Feuille d'exercices n°29 : Chapitre 12

Exercice 245. *Déterminer le rayon de convergence et calculer sur son intervalle de convergence la série suivante :* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2cos(\frac{2n\pi}{3})x^n$

Exercice 246. *(⋆)*
Calculer $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

Exercice 247. ⋆⋆
a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 x^n ln(x)dx$
b) Montrer que : $\int_0^1 ln(x)ln(1-x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$

Exercice 248. *Soit* $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ *la suite de nombres réels définie par* $a_0 = a_1 = 1$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:* $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$
a) Etablir que pour tout entier $n \geq 1$ *:* $1 \leq a_n \leq n^2$
b) Déterminer le rayon de convergence R *de la série entière* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
c) Montrer que S *est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on notera* (E).
d) Résoudre (E) *sur* $]-R; R[$
e) Déterminer S.

Exercice 249. *On pose* $f(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ 1 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
a) Montrer que : $\forall x \neq 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$
b) Vérifier que l'expression du a) est valable en $x = 0$
c) Montrer que f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 250. *On pose* $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ \lambda \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Quelle valeur donner à λ *pour que* f *soit de classe* C^∞ *sur* $]-1; +\infty[$ *?*

Exercice 251. *On pose* $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \\ \lambda \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Quelle valeur donner à λ *pour que* f *soit de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *?*