Feuille d'exercices n°30 : Chapitre 12

Exercice 252. *a) Déterminer le développement en série entière en 0 de* $a(x) = arctan(x)$
b) Déterminer le développement en série entière en 0 de $b(x) = exp(-x^2)$
c) Déterminer le développement en série entière en 0 de $c(x) = \int_0^{x^2} exp(-t^2)dt$
d) Déterminer le développement en série entière en 0 de $d(x) = \frac{x^3+2}{x^2+x-2}$
e) Déterminer le développement en série entière en 0 de $e(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
f) Déterminer le développement en série entière en 0 de $f(x) = (1+x)ln(1-x)$
g) Déterminer le développement en série entière en 0 de $g(x) = sin(x)cos(2x)$
h) Déterminer le développement en série entière en 0 de $h(x) = exp(\sqrt{3}x)sin(x)$
i) Déterminer le développement en série entière en 0 de $i(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$
j) Déterminer le développement en série entière en 0 de $j(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
k) Déterminer le développement en série entière en 0 de $k(x) = arcsin(x)$
l) Déterminer le développement en série entière en 0 de $l(x) = ln(1+x-2x^2)$

Exercice 253. *On considère dans cet exercice l'équation différentielle* (E) *suivante :* $x^2y''-x(2x^2-1)y'-(2x^2+1)y = 0$

1°) Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{1}{x}$
Calculer f' *et* f'' *puis vérifier que la fonction* f *est une solution de l'équation différentielle* (E) *sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *et sur l'intervalle* $]-\infty;0[$
2°) On cherche désormais des solutions de (E) *qui soient développables en série entière. Pour cela, on considère* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière, de rayon de convergence* R *supposé strictement positif.*
Pour $x \in]-R;R[$*, on écrit :* $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
et on suppose que la fonction y *est solution de* (E) *sur* $]-R;R[$.
a) Exprimer, pour $x \in]-R;R[$, $y'(x)$ *et* $y''(x)$ *à l'aide d'une série.*
b) Démontrer que $a_0 = 0$ *et que pour tout entier* n *supérieur ou égal à 2, on a :* $a_n = \frac{2}{n+1}a_{n-2}$
c) Calculer a_2*. Plus généralement, que vaut* a_n *si* n *est un entier pair ?*
d) Si n *est impair, on écrit* $n = 2p+1$ *où* p *désigne un entier naturel.*
Pour tout entier p *supérieur ou égal à 1, exprimer* a_{2p+1} *en fonction de* a_{2p-1}
Montrer que pour tout entier naturel p *:* $a_{2p+1} = \frac{a_1}{(p+1)!}$
3°) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$
4°) Donner, sans démonstration, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto exp(x)$ *et* $x \mapsto exp(x^2)$*, ainsi que leurs rayons de convergence.*
5°) On note, pour tout x *réel,* $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$
Que vaut $g(0)$ *?*
Exprimer pour tout réel x *non nul* $g(x)$ *en fonction de* $exp(x^2)$ *et de* x.
6°) Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0;+\infty[$ *de l'équation différentielle* (E)*, puis exprimer les solutions de* (E) *sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *à l'aide des fonctions* f *et* g.
7°) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle (E) *sur l'intervalle* $\mathbb{R}$ *?*