Feuille d'exercices n°27 : Chapitre 12

Exercice 229. *On considère la série entière suivante* $\sum \frac{z^{n^2+3n+7}}{1+sin(n)+n^2}$ *de rayon de convergence* R
Déterminer D *l'ensemble des* $z \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sum \frac{z^{n^2+3n+7}}{1+sin(n)+n^2}$ *est convergente.*

Exercice 230. *On considère la série entière* $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\sqrt{n}}$
a) Etudier la convergence de $S(-1)$
b) Etudier la convergence de $S(1)$
c) Déterminer le rayon de convergence de S.

Exercice 231. *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum \frac{exp(-n)x^{3n+2}}{(1+n^2)2^n}$ *en utilisant la règle de D'Alembert pour les séries.*

Exercice 232. *On considère la série entière suivante* $\sum u_n z^{n^2}$ *avec* $u_n = \frac{12+sin(exp(n))}{3+sin^2(ln(n+1))}$
En étudiant le caractère bornée de la suite $(u_n z^{n^2})$, *déterminer le rayon de convergence de cette série entière.*

Exercice 233. *Soit* (a_n) *une suite convergente de limite non nulle.*
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

Exercice 234. *On considère la série entière* $\sum u_n z^n$ *avec* $u_n = (1+\frac{1}{n})^n - e$, *et on note* R *son rayon de convergence.*
a) Donner un développement asymptotique de u_n
b) Déterminer R.

Exercice 235. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

$A(z) = \sum \frac{1+n+n^2}{n^3+1} z^n$ $\qquad$ $B(z) = \sum \frac{\sqrt{n+1}}{ln(n)+1+sin(n)} z^n$
$C(z) = \sum \frac{z^{2n}}{2^n}$ $\qquad$ $D(z) = \sum z^{n^{36}+n^5+2}$
$E(z) = \sum exp(-\sqrt{n}) z^n$ $\qquad$ $F(z) = \sum \frac{3^n}{n^3} z^n$
$G(z) = \sum \frac{2^n+n}{3^n+n^2} z^{2n}$ $\qquad$ $H(z) = \sum (\sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt{n^2+2n+1}) z^n$
$I(z) = \sum \frac{n!+n^2}{n!+n^n} z^n$ $\qquad$ $J(z) = \sum ln(n)^{ln(n)} z^n$
$K(z) = \sum \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n$ $\qquad$ $L(z) = \sum \frac{(-1)^n ln(n)}{n^2} z^{2n+1}$
$M(z) = \sum \frac{cos^2(n)}{n} z^n$ $\qquad$ $N(z) = \sum \frac{(2n)!}{n^n} z^n$
$O(z) = \sum \frac{2+sin(n+1)}{1+\sqrt{n}} z^n$ $\qquad$ $P(z) = \sum \frac{n!+sin(n!)}{(-1)^n+n^2} z^n$

Exercice 236. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* a_n *la n-ième décimale de* $\sqrt{2}$.
On note R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$
a) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
b) Montrer que la suite (a_n) *n'est pas de limite nulle.*
c) Majorer la suite (a_n)
d) Déterminer R.