Feuille d'exercices n°28 : Chapitre 12

Exercice 237. $\star$
Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$
Montrer que : $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ *est de rayon de convergence* $+\infty$

Exercice 238. $\star$
Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$ *Soit* $\alpha > 0$
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^\alpha z^n$

Exercice 239. *On pose* $I =]-1;1[$.
a) Calculer $\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$
b) Calculer $\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$
c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
d) Résoudre $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n)x^n = -4$

Exercice 240. *On considère la série entière* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$
a) Déterminer le rayon de convergence R *de* S.
b) Calculer $S'(x)$ *et* $S''(x)$ *sous forme de série sur* $]-R;R[$.
c) Calculer $S(x)$ *sur* $]-R;R[$ *à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 241. *Soit la série entière* $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$
a) Déterminer le rayon de convergence de T.
b) Calculer $T(x)$ *à l'aide des fonctions usuelles sur son intervalle ouvert de convergence.*

Exercice 242. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer les sommes sur les intervalles ouverts de convergence.*

$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^2(-1)^n x^n \quad B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$

$C(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+3n+2} x^n \quad D(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{3^n} x^{2n+1}$

Exercice 243. *($\star$)*
a) Déterminer le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$
b) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b+cx}{1-x+x^2}$
c) Calculer S *sur son intervalle ouvert de convergence.*

Exercice 244. *On considère la série entière* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ *avec* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
a) Déterminer le rayon de convergence de S.
b) Calculer S *sur son intervalle ouvert de convergence.*