Feuille d'exercices n°31 : Chapitre 12

Exercice 254. $\star$

Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} exp(\frac{-1}{t}) \ si\ t > 0 \\ 0 \ si\ t \leq 0 \end{cases} \end{array}$

1°) Montrer que f *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et que* $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists P_n \in \mathbb{R}(X)\ \forall t > 0\ ,\ f^{(n)}(t) = P_n(t)exp(\frac{-1}{t})$

2°) Montrer que f *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et que :* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f^{(n)}(0) = 0$

3°) f *est-elle développable en série entière en 0 ?*

Exercice 255. *On considère l'équation différentielle suivante :*
$(E) \Leftrightarrow 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) = 0$
Trouver les solutions de (E) *développable en série entière.*

Exercice 256. *On considère la fonction* F *définie sur* $I =]-1;1[$ *par la relation :*
$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-xcos^2(t)}dt$
1°) Soit $x \in]-1;1[$ *et* $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$.
Montrer que pour tout entier $N \geq 1$*, on a :*

$$\frac{1}{1-xcos^2(t)} = \sum_{n=0}^{N-1}(xcos^2(t))^n + x^N\frac{cos^{2N}(t)}{1-xcos^2(t)}$$

2°) En déduire que pour tout réel $x \in]-1;1[\ \ F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ *avec* W_n *une intégrale que l'on explicitera.*
3°) Etablir que pour tout réel $x \in]-1;1[\ \ F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$ *(changement de variable* $u = tan(t)$*)*
4°) Déterminer la valeur de W_n

Exercice 257. *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *on pose :* $f(x) = exp(\frac{-x^2}{2})\int\limits_0^x exp(\frac{t^2}{2})dt$
a) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f.
b) Montrer que f *est développable en série entière en 0 et déterminer son développement.*

Exercice 258. *Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :*

$$(E) \Leftrightarrow (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

Exercice 259. *Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :*

$$(E) \Leftrightarrow 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$$

Exercice 260. *Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :*

$$(E) \Leftrightarrow x(x^2+1)y''(x) + 2(x^2+1)y'(x) - 2xy(x) = 0$$