Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°4

EXERCICE 1

a) • $t \mapsto \frac{sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$ donc I_1 ne pose problème que en 0.
Au voisinage de $t=0$: $\frac{sin(t)}{t^2} \sim \frac{t}{t^2} \sim \frac{1}{t} > 0$ et $\int\limits_0^1 \frac{1}{t}dt$ est une intégrale de Riemann divergente.
Donc, par règle de l'équivalent, avec des fonctions positives : I_1 est divergente.

• $t \mapsto \frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$ donc I_2 ne pose problème que en 0.
Au voisinage de $t=0$: $\frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{sin(t)-t}{t^2} = \frac{(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3))-t}{t^2} = \frac{-t}{6} + o(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
$t \mapsto \frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et on en déduit que I_2 est convergente.

• $t \mapsto \frac{sin^3(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc I_3 pose problème en 0 et en $+\infty$.
En 0 :
$\frac{sin^3(t)}{t^2} \sim \frac{t^3}{t^2} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $t \mapsto \frac{sin^3(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int\limits_0^1 \frac{sin^3(t)}{t^2}dt$ est convergente.
En $+\infty$:
Pour $t \geq 1$: $0 \leq \left|\frac{sin^3(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par comparaison, $t \mapsto \frac{sin^3(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc $\int\limits_1^{+\infty} \frac{sin^3(t)}{t^2}dt$ est convergente.
$\int\limits_0^1 \frac{sin^3(t)}{t^2}dt$ et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{sin^3(t)}{t^2}dt$ sont convergentes et donc I_3 est convergente.

• Bilan : $\boxed{I_1 \text{ est divergente, } I_2 \text{ et } I_3 \text{ sont convergentes.}}$

b) Pour $x>0$: $\int\limits_x^{3x} \frac{1}{t}dt = [ln(t)]_x^{3x} = ln(3x) - ln(x) = ln(3)$
Donc : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ \int\limits_x^{3x} \frac{1}{t}dt = ln(3)}$

c) Pour $x>0$:
$\int\limits_x^{3x} \frac{sin(t)}{t^2}dt$
$= \int\limits_x^{3x} [\frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}]dt + \int\limits_x^{3x} \frac{1}{t}dt$
$= \int\limits_x^{3x} [\frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}]dt + ln(3)$ on utilise la relation de Chasles
$= \int\limits_x^{1} [\frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}]dt - \int\limits_{3x}^{1} [\frac{sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}]dt + ln(3)$

En utilisant la convergence de I_2 on a alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \int\limits_x^{3x} \frac{sin(t)}{t^2}dt = I_2 - I_2 + ln(3) = ln(3)$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \int\limits_x^{3x} \frac{sin(t)}{t^2}dt = ln(3)}$

d) $sin^3(t)$
$= \left(\frac{e^{it}-e^{-t}}{2i}\right)^3$ par la formule du binôme
$= \frac{1}{-8i}(e^{3it} - 3e^{-it} + 3e^{it} - e^{-3it})$
$= \frac{-1}{4}[\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} - 3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}]$
$= \frac{3sin(t)-sin(3t)}{4}$

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \ , \ sin^3(t) = \frac{3sin(t)-sin(3t)}{4}}$

e) Soit $\epsilon > 0$ et $A > 0$. Alors avec le d) :
$f(\epsilon, A) = \int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{sin^3(t)}{t^2} dt = \int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{3sin(t)-sin(3t)}{4t^2} dt = \int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{3sin(t)}{4t^2} dt - \int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{sin(3t)}{4t^2} dt$
On effectue le changement de variable $u = 3t$ dans la deuxième intégrale :
$f(\epsilon, A) = \int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{3sin(t)}{4t^2} dt - \int\limits_{3\epsilon}^{3A} \frac{sin(u)}{4\frac{u^2}{9}} \frac{du}{3} = \frac{3}{4}\left(\int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{sin(t)}{t^2} dt - \int\limits_{3\epsilon}^{3A} \frac{sin(u)}{u^2} du \right)$
On repose $t = u$ dans la deuxième intégrale et par relation de Chasles, avec $\begin{array}{cccc} \varphi & : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{sin(t)}{t^2} \end{array}$:
$f(\epsilon, A) = \frac{3}{4}\left(\int\limits_{\epsilon}^{1} \varphi + \int\limits_{1}^{A} \varphi - \int\limits_{3\epsilon}^{1} \varphi - \int\limits_{1}^{3A} \varphi \right) = \frac{3}{4}\left(\int\limits_{\epsilon}^{3\epsilon} \varphi - \int\limits_{A}^{3A} \varphi \right)$
$\left| \int\limits_{A}^{3A} \varphi \right| \leq \int\limits_{A}^{3A} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A} - \frac{1}{3A} = \frac{2}{3A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
Comme, par convergence de I_3 : $I_3 = \lim\limits_{\substack{A \to +\infty \\ \epsilon \to 0}} f(\epsilon, A)$, on a, en utilisant la limite ci-dessus et le b) :

$\boxed{I_3 = ln(3)}$

EXERCICE 2

1) Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
$x \in Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = (u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})(y)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = u^2(y) + y$ on compose par u
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ u(x) = u^3(y) + u(y)$ on utilise $u^3 = -u$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ u(x) = -u(y) + u(y)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\Rightarrow x \in ker(u)$

Donc $x \in Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \Rightarrow x \in ker(u)$ et donc $\boxed{Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \subset ker(u)}$

2) • $x \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \cap ker(u) \Rightarrow \begin{cases} u^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$
Donc $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3} \cap ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc la somme $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) + ker(u)$ est directe.
• Avec le 1) on a $dim(Ker(u)) \geq dim(Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}))$ donc
$dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) \geq dim(Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = 3$ (par le théorème du rang) On a donc $dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) \geq 3$ et on en déduit
$dim(Ker(u) + ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = 3$ puisque la somme est directe.

Au bilan : $\boxed{\mathbb{R}^3 = Ker(u)) \oplus ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})}$

3)a) $u^3 = -u$ donc $det(u)^3 = det(-u)$. On est en dimension 3, donc $det(u)^3 = (-1)^3 det(u)$ et donc $det(u^3) = -det(u)$
Ce qui donne $det(u) = 0$ ou $det(u^2) + 1 = 0$, mais la dernière égalité est impossible car $det(u) \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{det(u) = 0}$

3)b) Comme $det(u) = 0$ alors u n'est pas bijective, donc n'est pas injective donc $\boxed{ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

4) Comme u n'est pas nul alors $ker(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
Soit donc $e_2 \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$ un vecteur non nul.
D'après b), on peut choisir $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tel que $e_1 \in ker(u)$
On pose $e_3 = u(e_2)$

Montrons que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
On remarque que $(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})(e_3) = u^2(e_3) + e_3 = \underbrace{u^3}_{u^3=-u}(e_2) + u(e_2) = -u(e_2) + u(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$
donc $e_3 \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$
On a donc $\underbrace{ae_1}_{\in ker(u)} = \underbrace{-be_2 - ce_3}_{\in ker(u^2+Id_{\mathbb{R}^3})}$, donc, avec la somme directe du 2) : $\begin{cases} ae_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$
Comme $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on en déduit déjà $a = 0$
En composant par u : $be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow bu(e_2) + cu(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ mais $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in ker(U^2 + Id_E)$ et donc $\begin{cases} be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ -ce_2 + be_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$
On fait $bL_1 - cL_2$ et on obtient : $(b^2 + c^2)e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, comme $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $b^2 + c^2 = 0$ et comme b et c sont réels alors $b = c = 0$
Finalement $a = b = c = 0$ et donc B est libre. Comme $card(B) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors B est une base de $\mathbb{R}^3$

On a $u(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = -e_2$ donc :

$$\boxed{\text{la matrice de } u \text{ relativement à } B \text{ s'écrit : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problème : Nilpotence

1°) a) $tr(A) = -1+1+0 = 0$, $det(A) = 0+0+3-1-2-0 = 0$ (Sarrus), $det(A) = 0$ donc $rg(A) < 3$, comme les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires alors $rg(A) \geq 2$. Finalement $rg(A) = 2$.

Bilan : $\boxed{tr(A) = 0,\ det(A) = 0 \text{ et } rg(A) = 2}$

1°) b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = O$ donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

2°) $inf(\{k \in \mathbb{N}^*\ ,\ M^k = O\})$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (puisque M est nilpotente) et minorée donc : $\boxed{p \text{ est bien défini.}}$

$\boxed{\text{La matrice } A \text{ du 1°) a pour indice de nilpotence 3.}}$

3°) a) $M \in \mathscr{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*\ M^k = O \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*\ ,\ (M^k)^T = O \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*\ ,\ (M^T)^k = O \Rightarrow M^T \in \mathscr{N}$

On a donc $\boxed{M \in \mathscr{N} \Rightarrow M^T \in \mathscr{N}}$

3°) b) Puisque N semblable à M alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PMP^{-1}$
On sait alors que : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ N^k = PM^kP^{-1}$.
Si de plus M est nilpotente alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = O$ et on a alors $N^p = O$ et donc $N \in \mathscr{N}$

$\boxed{\text{Si } N \text{ est semblable à } M \in \mathscr{N} \text{ alors } N \in \mathscr{N}}$

4°) $M, N \in \mathscr{N} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*\ ,\ N^p = O\ ,\ M^q = O$
Si de plus $MN = NM$ alors $(MN)^p = M^pN^p = O$ car $N^p = O$ et donc $MN \in \mathscr{N}$
On a aussi, si $MN = NM$, par la formule du binôme :
$(M+N)^{2p+2q} = \sum\limits_{k=0}^{2p+2q} \binom{n}{k} M^k N^{2p+2q-k}$
Si $k \geq p$ alors $M^k = M^pM^{k-p} = O$ et si $k < p$ alors $2p+2q-k \geq p+2q \geq q$ et alors $N^{2p+2q-k} = O$
On a donc $(M+N)^{2p+2q} = O$ et donc $M+N \in \mathscr{N}$

$$\boxed{\begin{cases} M, N \in \mathscr{N} \\ MN = NM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \in \mathscr{N} \\ M+N \in \mathscr{N} \end{cases}}$$

5°) $MN \in \mathscr{N}$
$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*\ ,\ (MN)^p = O \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*\ ,\ N(MN)^pM = O \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*\ ,\ (NM)^{p+1} = O \Rightarrow NM \in \mathscr{N}$

On a donc : $\boxed{MN \in \mathscr{N} \Rightarrow NM \in \mathscr{N}}$

6°) a) Par l'absudre. Si $\forall x \in \mathbb{R}^n\ ,\ f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $f^{p-1} = 0_{L(E)}$, ce qui contredit le fait que p soit l'indice de nilpotence de f. On a donc : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}^n\ ,\ f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}}$

6°) b) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$
On peut alors poser $i = Min(\{k \in [\![0; p-1]\!]\ ,\ a_k \neq 0\})$ et on a $\sum\limits_{k=i}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

En composant par f^{p-1-i} on a : $\sum\limits_{k=i}^{p-1} a_k f^{k+p-i}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Et comme pour $k > i$ on a $f^{k+p-i} = 0_{L(E)}$ alors il reste $a_i f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow a_i = 0$ puisque $f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui contredit la définition de i. Absurde.

On a donc $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) = (0, 0, \ldots, 0)$ et on a montrer que $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n}$

6°) c) Une famille libre de E possède au plus n éléments, donc avec la famille du b) on a : $\boxed{p \leq n}$

7°) On a déjà l'implication évidente $M^n = O \Rightarrow M \in \mathscr{N}$ (par définition de nilpotente)
Réciproquement : $M \in \mathscr{N} \Rightarrow M^p$ avec p l'indice de nilpotence de M.
Comme $\forall k \geq p$ on a $M^k = M^p M^{k-p} = O$, en particulier pour $k = n \geq p$ (par le 6°)c)), on a $M^n = O$

Bilan : $\boxed{\text{Pour } M \in E \text{ on a : } M \in \mathscr{N} \Leftrightarrow M^n = O}$

8°) On utilise l'analogie avec le DL : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
Soit $M \in \mathscr{N}$. On note p l'indice de nilpotence de M.
Posons $L = \sum\limits_{k=0}^{p-1} M^k$, alors $L(I_n - M) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} M^k - \sum\limits_{k=0}^{p-1} M^{k+1} = I_n - M^p$ par téléscopage. Mais comme $M^p = O$ alors $L(I_n - M) = I_n$ et donc $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = L$.

Bilan : $\boxed{\text{Si } M \in \mathscr{N} \text{ alors } I_n - M \text{ est inversible et } (I_n - M)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} M^k}$

9°) Soit $M \in \mathscr{N}$ d'indice de nilpotence n.
On utilise le 6°) avec $p = n$ et les mêmes notations. La famille $B = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, f(x), x)$ étant une famille libre de $\mathbb{R}^n$ avec n, c'est une base.
La matrice de f dans cette base est celle voulue et elle est semblable à M puisque qu'elles représentent le même endomorphisme.

On a donc : $\boxed{\text{Si } M \in \mathscr{N} \text{ d'indice de nilpotence } n \text{ alors } M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

10°) a) On a $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour calculer $det(S)$ on commence par faire $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ et on a :

$$det(S) = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ n-1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On factorise la première colonne par $n-1$ et on la retranche à toute les autres. On obtient :

$$det(S) = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Comme on a le déterminant d'une matrice triangulaire, on peut conclure : $\boxed{det(S) = (-1)^{n-1}(n-1)}$

Comme $n \geq 2$ alors $det(S) \neq 0$ et donc $\boxed{S \text{ est inversible.}}$

10°) b) On remarque que $N \in \mathscr{N} \Rightarrow N^p = O \Rightarrow det(N)^p = 0 \Rightarrow det(N) = 0 \Rightarrow N$ non inversible. Alors : $K \in \mathscr{N}$ et $K^T \in \mathscr{N}$ et $S = K + K^T \notin \mathscr{N}$ puisque S est inversible.

$\mathscr{N}$ n'est pas stable par combinaison linéaire donc $\boxed{\mathscr{N} \text{ n'est pas un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel.}}$

10°) c) Après calculs, on remarque que : $S^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-2 \\ n-2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

Donc $S^2 = (n-1)I_n + (n-2)S$, on a bien $\boxed{S^2 \in Vect(I_n, S)}$

De plus $S(S-(n-2)I_n) = (n-1)I_n \Rightarrow S(\frac{S-(n-2)I_n}{n-1}) = I_n$ donc $\boxed{S^{-1} = \frac{S-(n-2)I_n}{n-1}}$

BONUS : début de Centrale mathématiques 2, 2019

Q1) Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice 1 alors, par définition : $u^1 = 0_{L(E)}$

$\boxed{\text{Le seul endomorphisme nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.}}$

Q2) Par l'absurde. Si $\forall x \in E \ , \ u^{p-1}(x) = 0_E$ alors $u^{p-1} = 0_{L(E)}$ et donc u est nilpotent d'indice au plus $p-1$ ce qui contredit la définition de p.

On a donc : $\boxed{\exists x \in E \ , \ u^{p-1}(x) \neq 0_E}$

Q3) Raisonnons une nouvelle fois par l'absurde.

Si $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est liée alors $\exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que

$(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x) = 0_E$

Comme $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ alors on peut poser $p_0 = \inf(\{k \in [\![0; p-1]\!] \ , \ a_k \neq 0\})$

On a alors : $\sum\limits_{k=p_0}^{p-1} a_k u^k(x) = 0_E$.

On compose alors par u^{p-1-p_0} (on a bien $p-1-p_0 \geq 0$) et on obtient :

$\sum\limits_{k=p_0}^{p-1} a_k u^{k+p-1-p_0}(x) = 0_E$ mais pour $k > p_0$ on a $k+p-1-p_0 \geq p$ et donc $u^{k+p-1-p_0}(x) = 0_E$

Il reste alors : $a_{p_0} u^{p-1}(x) = 0_E$ et donc $a_{p_0} = 0$ puisque $u^{p-1}(x) \neq 0_E$

Mais ceci contredit la définition de p_0 !! Absurde.

On a donc $\boxed{\text{la famille } (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \text{ est libre.}}$

Comme en dimension 2 une famille libre possède au plus 2 vecteurs on a alors $p-1+1 \leq 2 \Rightarrow p \leq 2$
Or on sait que $p \geq 2$ donc forcément $\boxed{p=2}$

Q4) Comme $p=2$ on a $u^2=0$ Soit $y \in E$.
$y \in Im(u) \Rightarrow \exists x \in E\ ,\ u(x)=y \Rightarrow \exists x \in E\ ,\ u^2(x)=u(y) \Rightarrow \exists x \in E\ ,\ u(y)=0_E \Rightarrow y \in ker(u)$ puisque $u^2=0$

On a donc $Im(u) \subset ker(u)$

D'autre part, $u \neq 0$ donc $rg(u) \geq 1$ et $u^2=0 \Rightarrow det(u^2)=0 \Rightarrow det(u)=0 \Rightarrow rg(u)<2$
Donc forcément $rg(u)=1$ et alors : $dim(Im(u))=1$
Par le théorème du rang appliqué à u on a : $dim(ker(u))+dim(Im(u))=2$ et donc $dim(ker(u))=1$

Puisque $Im(u) \subset ker(u)$ et $dim(ker(u))=dim(Im(u))=1$ alors $\boxed{Ker(u)=Im(u)}$

Q5) En choisissant le x des questions Q2) et Q3) on a : $B=(x,u(x))$ qui est une famille libre de cardinal 2 d'un espace vectoriel de dimension 2 et donc B est une base de E.
Comme $u(x)=u(x)$ et $u(u(x))=u^2(x)=0_E$ alors $\boxed{\text{la matrice de } u \text{ relativement à } B \text{ vaut } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2}$

Q6) • Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence p. On sait que $p=1$ ou $p=2$ par $Q3$)

Cas 1 : $p=1$: Alors d'après Q1) $A=0$ et donc $tr(A)=det(A)=0$

Cas 2 : $p=2$: Alors d'après Q5) A est semblable à J_2 et donc $tr(A)=det(A)=0$

• Réciproquement, soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ de trace et de déterminant nulle.
Alors $tr(A)=0 \Rightarrow a+d=0 \Rightarrow d=-a$ et donc $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$
Après calculs : $A^2=\begin{pmatrix} -det(A) & 0 \\ 0 & -det(A) \end{pmatrix}$ et donc comme $det(A)=0$ alors $A^2=0$ et donc A est nilpotente.

Remarque : on verra plus tard le théorème de Hamilton-Cayley qui affirme que si $A \in M_2(\mathbb{C})$ alors $X^2-tr(A)X+det(A)$ est un polynôme annulateur de A. Donc, ici $A^2=0$ et donc A est forcément nilpotente.

• Bilan :
$\boxed{\text{Les matrices nilpotentes de } M_2(\mathbb{C}) \text{ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$

Q7) u est nilpotent d'indice 2, donc $u^2=0$ et on montre que $Im(u) \subset Ker(u)$ comme en Q4).
En passant à la dimension on a : $dim(Im(u)) \leq dim(ker(u))$
En ajoutant $dim(Im(u))$ on a : $2dim(Im(u)) \leq dim(ker(u))+dim(ker(u))$
Par le théorème du rang on a $dim(ker(u))+dim(ker(u))=n$ donc $2dim(Im(u)) \leq n$ et donc $2r \leq n$

On a bien : $\boxed{Im(u) \subset Ker(u) \text{ et } 2r \leq n}$

Q8) Si on suppose de plus $Im(u)=Ker(u)$ et donc $dim(Im(u))=dim(Ker(u))$ alors par le théorème du rang $dim(ker(u))+dim(ker(u))=n \Rightarrow 2dim(Im(u))=n \Rightarrow 2r=n$

Soit $(e'_1,\dots,e'_r)$ une base de $Im(f)$ (qui est de dimension r)
Comme $\forall i \in [\![1;r]\!]\ ,\ e'_1 \in Im(f)$ alors on il existe $e_i \in E$ tel que $e'_i=u(e_i)$.

Considérons donc $B = (e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_r, e'_r) = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$
Montrons que B est libre.
Soit $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r)$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{r}(a_i e_i + b_i u(e_i)) = 0_E$
On compose par u et on a, par linéarité de u et puisque $u^2 = 0$: $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i u(e_i) = 0_E$
Mais comme $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $Im(u)$ alors $\forall i \in [\![1;r]\!]\ ,\ a_i = 0$
Il reste alors $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i u(e_i) = 0_E$ et pour la même raison $\forall i \in [\![1;r]\!]\ ,\ b_i = 0$
Finalement la famille B est libre, comme elle est de cardinal $2r = n$ c'est une base de E.

On a donc $\boxed{\text{il existe des vecteurs } e_1, \dots, e_r \text{ de } E \text{ tels que } (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$

Q9) On a $u(e_i) = u(e_i)$ et $u(u(e_i)) = u^2(e_i) = 0_E$, donc la matrice de u dans cette base est de la forme : $\boxed{diag(J_2, \dots, J_2)}$

Q10) On a toujours $Im(u) \subset Ker(u)$ puisque $u^2 = 0$ mais cette fois-ci, l'inclusion est stricte car $Im(u) \neq Ker(u)$
On a donc $2r < n$

Soit $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de$Im(f)$ (qui est de dimension r) que l'on complète en $(e'_1, \dots, e'_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$ une base de $Ker(u)$. (on a le bon nombre de vecteur car $dim(ker(u)) = n - rg(u) = n - r$)
Comme $\forall i \in [\![1;r]\!]\ ,\ e'_1 \in Im(f)$ alors on il existe $e_i \in E$ tel que $e'_i = u(e_i)$.

Considérons $B = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_{n-2r})$.

Soit $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_{n-2r})$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{r}(a_i e_i + b_i u(e_i)) + \sum\limits_{j=1}^{n-2r} c_j v_j = 0_E$
On compose par u et on a, par linéarité de u et puisque $u^2 = 0$: $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i u(e_i) = 0_E$
Mais comme $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $Im(u)$ alors $\forall i \in [\![1;r]\!]\ ,\ a_i = 0$
Il reste alors $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i u(e_i) + \sum\limits_{j=1}^{n-2r} c_j v_j = 0_E$ et comme $(e'_1, \dots, e'_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de $Ker(u)$ alors $\forall i \in [\![1;r]\!]\ ,\ b_i = 0$ et $\forall j \in [\![1;n-2r]\!]\ ,\ c_j = 0$
Finalement la famille B est libre, comme elle est de cardinal $2r + n - 2r = n$ c'est une base de E.

On a donc :
$\boxed{\text{il existe des vecteurs } e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-2r} \text{ de } E \text{ tels que } (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}) \text{ est une b}}$

Q11) Comme $u(v_j) = 0_E$ on a comme en Q9) : la matrice de u dans cette base est de la forme : $\boxed{diag(J_2, \dots, J_2, 0, \dots, 0)}$