\pi + \frac{\pi}{2}}^X \frac{sin(t)}{t} dt = J_{N_X} + \int\limits_{N_X\pi + \frac{\pi}{2}}^X \frac{sin(t)}{t} dt$

Mais $\left| \int\limits_{N_X\pi + \frac{\pi}{2}}^X \frac{sin(t)}{t} dt \right| \leq \int\limits_{N_X\pi + \frac{\pi}{2}}^X \frac{1}{t} dt \leq \frac{\pi}{X} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\int\limits_0^X \frac{sin(t)}{t} dt = J_{N_X} + o(1)$ et donc $\int\limits_0^X \frac{sin(t)}{t} dt \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

• On en déduit que : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt\text{est convergente et que } \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$

Q13) Soit u un réel qui ne soit pas un multiple de 2π (ainsi $e^{iu} \neq 1$), alors :

$\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^n cos(ku)$
$= \frac{-1}{2} + \sum\limits_{k=0}^n Re(e^{iku})$
$= \frac{-1}{2} + Re(\sum\limits_{k=0}^n (e^{iu})^k)$ somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{iu} \neq 1$
$= \frac{-1}{2} + Re(\frac{1 - e^{i(n+1)u}}{1 - e^{iu}})$
$= \frac{-1}{2} + Re(\frac{e^{i(n+1)u/2}(e^{-i(n+1)u/2} - e^{i(n+1)u/2})}{e^{iu/2}(e^{-iu/2} - e^{iu/2})})$
$= \frac{-1}{2} + Re(e^{inu/2} \frac{-2isin(\frac{(n+1)u}{2})}{-2isin(\frac{u}{2})})$
$= \frac{-1}{2} + cos(\frac{n}{2}) \frac{sin(\frac{(n+1)u}{2})}{sin(\frac{u}{2})}$
$= \frac{-1}{2} + \frac{sin(\frac{n+1}{2}u + \frac{n}{2}u) + sin(\frac{n+1}{2}u - \frac{n}{2}u)}{2sin(u/2)}$
$= \frac{-1}{2} + \frac{sin((n+\frac{1}{2})u) + sin(u/2)}{2sin(u/2)}$
$= \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(u/2)}$

On a donc : $\boxed{\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^n cos(ku) = \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(u/2)}}$

Q14) $S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} [a_k(f) cos(kx) + b_k(f) sin(kx)]$

On passe aux expressions intégrales des coefficients de Fourier, que l'on prendra sur $[-\pi, \pi]$ par 2π périodicité

$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(kt)f(t)dt) cos(kx) + (\int\limits_{-\pi}^{\pi} sin(kt)f(t)dt) sin(kx)]$

Par linéarité de l'intégrale :

$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\sum\limits_{k=1}^{n} (cos(kt)cos(kx) + sin(kt)sin(kx))] f(t)dt$

Par formule trigonométrique :

$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\sum\limits_{k=1}^{n} cos(k(t-x))] f(t)dt$

On regroupe sous l'intégrale :

$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} cos(k(t-x))] f(t)dt$

On utilise la question Q13) et on a (en effectuant le changement de variable $u = t$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})(x-u))}{2sin(\frac{x-u}{2})} f(u)du}$$

Q15) • On fait le changement de variable $u = t + x$ dans l'expression de Q14).
Comme la fonction que l'on intègre est 2π périodique, on peut garder l'intervalle $[-\pi, \pi]$ comme intervalle d'intégration.

$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})(-t))}{2sin(\frac{-t}{2})} f(t+x)dt$

On fait le changement de variable $u = t$ et comme sin est impaire :

$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})(u))}{2sin(\frac{u}{2})} f(u+x)du$

• On fait le changement de variable $t = x - u$ dans l'expression de Q14).
Comme la fonction que l'on intègre est 2π périodique, on peut garder l'intervalle $[-\pi, \pi]$ comme intervalle d'intégration.

$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})t)}{2sin(\frac{t}{2})} f(x-t)du$

On fait le changement de variable $u = t$:

$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} f(x-u)du$

• On a donc : $\boxed{S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} f(x+u)du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} f(x-u)du}$

Q16) Avec les deux expressions de Q15) :

$2S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} f(x+u)du + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} f(x-u)du$

Donc $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} [f(x+u) + f(x-u)]du$

Comme la fonction que l'on intègre est paire alors :

$$\boxed{S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})} [f(x+u) + f(x-u)]du}$$

Q17) $u \mapsto sin(u/2)$ ne s'annule pas sur $]0, \pi]$, donc la continuité par morceaux de h ne pose pas de problème sur $]0, \pi]$. On a même de classe C^1 par morceaux.
Il faut donc étudier la limite en $u = 0$

On sait que, par définition : $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$
donc $h(u) = \frac{1}{sin(u/2)}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right)$
On réorganise :
$h(u) = \frac{1}{sin(u/2)}\left(\frac{f(x+u)-f(x^+)}{2} + \frac{f(x-u)-f(x^-)}{2}\right)$
On modifie l'expression pour faire apparaître des taux d'accroissement :
$h(u) = \frac{u/2}{sin(u/2)}\left(\frac{f(x+u)-f(x^+)}{u} + \frac{f(x-u)-f(x^-)}{u}\right)$
On a que : $\frac{u/2}{sin(u/2)} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$
De plus, comme f est C^1 par morceaux, alors : $\frac{f(x+u)-f(x^+)}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} f'(x^+)$ et $\frac{f(x-u)-f(x^-)}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} -f'(x^-)$

On a donc $h(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} f'(x^+) - f'(x^-)$

h est prolongeable par continuité en 0.

Bilan : $\boxed{h \text{ est continue par morceaux sur } [0,\pi]}$

Q18) • Par Q9) $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2n+1)t)}{sin(t)}dt = \frac{\pi}{2}$
Donc $\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2n+1)t)}{sin(t)}\tilde{f}(x)dt$
Changement de variable $u = 2t$: $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{sin(u/2)}\tilde{f}(x)du$

• Avec cette expression et celle de Q16) :
$S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{2sin(\frac{u}{2})}[f(x+u)+f(x-u)]du - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{sin((n+\frac{1}{2})u)}{sin(u/2)}\tilde{f}(x)du$
On regroupe et on factorise :
$$S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} sin((n+\tfrac{1}{2})u)\underbrace{\frac{1}{sin(u/2)}[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \tilde{f}(x)]}_{h(u)}du$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} h(u)sin((n+\frac{1}{2})u)du}$

• Comme h est continue par morceaux alors, par le théorème admis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^{\pi} h(u)e^{ixu}du = 0$

En prenant la partie imaginaire $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^{\pi} h(u)sin(xu)du = 0$
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\pi} h(u)sin((n+\frac{1}{2})u)du = 0$
Et donc avec l'expression du début de question : $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n(f)(x) - \tilde{f}(x)) = 0$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \tilde{f}(x))$

Ce qui donne : $\boxed{S(f)(x) = \tilde{f}(x)}$

On a démontrer le théorème de Dirichlet qui dit que la série de Fourier d'une fonction de classe C^1 par morceaux tend ponctuellement vers sa "régularisée".
(Remarque : ceci est un théorème de TSI)