

Énoncés

Autres écoles

Algèbre

658. RMS 2025 1500 CCINP PSI solution p. 415

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X - b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b))$ où $b \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que b est racine de $\Phi(P)$. Déterminer sa multiplicité si $\Phi(P)$ est non nul.
- (b) Déterminer le noyau de Φ .
- (c) Déterminer l'image de Φ .

659. RMS 2025 1501 IMT PSI solution p. 415

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

- (a) On suppose que A et B sont dans F et non nulles. Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
- (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (c) En déduire que $\dim(F) \leq 1$ et préciser la nature de F .

660. RMS 2025 1502 CCINP PSI solution p. 416

- (a) Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^n = 0$.

- (b) Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^p = 0$.
- (c) Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k k^p = 0$. Conclure.

661. RMS 2025 1503 Navale PSI solution p. 416

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

662. RMS 2025 1504 IMT PSI solution p. 417

Soient E un espace vectoriel et \mathcal{A} une partie de $\mathcal{L}(E)$ finie, non vide et telle que : $\forall u \in \mathcal{A}, u \circ u \in \mathcal{A}$. **Faux tel quel, prendre**
 $\forall (u, v) \in \mathcal{A}^2, u \circ v \in \mathcal{A}$

- (a) Soit $u \in \mathcal{A}$. Montrer qu'il existe n et p dans \mathbb{N}^* tels que $u^{n+p} = u^n$.
- (b) Soit $m \geq n$. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$: $u^{m+kp} = u^m$.
- (c) Montrer que \mathcal{A} contient un projecteur.

663. RMS 2025 1505 IMT PSI solution p. 417

Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

664. RMS 2025 1506 ENSEA PSI solution p. 418

Soit $M = \begin{pmatrix} & & 1 \\ (0) & \vdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

665. RMS 2025 1507 CCINP PSI solution p. 418

Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P + (X - a)P' - P(a)$.

- (a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- (b) Déterminer les éléments propres de f .

666. RMS 2025 1508 IMT PSI solution p. 418

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Trouver un polynôme annulateur de M de degré 3 .
- (b) La matrice M est-elle inversible ? diagonalisable ?
- (c) Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

667. RMS 2025 1509 CCINP PSI solution p. 419

Soient $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $A^3 + 9A = 0$.

- (a) Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.
- (b) La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
- (c) La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?

668. RMS 2025 1510 CCINP PSI solution p. 419

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

- (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
- (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(A)$.

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \Phi(M) = AMA$.

- (d) Déterminer les valeurs propres de Φ .

- (e) L'application Φ est-elle diagonalisable ?
- (f) Quelle est l'image de Φ ?

669. RMS 2025 1511 CCINP PSI solution p. 420

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}$.

- (a) La matrice M_α est-elle diagonalisable ?
- (b) Déterminer le rang de M_α .
- (c) Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- (d) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M_{-1}$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$.
- (e) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$. Montrer que $B\Delta = \Delta B$.
- (f) En déduire les solutions $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $B^2 = \Delta$.
- (g) En déduire les solutions $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $A^2 = M_{-1}$.

670. RMS 2025 1512 CCINP PSI solution p. 421

Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division de X^2P par $X^4 - 1$.

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme.
- (b) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, matrice que l'on notera A .
- (c) Montrer que φ est diagonalisable. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres.
- (d) La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, préciser son inverse.

671. RMS 2025 1513 CCINP PSI solution p. 421

Soit n un entier impair ≥ 3 . On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit $\Phi : E \rightarrow E$ par $\forall P \in E, \Phi(P) = P(1 - X) + P(0)X^n$.

- (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E et déterminer la matrice A de Φ dans la base canonique.
- (b) Montrer que $\Phi^2(1) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$.
- (c) Expliciter A^2 . Vérifier que A^2 est triangulaire.
- (d) En déduire le noyau et l'image de Φ .
- (e) Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$.
- (f) Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A^2)$, alors l'une au moins des deux racines carrées de λ est valeur propre de A .
- (g) Déterminer le spectre de Φ .
- (h) En déduire que Φ est diagonalisable.

672. RMS 2025 1514 CCINP PSI solution p. 422

- (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que A soit diagonalisable dans \mathbb{R} .

- (b) On considère des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ et la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \alpha_i$ si $j = 2p + 1 - i$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
- Écrire la matrice A .
 - Notons (e_1, \dots, e_{2p}) la base canonique de \mathbb{R}^{2p} et $E_i = \text{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que les E_i sont stables par f .
 - Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $f|_{E_i}$ est diagonalisable.
 - En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2p})$ pour que A soit diagonalisable.

673. RMS 2025 1515 CCINP PSI solution p. 423

On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même polynôme caractéristique χ .

- On suppose que χ possède n racines distinctes dans \mathbb{R} . Montrer que A et B sont semblables.
- Trouver deux matrices ayant le même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

674. RMS 2025 1516 CCINP PSI solution p. 423

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$.

- Montrer que, si U et V sont deux matrices semblables et si R est un polynôme, alors $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.
- Soit P un polynôme. Exprimer $P(M)$ à l'aide de $P(A)$, $P'(A)$ et B .
- On suppose A diagonalisable et $B = 0$. Montrer que M est diagonalisable.
- Réciproque ?

675. RMS 2025 1517 CCINP PSI solution p. 424

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel. On suppose que u admet un polynôme annulateur P non nul dont 0 est racine simple. On rappelle que u est nilpotent s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$.

- Donner une caractérisation de « 0 est racine simple de P » à l'aide des coefficients de P .
- Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.
- On suppose u nilpotent. Montrer que u est nul.

676. RMS 2025 1518 CCINP PSI solution p. 425

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- Expliciter M^k pour $k \in \mathbb{N}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de A , $P'(A)$ et $P(A)$.
- Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.
- Étudier la réciproque si A est inversible.
- Montrer que, si A n'est pas inversible et si M est diagonalisable, alors $A = 0$.

677. RMS 2025 1519 IMT PSI solution p. 425

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On suppose A diagonalisable. Diagonaliser la matrice B .

678. RMS 2025 1520 CCINP PSI solution p. 426

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AU = UB$.

(a) Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule A , alors les valeurs propres de A sont racines de P .

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.

(c) Montrer que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$. On pourra raisonner par l'absurde.

679. RMS 2025 1521 CCINP PSI solution p. 426

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, où $n \geq 1$.

(a) Si u est diagonalisable, montrer que u^2 l'est également.

(b) Montrer que la réciproque est fautive à l'aide d'un contre-exemple.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{Id}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \lambda \text{Id})$.

(d) On suppose u bijectif. Montrer que, sous cette hypothèse, la réciproque de la première question est vraie.

680. RMS 2025 1522 CCINP PSI solution p. 426

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs telle que :

$$\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1.$$

(a) Montrer que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)$.

(b) En déduire que la famille $(u_1 + e_1, \dots, u_n + e_n)$ est une base de E .

681. RMS 2025 1523 CCINP PSI solution p. 427

Pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle A, B \rangle = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$.

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\langle X^k, 1 \rangle$.

On note $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ le projeté orthogonal de 1 sur $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$.

Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2) \cdots (X+k)$.

(b) En déterminant $\langle 1 - Q, X^i \rangle$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(i) = 0$.

(c) En déduire l'expression de P .

(d) Montrer que $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{n+1}$.

682. RMS 2025 1524 CCINP PSI solution p. 428

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- (b) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
- (c) Déterminer $d(1, E)$.

683. RMS 2025 1525 CCINP PSI solution p. 428

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on note $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

- (a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
- (c) Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^3 - at - b)^2 dt$.
- (d) Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_N[X], \int_0^{+\infty} t e^{-t} P(t) dt = 0 \right\}$. Montrer que H est un espace vectoriel et déterminer la distance de $X + 1$ à H .

684. RMS 2025 1526 CCINP PSI solution p. 429

Soient E en espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal.

- (a) Montrer que $\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2$.
- (b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg}(p)$.

685. RMS 2025 1527 CCINP PSI solution p. 430

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que A soit la matrice d'une rotation vectorielle.

686. RMS 2025 1528 IMT PSI solution p. 430

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\det(M) = 0$ et que $M^T = M^2$.

- (a) Montrer que $M^4 = M$.
- (b) Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.
- (c) On suppose que $b = 0$. Que peut-on dire de M ?
- (d) Montrer que $M^2 = M$.

687. RMS 2025 1529 IMT PSI solution p. 431

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Justifier l'existence d'un vecteur propre pour A .
- (b) Soit X un tel vecteur, on pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^T \\ XX^T & A \end{pmatrix}$ et $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a le vecteur Y_a est-il propre pour B ?
- (c) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

(d) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ trouver un polynôme annulateur de B de degré trois.

688. RMS 2025 1530 IMT PSI solution p. [432](#)
Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = XX^T$.

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (b) Déterminer le rang de A . Quel est le spectre de A ?
- (c) Déterminer le polynôme caractéristique de A .

689. RMS 2025 1531 CCINP PSI solution p. [432](#)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^3 = I_n, M \neq I_n$ et $MM^T = M^T M$.

- (a) Montrer que $M^T M$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- (b) Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- (c) On prend $n = 3$. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

690. RMS 2025 1532 CCINP PSI solution p. [433](#)

- (a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- (b) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r, \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i\right)^2 \leq r \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$.
- (c) Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\text{tr}(B))^2 \leq \text{rg}(B) \text{tr}(B^2)$.

Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $b_{i,i} = 1$ pour tout i et $|b_{i,j}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.

- (d) Exprimer $\text{tr}(B^2)$ et montrer que $\text{tr}(B^2) \leq 2n$.
- (e) Montrer que $\text{rg}(B) \geq n/2$.

691. RMS 2025 1533 CCINP PSI solution p. [433](#)
On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

- (a) Montrer que M est inversible.
- (b) Montrer que M est symétrique.
- (c) Montrer que $M = I_n$.

692. RMS 2025 1534 CCINP PSI solution p. [434](#)
Soit $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$. Soit \mathcal{F} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$.

- (a) Montrer que toute matrice de \mathcal{N} est trigonalisable. Que peut-on dire d'une matrice de \mathcal{N} diagonalisable ?
- (b) Déterminer $\mathcal{F} \cap S_n(\mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $\dim \mathcal{F} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Analyse

693. RMS 2025 1535 CCINP PSI solution p. 434

- (a) Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.
- (b) On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

694. RMS 2025 1536 CCINP PSI solution p. 434

- (a) Rappeler le théorème spécial des séries alternées.
- (b) Étudier la nature de la série $\sum \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

695. RMS 2025 1537 CCINP PSI solution p. 435

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

- (a) Déterminer $\lim u_n$.
- (b) En déduire $\lim nu_n$.
- (c) Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

696. RMS 2025 1538 CCINP PSI solution p. 435

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- (a) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- (b) Étudier la nature de $\sum u_n^3$.
- (c) Étudier la nature de $\sum u_n^2$.

697. RMS 2025 1539 CCINP PSI solution p. 435

Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

- (a) Montrer que $R_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (b) Montrer que $R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
- (c) Nature de la série $\sum \frac{R_n(\alpha)}{S_n(\alpha)}$?

698. RMS 2025 1540 CCINP PSI solution p. 436

- (a) Citer le théorème spécial des séries alternées.
- (b) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. La convergence est-elle absolue ?
- (c) En déduire la nature de la série $\sum (-1)^n \int_0^1 e^{-n^2 t^2} dt$.

699. RMS 2025 1541 IMT PSI solution p. 436

On cherche les applications f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} vérifiant : (*) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$.

- (a) Soit f vérifiant (*).
- En considérant des valeurs particulières de n , montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x + 1)$.
 - Montrer que $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t) dt$ est constante, puis que f' est constante.
- (b) Donner toutes les solutions du problème posé.

700. RMS 2025 1542 CCINP PSI solution p. 437

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

- Montrer que $\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$.
- Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t e^{it}}{1 + \cos^2(t)} dt$.

701. RMS 2025 1543 IMT PSI solution p. 438

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ et $\phi(f)(0) = f(0)$.

- Montrer que ϕ est un endomorphisme.
- Montrer que ϕ est injectif.
- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ .

702. RMS 2025 1544 IMT PSI solution p. 438

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right)$. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) .

703. RMS 2025 1545 CCINP PSI solution p. 438

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sin\left(n x e^{-n x^2}\right)$.

- Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
- Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur tout intervalle $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1]$.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1/n)$. En déduire que la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

704. RMS 2025 1546 CCINP PSI solution p. 438

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{n x^2}{1+n x}$ si $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{n x^3}{1+n x^2}$ si $x < 0$.

- Étudier la convergence simple de (f_n) .
- Étudier la convergence uniforme de (f_n) .

705. RMS 2025 1547 IMT PSI solution p. 439

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{e^{-n x}}{n}$.

706. RMS 2025 1548 CCINP PSI solution p. 439

Soit $f : t \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{1+t^n}$.

- Déterminer le domaine de définition réel de f .

- (b) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ?
- (c) Déterminer un équivalent de $f(t)$ lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures.

707. RMS 2025 1549 IMT, CCINP PSI solution p. 439

Pour $x > 0$ et $n \geq 2$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

- (a) Déterminer le domaine D de convergence de $\sum u_n$.
- (b) Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D .
- (c) Montrer que, pour $x \geq 1$ et $n \geq 2$, le reste d'ordre n de la série vérifie : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
- (d) Étudier la continuité de $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ sur D .
- (e) Montrer que S est intégrable sur D .

708. RMS 2025 1550 CCINP PSI solution p. 440

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de S en fonction de a . On suppose pour toute la suite que $|a| < 1$.
- (b) Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- (c) Exprimer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ pour $x > 0$,
- (d) Trouver un équivalent de S en 0 .
- (e) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
- (f) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

709. RMS 2025 1551 CCINP PSI solution p. 441

Domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^x}$?

710. RMS 2025 1552 IMT PSI solution p. 441

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

- (a) Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- (b) Étudier la continuité de $S = \sum_{n \geq 1} f_n$.
- (c) Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 .

711. RMS 2025 1553 CCINP PSI solution p. 442

On considère $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

- (a)
 - i. Vérifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .
 - ii. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
 - iii. Que dire de la parité de f ?

(b) On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et donner sa valeur.

(c) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

(d) i. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

ii. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

(e) Que dire alors de l'allure de la courbe représentative de f ?

712. RMS 2025 1554 CCINP PSI solution p. 443

Soit (u_n) la suite de fonctions définie par $\forall x \in [0, 1], u_0(x) = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^3) dt$.

(a) Montrer que, pour tout n, u_n est de classe \mathcal{C}^∞ .

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1], 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

(c) Montrer que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $[0, 1]$.

(d) Montrer que (u_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f non nulle, de classe \mathcal{C}^∞ et solution de $\forall x \in [0, 1], f'(x) = f(x - x^3)$.

713. RMS 2025 1555 IMT PSI solution p. 444

Déterminer l'intervalle de convergence et la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$.

714. RMS 2025 1556 CCINP PSI solution p. 444

Soit $F : x \mapsto - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition de F .

(b) Montrer que $\forall x \in]0, 1], F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

715. RMS 2025 1557 CCINP PSI solution p. 445

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$.

(a) Montrer que $I_{k,n}$ est définie.

(b) Calculer $I_{k,n}$.

(c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

(d) Nature de $\sum a_n e^n$.

(e) Nature de $\sum a_n (-e)^n$.

(f) En déduire le domaine de définition de $\sum a_n x^n$.

716. RMS 2025 1558 CCINP PSI solution p. 446

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 e^{-1/t} t^n dt$.

(a) Montrer que I_n est bien définie. Quel est son signe ?

(b) Déterminer les variations de (I_n) .

- (c) Montrer la convergence et donner la limite de (I_n) .
- (d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$
- (e) Trouver un équivalent de I_n
- (f) Nature de $\sum I_n$ et de $\sum (-1)^n I_n$?
- (g) Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.
- (h) Soit $x \in]-1, 1[$. On pose $g_n(t) = e^{-1/t} t^n x^n$ si $t \neq 0$ et $g_n(0) = 0$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
- (i) Écrire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ sous la forme d'une intégrale.

717. RMS 2025 1559 CCINP PSI solution p. 446

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n$.

- (a) Déterminer les rayons de convergence de f et g .
- (b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
- (c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
- (d) Montrer que f est continue sur $] - 1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 .
- (e) Trouver un équivalent de g , puis de f , en 1^- .

718. RMS 2025 1560 IMT PSI solution p. 447

On note $f : x \mapsto e^{e^x - 1}$.

- (a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 .
- (b) Que vaut $f^{(n)}(0)$ pour $n = 0, 1, 2$?
- (c) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$. Calculer u_1 et u_2 . Montrer pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq n!$.
- (d) Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est non nul.
- (e) Justifier la dérivabilité de g sur $] - R, R[$ et montrer : $\forall x \in] - R, R[, g'(x) = e^x g(x)$.
- (f) En déduire : $\forall x \in] - R, R[, g(x) = f(x)$.

719. RMS 2025 1561 IMT PSI solution p. 448

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

- (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
- (b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} . Donner la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Trouver des réels a, b et c tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

720. RMS 2025 1562 CCINP PSI solution p. 449

- (a) Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $x \mapsto \sum \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\alpha_n = \int_0^1 (1-t)t^{3n} dt$.

(c) Calculer $\alpha_0 + \dots + \alpha_{N-1}$ de deux manières différentes. En déduire que $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2} dt$.

(d) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$.

(e) Calculer $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$.

721. RMS 2025 1563 CCINP PSI solution p. 449

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

(a) Montrer que (I_n) est bien définie.

(b) Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

(c) Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

(d) On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

722. RMS 2025 1564 CCINP PSI solution p. 450

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right)$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

(a) Citer le théorème de convergence dominée.

(b) Justifier la définition de I_n .

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

723. RMS 2025 1565 IMT PSI solution p. 450

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)^n} dt$.

(a) Montrer que (a_n) est bien définie.

(b) Étudier la limite de (a_n) .

(c) Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(d) Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

724. RMS 2025 1566 CCINP PSI solution p. 451

Pour tous p et n dans \mathbb{N}^* , on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p (\ln x)^n dx$.

(a) Montrer que les $I_{n,p}$ sont bien définies.

(b) Déterminer une relation entre $I_{n-1,p}$ et $I_{n,p}$.

(c) Soit $f : x \in]0, 1] \mapsto \frac{1}{x^x}$. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

(d) Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

725. RMS 2025 1567 CCINP PSI solution p. 452

On pose $I_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer l'existence de $I_{n,k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, et la calculer .
- (b) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
- (c) Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{e^n}$ et de $\sum \frac{a_n}{(-e)^n}$.
- (d) Démontrer que, pour $|x| < R$, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

726. RMS 2025 1568 CCINP PSI solution p. 452

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Étudier la dérivabilité de f et exprimer f' . Ind. Pour $x \neq \pm 1$, trouver des réels a_x et b_x tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a_x}{1+t^2} + \frac{b_x}{1+x^2t^2}$.
- (c) Donner une expression simple de f .
- (d) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2} dt$.

727. RMS 2025 1569 ENSEA PSI solution p. 453

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

- (a) Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$, mais pas sur $[0, +\infty[$.
- (b) Montrer que F est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$.
- (c) Montrer que F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par F .

728. RMS 2025 1570 IMT PSI solution p. 454

Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$.

- (a) Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- (c) Exprimer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

729. RMS 2025 1571 CCINP PSI solution p. 455

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt) dt$.

- (a) Montrer que g est définie sur \mathbb{R}_+^* .
- (b) Montrer que g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et déterminer g' .

(c) En déduire g .

730. RMS 2025 1572 IMT PSI solution p. 456

On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt$.

(a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

(b) Calculer $f'(x)$.

731. RMS 2025 1573 CCINP PSI solution p. 457

On considère $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\text{sh}(t)}{t} dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition D_g de g .

(b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur D_g et calculer $g'(x)$.

(c) Déterminer $(g(n))_{n \geq 2}$.

(d) Déterminer une expression simplifiée de g .

732. RMS 2025 1574 CCINP PSI solution p. 458

Soit $\alpha > 0$. Soit $f_\alpha : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha t \cos^n t$.

(a) Donner l'intervalle de définition de f_α .

(b) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donner une expression simple de $f_\alpha(t)$.

(c) Pour quelles valeurs de α , l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(t) dt$ converge-t-elle ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t dt$.

(d) Pour quelles valeurs de α , la série $\sum u_n(\alpha)$ converge-t-elle ?

(e) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

733. RMS 2025 1575 CCINP PSI solution p. 458

On considère l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' + ty' + y = \frac{1}{t} + t$ sur \mathbb{R}_+^* .

(a) Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.

(b) On pose $g : x \mapsto f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si g est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

734. RMS 2025 1576 IMT PSI solution p. 459

Résoudre le système $\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$.

735. RMS 2025 1577 CCINP PSI solution p. 459

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et (S) le système différentiel $X' = AX$.

- (a) Montrer que A est diagonalisable.
- (b) Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
- (c) On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. Déterminer alors les solutions de (S) .
- (d) Soit (S') le système différentiel $X'' = AX$. Déterminer les solutions réelles de (S') .
- (e) Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de (S') . Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

736. RMS 2025 1578 CCINP PSI solution p. 460

Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on note $f(x, y) = x^2y + y \ln^2(y)$.

- (a) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f .
- (b) Nature globale de ce(s) point(s) critique(s).

Probabilités

737. RMS 2025 1579 Navale PSI solution p. 460

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

- (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une distribution de probabilités sur \mathbb{N}^* .
- (b) Déterminer la fonction génératrice de X .
- (c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

738. RMS 2025 1580 IMT PSI solution p. 460

Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$. On dispose $N = an$ boules dans n urnes, indépendamment les unes des autres. Soit T_i la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est vide, égale à 0 sinon. Soient Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = \frac{Y_n}{n}$.

- (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_i .
- (b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

739. RMS 2025 1581 CCINP PSI solution p. 461

Une urne contient $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n . On effectue une suite de tirages avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au rang du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule différente de celle obtenue au premier tirage.

- (a) Déterminer la loi de X_n . Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
- (b) Vérifier que X_n est d'espérance finie, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et commenter le résultat obtenu.

On note Y_n la variable aléatoire égale au plus petit rang du tirage pour lequel toutes les boules ont été tirées au moins une fois.

- (c) Déterminer la loi de Y_2 . Déterminer $\mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = j)$.
- (d) Déterminer la loi de Y_3 .

740. RMS 2025 1582 CCINP PSI solution p. 462

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant N boules, dont r blanches et $N - r$ noires. On effectue des tirages successifs et sans remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches.

- (a) Déterminer la loi de X et son espérance pour $r = 1$ et $r = N$.

- (b) Dans cette question, $1 < r < N$.
- Quelles sont les valeurs possibles de X ?
 - Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N-1}{r}}$.
- (c) Donner une relation entre $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$, puis montrer que $\mathbb{E}(X) = r \frac{N+1}{r+1}$.
Ind. On pourra raisonner par récurrence sur N .

741. RMS 2025 1583 CCINP PSI solution p. 463

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que X suive la loi de Poisson de paramètre λ et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est une loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

- Déterminer la loi de (X, Y) .
- Déterminer la loi de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- Exprimer la loi de $Z = X - Y$.

742. RMS 2025 1584 CCINP PSI solution p. 464

Soient $p \in]0, 1[$, (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 tel que $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n$ si $k \leq n$, et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ sinon.

- Déterminer la loi de Y .
- Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0. Justifier que $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
- Déterminer la loi de X .

743. RMS 2025 1585 CCINP PSI solution p. 464

On note, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \alpha \lambda^n$ la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants, où $0 < \lambda < 1$ et $(1 + \alpha)\lambda < 1$. La probabilité d'avoir un garçon est $q = 1 - p$, où $p \in]0, 1[$ est la probabilité d'avoir une fille.

- Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.
- Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
- Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons.
- Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins deux garçons, sachant qu'elle en a au moins un.

744. RMS 2025 1586 CCINP PSI solution p. 465

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, toutes les deux de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

- Rappeler la loi de X , son espérance et sa variance.
- On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
- Même question avec $U + V$ et $U - V$.

745. RMS 2025 1587 CCINP PSI solution p. 466

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance et de variance finies. On suppose que $X + Y + 1 \sim \mathcal{G}(p)$, où $0 < p < 1$.

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de X .
- (b) Déterminer la fonction génératrice de X .
- (c) En déduire la loi de X .

746. RMS 2025 1588 CCINP PSI solution p. 466

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X_k \sim \mathcal{B}(p_k)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} = p \in [0, 1]$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Déterminer l'espérance de $\frac{S_n}{n}$.
- (b) Déterminer la limite éventuelle de $(\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}))_{n \geq 1}$.
- (c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0$.
- (d) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = 0$.

747. RMS 2025 1589 CCINP PSI solution p. 466

- (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que M soit diagonalisable sur \mathbb{R} .

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre p_1 et p_2 respectivement.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(Y > n)$.
- (c) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
- (d) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Corrigés

Autres écoles

Algèbre

658. RMS 2025 1500 CCINP PSI énoncé p. 107

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X - b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b))$ où $b \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que b est racine de $\Phi(P)$. Déterminer sa multiplicité si $\Phi(P)$ est non nul.
- (b) Déterminer le noyau de Φ .
- (c) Déterminer l'image de Φ .

SOLUTION. — \approx RMS 2024 1549, RMS 2023 1348

(a) $\Phi(P) = (X - b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b))$ donc $\Phi(P)(b) = 0$
 puis $\Phi(P)' = (X - b)P'' - (P' - P'(b))$ s'annule en b puis $\Phi(P)'' = (X - b)P'''$ donc si $\Phi(P)$ est non nul alors la multiplicité de b dans $\Phi(P)$ vaut 3+la multiplicité de b dans P'''

(b) $P \in \text{Ker}(\Phi) \iff \Phi(P) = 0 \implies_{(*)} \Phi(P)'' = (X - b)P''' = 0 \iff P''' = 0 \iff P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Réciproque de l'implication $(*)$: si $\Phi(P)'' = 0$ alors $\Phi(P)$ est de degré ≤ 1 avec b racine de multiplicité au moins 2 donc $\Phi(P) = 0$

On a alors $\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

(c) Vu la question 1, $\text{Im}(\Phi) \subset (X - b)^3\mathbb{R}[X]$

On pose pour $n \geq 3$: $\Phi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X - b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b))$ alors $\text{Im}(\Phi_n) \subset (X - b)^3\mathbb{R}_{n-3}[X]$ de noyau $\mathbb{R}_2[X]$ donc par la formule du rang $\dim \text{Im}(\Phi_n) = (n+1) - 3 = n - 2 = \dim(\mathbb{R}_{n-3}[X]) = \dim((X - b)^3\mathbb{R}_{n-3}[X])$ donc Φ_n est surjective.

Donc tout élément de $(X - b)^3\mathbb{R}[X]$ est dans un $(X - b)^3\mathbb{R}_n[X]$ donc admet un antécédent dans $\mathbb{R}_n[X]$ par Φ_n qui est un antécédent dans $\mathbb{R}[X]$ par Φ .

L'image de Φ est $(X - b)^3\mathbb{R}_{n-3}[X]$.

659. RMS 2025 1501 IMT PSI énoncé p. 107

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

- (a) On suppose que A et B sont dans F et non nulles. Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
- (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (c) En déduire que $\dim(F) \leq 1$ et préciser la nature de F .

SOLUTION. —

(a) $\Delta_n(x) = \det(xA - B)$ est le déterminant de la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}x - b_{i,j}$. Montrons par récurrence sur n que c'est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ de coefficient de degré n égal à $\det(A)$ (on en déduira que c'est un polynôme de degré exactement n parce que A est dans F , non nulle donc inversible donc $\det(A) \neq 0$).

- $n = 1$: immédiat
- HR au rang $n - 1$
- rang n : par développement selon la ligne 1, $\Delta_n(x) = \det(xA - B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (a_{1,j}x - b_{1,j}) \det(A_{1,j})$
on applique l'HR à $A_{1,j}$ qui a la même forme donc $\det(A_{1,j})$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de coefficient de degré $n - 1$ égal à $\det(A_{1,j})$
par somme de polynômes de degré $1 + \deg(A_{1,j})$, le degré de $\Delta_n(x)$ est inférieur ou égal à n et le coefficient de degré n est $\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}) = \det(A) \neq 0$ (par développement selon la ligne 1 de $\det(A)$).

(b) tout polynôme de degré $n \neq 0$ a au moins une racine complexe α d'où l'existence.

(c) Si $\dim(F) \geq 2$ on prend deux matrices A et B de F linéairement indépendantes et on trouve par (b) une matrice $C = \alpha A + B \in F$ non inversible et non nulle (si elle était nulle A et B ne seraient pas libres) ce qui contredit que toute matrice non nulle de F est inversible.

Donc $\dim(F) \leq 1$ donc $F = \{0\}$ ou $F = \text{Vect}(M)$ est une droite vectorielle engendrée par une matrice M inversible.

660. RMS 2025 1502 CCINP PSI énoncé p. 107

(a) Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^n = 0$.

(b) Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^p = 0$.

(c) Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k k^p = 0$. Conclure.

SOLUTION. —RMS 2020 1187

(a) Vandermonde : pour $V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, on a $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

(b) Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^n = 0$.

Pour $p \in \{0, \dots, n\}$, on dérive $n - p$ fois : $\sum_{k=0}^n (n(n-1) \dots (p+1)) \alpha_k (X + k)^p = 0$ et on obtient le résultat en divisant par $n(n-1) \dots (p+1)$.

(c) On évalue (b) en 0 pour chaque p , ce qui s'écrit matriciellement $VX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0^n & 1^n & 2^n & \dots & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$ mais

V est inversible (voir déterminant de la question (a) en ajoutant une ligne et en transposant) donc $X = 0$ donc les α_i sont tous nuls.

661. RMS 2025 1503 Navale PSI énoncé p. 107

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

SOLUTION. —RMS 2015 875

- ⇒
- soit $x \in \text{Ker}(u)$ alors $u(x) = 0$ donc $w(x) = v \circ u(x) = 0$ mais w bijective donc $u = 0 : u$ est injective.
 - soit $z \in G$, comme w est bijective, il existe $x \in E$ tel que $z = w(x) = v \circ u(x) \in \text{Im}(v) : v$ est surjective.
 - Soit $y \in \text{Ker } v \cap \text{Im } u$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis $v(y) = w(x) = 0$ mais w bijective donc $x = 0$ donc $y = u(x) = 0 : la somme est directe.$
 - Soit $y \in F$. Après une petite analyse au brouillon ... : $v(y) \in G$ mais g est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $v(y) = w(x) = v \circ u(x)$. On écrit $y = (y - u(x)) + u(x) \in \text{Ker}(v) + \text{Im}(u)$ (l'autre inclusion est immédiate) : la somme $\text{Ker } v + \text{Im } u$ vaut F .
- ⇐
- linéarité par composition
 - $x \in \text{Ker}(w) \iff v \circ u(x) = 0$ on décompose $y = u(x) \in F$ en $y = u(x) = y_K + y_I$ où $(y_K, y_I) \in \text{Ker } v \times \text{Im } u$. $v \circ u(x) = 0 \Rightarrow v(y_K + y_I) = 0 \Rightarrow v(y_I) = 0$ donc $y_I \in \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$. Puis $u(x) = y_K \in \text{Im}(u)$ donc $y_K \in \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$. Donc $x = 0 : w$ est injective.
 - Soit $z \in G$, comme v est surjective, il existe $y \in F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$ tel que $z = v(y)$, on écrit $y = y_K + y_I$ où $(y_K, y_I) \in \text{Ker } v \times \text{Im } u$. Puis $y_I \in \text{Im } u$ peut s'écrire $y_I = u(x)$. Alors $z = v(y) = v(y_K + y_I) = v \circ u(x) = w(x) : w$ est surjective.

662. RMS 2025 1504 IMT PSI énoncé p. 107

Soient E un espace vectoriel et \mathcal{A} une partie de $\mathcal{L}(E)$ finie, non vide et telle que : $\forall u \in \mathcal{A}, u \circ u \in \mathcal{A}$. **Faux tel quel, prendre $\forall (u, v) \in \mathcal{A}^2 u \circ v \in \mathcal{A}$**

- (a) Soit $u \in \mathcal{A}$. Montrer qu'il existe n et p dans \mathbb{N}^* tels que $u^{n+p} = u^n$.
- (b) Soit $m \geq n$. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N} : u^{m+kp} = u^m$.
- (c) Montrer que \mathcal{A} contient un projecteur.

SOLUTION. — Je pense qu'il faut rectifier l'énoncé en disant $\forall (u, v) \in \mathcal{A}^2, u \circ v \in \mathcal{A}$. On s'en sort à la question (a) en choisissant k sous forme de puissances de 2 ce qui ne change pas grand chose au raisonnement, mais je suis plus embêtée pour la question (c) où je ne vois pas comment faire pour que mes puissances soient des puissances de 2. Je confirme : prendre u une rotation d'angle $2\pi/3$. Alors $\mathcal{A} := \{u, u^2\}$ est stable par passage au carré mais ne contient pas de projecteur. CC

- (a) $\{u^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ donc est fini donc il existe $i < j$ tels que $u^i = u^j$ donc en composant par $u : u^{i+1} = u^{j+1}$ (pour ne pas avoir de puissances nulles), puis on appelle $n = i + 1$ et $p = j - i$ qui sont bien dans \mathbb{N}^* et vérifient $u^{n+p} = u^n$.
- (b) Soit $m \geq n$. En composant encore par u^{m-n} on a $u^{m+p} = u^m$. Puis on montre par récurrence sur $k : u^{m+kp} = u^m$
 - $k = 0$ évident, $k = 1$ on vient de le dire
 - hérédité : si la propriété est vraie au rang $k : u^{m+kp} = u^m$, on compose par $u^p : u^{m+(k+1)p} = u^{m+p} = u^m$ (d'après le rang $k = 1$)
- (c) On a montré que pour tout $m \geq n$ et $k \in \mathbb{N}$ on a $u^{m+kp} = u^m$
on l'écrit pour $k = n$ et $m = np \geq n$ ce qui donne $u^{np+np} = u^{np} : u^{np}$ est un projecteur et un élément de \mathcal{A} (on montre par récurrence immédiate que les puissances de u sont dans \mathcal{A}). Donc \mathcal{A} contient un projecteur.

663. RMS 2025 1505 IMT PSI énoncé p. 108

Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

SOLUTION. — RMS 2020 1197

On observe que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a+b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(a+b)$ est valeur propre et $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset E_{a+b}(A) : (a+b)$ est au moins de multiplicité 2.

On observe que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $(a-b)$ est valeur propre et $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset E_{a-b}(A) : (a-b)$ est au moins de multiplicité 1.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A , donc A est diagonalisable.

664. RMS 2025 1506 ENSEA PSI énoncé p. 108

Soit $M = \begin{pmatrix} & 1 \\ (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

SOLUTION. — RMS 2019 1221 RMS2009 357 X ESPCI PC RMS2013 971 TPE EIVP PSI RMS2020 1301 CCINP PC

On va supposer que $n \geq 1$, je ne vois pas l'avantage d'avoir une matrice d'ordre impair.

M symétrique réelle donc diagonalisable.

M de rang 2, donc 0 est valeur propre et l'espace propre est de dimension $2n - 1$, égale à la multiplicité de la valeur propre 2.

Donc $\chi_M = X^{2n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$.

La trace de A est la somme des valeurs propres donc $\lambda + \mu = 1$

A est diagonalisable donc semblable à $D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda, \mu)$ donc A^2 est semblable à $D^2 = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda^2, \mu^2)$. La trace de A^2 (matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ composée de 1 sauf en position $(2n+1, 2n+1)$ où il y a $2n+1$) vaut donc $\lambda^2 + \mu^2 = 4n+1$

On résout $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 4n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2n = 0 \end{cases}$ les solutions sont $\lambda = \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}$ et $\mu = \frac{1-\sqrt{1+8n}}{2}$

SEP : on trouve assez facilement que $E_0(M) = \text{Vect}(X_1 - X_i)_{2 \leq i \leq 2n}$ (les X_i étant les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$).

Puis on trouve que $E_\lambda(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ (et pareil pour $E_\mu(M)$).

665. RMS 2025 1507 CCINP PSI énoncé p. 108

Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P + (X - a)P' - P(a)$.

- (a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- (b) Déterminer les éléments propres de f .

SOLUTION. — RMS 2024 1549

- (a) On remarque déjà que les polynômes constants sont dans $\text{Ker } f$.
Soit $P \in \text{Ker } f$ avec $\deg P = p \geq 1 : P = \alpha X^p + \dots$ avec $\alpha \neq 0$ et $p \geq 1$. En examinant les termes de degré p , on obtient $(p+1)\alpha = 0$ ce qui n'est pas possible.
On en déduit que $\text{Ker } f = \mathbb{R}_0[X]$.
- (b) Par le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = n$. Or $f(P)(a) = 0$ donc $(X - a) | f(P)$ donc $\text{Im } f \subset (X - a)\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et avec l'égalité des dimensions, $\text{Im } f = (X - a)\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- (c) 0 est déjà vp et $\text{Ker } f = \mathbb{R}_0[X]$.
Si $k \geq 1$, $f(X^k) = (k+1)X^k + \dots$ donc les $(k+1)_{1 \leq k \leq n}$ sont vp simples. f admet $n+1$ vp 2 à 2 distinctes donc est diagonalisable et les sep sont des droites.
Pour $k \geq 1$, $f((X - a)^k) = (k+1)(X - a)^k$ donc $\text{Ker}(f - (k+1)\text{id}) = \text{Vect}((X - a)^k)$.

666. RMS 2025 1508 IMT PSI énoncé p. 108

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Trouver un polynôme annulateur de M de degré 3.
- (b) La matrice M est-elle inversible? diagonalisable?
- (c) Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

SOLUTION. —

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} -a^2 - b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2 - c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a(a^2 + b^2 + c^2) & b(a^2 + b^2 + c^2) \\ -a(a^2 + b^2 + c^2) & 0 & c(a^2 + b^2 + c^2) \\ -b(a^2 + b^2 + c^2) & -c(a^2 + b^2 + c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2) M$$

Un polynôme annulateur est $P = X^3 + (a^2 + b^2 + c^2)X = X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2))$

- (b) • $M^T = -M$ donc $\det(M^T) = \det(-M) = -\det(M)$ donc $\det(M) = 0$: M n'est pas inversible
 • Les valeurs propres de M sont racines de P donc $\text{Sp}(M) \subset \{0, \pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}$
 Si M diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$, elle a pour matrice semblable la matrice nulle car 0 est la seule valeur propre réelle possible, donc M est la matrice nulle.
 Dans $M_3(\mathbb{C})$, si M est nulle elle est diagonalisable et si M est non nulle elle annule le polynôme P scindé à racines simples donc M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.
- (c) $M^4 = -(a^2 + b^2 + c^2)M^2$ alors $Q = X^2 + (a^2 + b^2 + c^2)X = X(X + (a^2 + b^2 + c^2))$ est un polynôme annulateur de M^2 donc les valeurs propres de M^2 sont racines de Q donc 0 ou $-(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$.

667. RMS 2025 1509 CCINP PSI énoncé p. 108

Soient $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $A^3 + 9A = 0$.

- (a) Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.
 (b) La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
 (c) La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?

SOLUTION. — RMS 2024 1557

- (a) $P = X^3 + 9X = X(X - 3i)(X + 3i)$ est un polynôme annulateur de A donc $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0, 3i, -3i\}$.
 (b) Il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples donc A est diagonalisable sur \mathbb{C} .
 (c) Si A est diagonalisable sur \mathbb{R} elle est semblable à la matrice nulle car 0 est la seule valeur propre réelle, donc A est nulle, ce qui est exclu ici, donc A non diagonalisable sur \mathbb{R} .

668. RMS 2025 1510 CCINP PSI énoncé p. 108

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

- (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
 (b) La matrice A est-elle diagonalisable?
 (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(A)$.

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \Phi(M) = AMA$.

- (d) Déterminer les valeurs propres de Φ .
 (e) L'application Φ est-elle diagonalisable?
 (f) Quelle est l'image de Φ ?

SOLUTION. — \approx RMS 2022 1136

- (a) i. On observe que A est de rang 1 (car elle est non nulle et ses colonnes sont 2 à 2 proportionnelles), donc 0 est valeur propre de multiplicité ≥ 2 , et $\chi_A = X^2(X - \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.
De plus la somme des valeurs propres de A est égale à la trace de A , donc $0 + 0 + \lambda = \text{tr}(A) = 1 + j + j^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi $\chi_A = X^3$ et 0 est l'unique valeur propre de A .

Rq. On peut aussi calculer directement χ_A , mais c'est un peu plus fastidieux.

- ii. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle (matrice diagonale de coefficients diagonaux les valeurs propres de A), donc égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable.
- (b) i. L'image de Φ est le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par les neuf images $\Phi(E_{1,1}), \Phi(E_{1,2}), \Phi(E_{1,3}), \dots, \Phi(E_{3,3})$ des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Or on vérifie par le calcul que ces neuf images sont toutes multiples de A : on trouve $\Phi(E_{1,1}) = A$, $\Phi(E_{1,2}) = j^2 A$ et $\Phi(E_{1,3}) = jA$, les six autres cas étant des multiples de ces trois premiers cas (par exemple $AE_{2,1} = j^2 AE_{1,1}$, donc $\Phi(E_{2,1}) = j^2 \Phi(E_{1,1})$).

Donc $\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(A)$.

ii. *Méthode 1.*

On note que pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\Phi^2(M) = \Phi(AMA) = A^2MA^2$ et $\Phi^3(M) = \Phi(A^2MA^2) = A^3MA^3 = 0$ puisque $A^3 = 0$ (par Cayley-Hamilton). Donc $\Phi^3 = 0$ (endomorphisme nul), de sorte que la seule valeur propre possible de Φ est 0.

Et vu le point précédent, 0 est bien valeur propre de Φ (puisque $\text{Ker}(\Phi)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, puisque Φ est de rang 1, donc de noyau de dimension 8 par théorème du rang). Donc $\text{Sp}(\Phi) = \{0\}$.

Méthode 2.

Par le point précédent, 0 est valeur propre de Φ (de multiplicité $\geq \dim(\text{Ker}(\Phi)) = 8$).

De plus, si M est un vecteur propre de Φ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors $M \in \text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(A)$ (car $\Phi(M) = \lambda M$ donne $M = \Phi(\frac{1}{\lambda}M)$ si $\lambda \neq 0$), donc M est multiple de A . Or $\Phi(A) = A^3 = 0$ (par Cayley-Hamilton), donc $\Phi(M) = 0$, ce qui contredit $\Phi(M) = \lambda M \neq 0$.

Ainsi Φ n'a pas de valeur propre non nulle, et donc $\text{Sp}(\Phi) = \{0\}$.

669. RMS 2025 1511 CCINP PSI énoncé p. 109

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}$.

- (a) La matrice M_α est-elle diagonalisable ?
(b) Déterminer le rang de M_α .

(c) Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M_{-1}$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$.

(e) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$. Montrer que $B\Delta = \Delta B$.

(f) En déduire les solutions $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $B^2 = \Delta$.

(g) En déduire les solutions $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $A^2 = M_{-1}$.

SOLUTION. —

(a) $\chi_{M_\alpha} = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ -\alpha & 2\alpha & X-(\alpha+1) \end{vmatrix} = (X-1)(X-4)(X-(\alpha+1))$ par calculs par blocs.

- si $\alpha \notin \{0, 3\}$: alors χ_{M_α} est scindé à racines simples donc M_α est diagonalisable
- si $\alpha = 0$: $\chi_{M_\alpha} = (X-1)^2(X-4)$
 - la valeur propre 4 est simple donc $\dim(E_4(M_0)) = m_4$

- la valeur propre 1 est double et $\dim(E_1(M_0)) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = m_1 : M_0$ est diagonalisable
 - si $\alpha = 3 : \chi_{M_3} = (X - 1)(X - 4)^2$
 - la valeur propre 1 est simple donc $\dim(E_1(M_3)) = m_1$
 - la valeur propre 4 est double et $\dim(E_4(M_3)) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq m_1 : M_3$ n'est pas diagonalisable
- (b) les deux premières lignes (ou colonnes) sont libres. Si $\alpha = -1$, $\operatorname{rg}(M_\alpha) = 2$ et sinon $\operatorname{rg}(M_\alpha) = 3$.
- (c) Vu la question 1, M_{-1} est diagonalisable de valeurs propres 1, 4 et 0 donc il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- (d) $A^2 = M_{-1} \iff P^{-1}A^2P = P^{-1}M_{-1}P \iff (P^{-1}AP)^2 = \Delta \iff B^2 = \Delta$ en posant $P^{-1}AP = B \iff A = PBP^{-1}$.
- (e) Si $B^2 = \Delta$ alors $B\Delta = B^3 = \Delta B$.
- (f) En résolvant $B\Delta = \Delta B$ on trouve que B est diagonale puis $B^2 = \Delta$ donne $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$.
- (g) Les matrices qui vérifient $A^2 = M_{-1}$ sont, selon la question 4, les 4 matrices $A = PBP^{-1}$ avec B l'une des 4 matrices de la question 6.

670. RMS 2025 1512 CCINP PSI énoncé p. 109

Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division de X^2P par $X^4 - 1$.

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme.
- (b) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, matrice que l'on notera A .
- (c) Montrer que φ est diagonalisable. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres.
- (d) La matrice A est-elle inversible? Le cas échéant, préciser son inverse.

SOLUTION. — RMS 2025 1278 Centrale PSI, RMS 2016 908 CCEM PSI

L'application va de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ (par théorème de la division euclidienne).

Si A et B sont dans $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et si $C = A + \lambda B$ alors, le théorème de la division euclidienne donne l'existence et l'unicité d'un couple (Q_A, R_A) avec $\deg(R_A) \leq 3$ (resp (Q_B, R_B) avec $\deg(R_B) \leq 3$ et (Q_C, R_C) avec $\deg(R_C) \leq 3$) tel que $X^2A = (X^4 - 1)Q_A + R_A$ (resp $X^2B = (X^4 - 1)Q_B + R_B$ et $X^2C = (X^4 - 1)Q_C + R_C$).

Or $X^2C = X^2A + \lambda X^2B = (X^4 - 1)Q_A + R_A + \lambda((X^4 - 1)Q_B + R_B) = (X^4 - 1)(Q_A + \lambda Q_B) + (R_A + \lambda R_B)$.

Mais $\deg(R_A + \lambda R_B) \leq 3$ donc par unicité de l'écriture $Q_C = Q_A + \lambda Q_B$ et $R_C = R_A + \lambda R_B$.

Donc $R_C = f(C) = f(A + \lambda B) = R_A + \lambda R_B = f(A) + \lambda f(B)$. Donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est inversible (son déterminant vaut 1) et

diagonalisable ($A^2 = I_4$ donc A est une symétrie et donc f aussi).

671. RMS 2025 1513 CCINP PSI énoncé p. 109

Soit n un entier impair ≥ 3 . On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit $\Phi : E \rightarrow E$ par $\forall P \in E, \Phi(P) = P(1 - X) + P(0)X^n$.

- (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E et déterminer la matrice A de Φ dans la base canonique.
- (b) Montrer que $\Phi^2(1) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$.

- (c) Expliciter A^2 . Vérifier que A^2 est triangulaire.
- (d) En déduire le noyau et l'image de Φ .
- (e) Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$.
- (f) Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A^2)$, alors l'une au moins des deux racines carrées de λ est valeur propre de A .
- (g) Déterminer le spectre de Φ .
- (h) En déduire que Φ est diagonalisable.

SOLUTION. —

- (a) Φ est clairement linéaire. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P(1-X)) = \deg P \leq n$ et $\deg(P(0)X^n) = -\infty$ ou n donc $\deg(\Phi(P)) \leq n$.

$$\Phi(1) = 1 + X^n \text{ et pour } k \geq 1, \Phi(X^k) = (1-X)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i X^i.$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & -n \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ où } a_{ij} = (-1)^{i-1} \binom{j-1}{i-1} \text{ pour } j \geq 2.$$

- (b) $\Phi^2(1) = \Phi(1) + \Phi(X^n) = 1 + X^n + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i X^i = 1 + X^n + 1 + (-1)^n X^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i X^i = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i X^i$ puisque n est impair.

- (c) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi^2(P) = \Phi(P(1-X)) + P(0)\Phi(X^n) = P(X) + P(1)X^n + P(0)(1-X)^n$ donc pour $k \geq 1, \Phi^2(X^k) =$

$$X^k + X^n. \text{ On en déduit avec la question b) que } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } a_{i1} = (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} \text{ pour } 2 \leq i \leq n.$$

- (d) A^2 est triangulaire inférieure de diagonale $(2, 1, \dots, 1, 2)$ donc A^2 est donc inversible donc A aussi et Φ est bijective.
- (e) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et P vecteur propre associé. Alors $\Phi^2(P) = \lambda^2 P$ donc λ^2 est bien valeur propre de A^2 avec, en prime, $E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^2}(A^2)$.
- (f) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A^2 et $\mu \in \mathbb{C}$ une de ses racines carrées. $\chi_{A^2}(\lambda) = 0 = \det(\mu^2 I_n - A^2) = \det(\mu I_n - A) \det(\mu I_n + A) = (-1)^n \chi_A(\mu) \chi_A(-\mu)$ donc μ ou $-\mu$ est valeur propre de A .
- (g) On déduit de e) que $\text{Sp}(A) \subset \{\pm 1, \pm \sqrt{2}\}$.
- (h) On montre que $\Phi^4 - 3\Phi^2 + 2\text{id} = 0$:
 $\Phi^4(P) - 3\Phi^2(P) + 2P = P(X) + 3P(1)X^n + 3P(0)(1-X)^n - 3(P(X) + P(1)X^n + P(0)(1-X)^n) + 2P(X) = 0$
 Donc le polynôme $X^4 - 3X^2 + 2$ qui est scindé sur \mathbb{R} à racines simples est un annulateur de Φ donc Φ est diagonalisable.

672. RMS 2025 1514 CCINP PSI énoncé p. 109

- (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que A soit diagonalisable dans \mathbb{R} .
- (b) On considère des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ et la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \alpha_i$ si $j = 2p + 1 - i$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
 - i. Écrire la matrice A .

- ii. Notons (e_1, \dots, e_{2p}) la base canonique de \mathbb{R}^{2p} et $E_i = \text{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que les E_i sont stables par f .
- iii. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $f|_{E_i}$ est diagonalisable.
- iv. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2p})$ pour que A soit diagonalisable.

SOLUTION. — \approx RMS 2006 1117, RMS 2014 985

(a) $\chi_B = X^2 - ab$.

- Si $ab > 0$: il y a deux racines distinctes donc deux vp distinctes : B est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$
- Si $ab = 0$: matrice triangulaire de seules valeurs propres 0, diagonalisable ssi elle est déjà diagonale ssi $a = b = 0$
- Si $ab < 0$: il n'y a pas de racine réelle donc pas de valeur propre réelle donc B pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ (elle le serait dans $M_2(\mathbb{C})$)

Donc B diagonalisable ssi a et b de même signe ou nuls tous les deux

(b) i. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{2p-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{2p} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii. $f(ae_i + be_{2p+1-i}) = af(e_i) + bf(e_{2p+1-i}) = a\alpha_{2p+1-i}e_{2p+1-i} + b\alpha_i e_i \in E_i$

- iii. • Si f est diagonalisable, la restriction à tout SEV stable est diagonalisable, ce qui est le cas des E_i .
- comme (e_1, \dots, e_{2p}) est une base de E alors par partition des bases, $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$
Si chaque $f|_{E_i}$ est diagonalisable, on prend une base $(\varepsilon_{i,1}, \varepsilon_{i,2})$ de E_i qui est formée de vecteurs propres de $f|_{E_i}$ donc de f , on concatène ces bases et comme $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, la base $B' = (\varepsilon_{i,1}, \varepsilon_{i,2})_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable.

iv. La matrice de $f|_{E_i}$ dans la base (e_i, e_{2p+1-i}) de E_i est $B_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{2p+1-i} \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

B_i diagonalisable ssi α_{2p+1-i} et α_i de même signe ou nuls tous les deux

Donc f est diagonalisable ssi pour tout $i \in [1]p$, α_{2p+1-i} et α_i sont de même signe ou nuls tous les deux.

673. RMS 2025 1515 CCINP PSI énoncé p. 110

On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même polynôme caractéristique χ .

- (a) On suppose que χ possède n racines distinctes dans \mathbb{R} . Montrer que A et B sont semblables.
- (b) Trouver deux matrices ayant le même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

SOLUTION. — RMS 2024 1558

- (a) Si P a n racines distinctes, il est scindé et à racines simples donc A et B sont semblables à des matrices diagonales de diagonales globalement égales et, quitte à effectuer une permutation sur les vecteurs de la base, elles sont semblables à la même matrice diagonale.

(b) Considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

674. RMS 2025 1516 CCINP PSI énoncé p. 110

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$.

- (a) Montrer que, si U et V sont deux matrices semblables et si R est un polynôme, alors $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.
- (b) Soit P un polynôme. Exprimer $P(M)$ à l'aide de $P(A)$, $P'(A)$ et B .
- (c) On suppose A diagonalisable et $B = 0$. Montrer que M est diagonalisable.

(d) Réciproque ?

SOLUTION. — RMS 2015 881, RMS 2018 804, RMS 2020 1219

(a) On commence par calculer les premières puissances de M , en profitant de la relation $AB = BA$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} A^2 & 3A^2B \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

On démontre ensuite aisément par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on obtient alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^d a_k M^k = \sum_{k=0}^d a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^d a_k A^k & (\sum_{k=0}^d a_k k A^{k-1})B \\ 0 & \sum_{k=0}^d a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

(b) Si M est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples noté P . La question précédente dit alors que $P(A) = P'(A)B = 0$. On en déduit dans un premier temps que A est diagonalisable. Comme P est à racines simples, les polynômes complexes P et P' sont premiers entre eux (ils n'ont aucune racine commune), donc il existe U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$ (théorème de Bezout, hors programme de PC). En substituant X par A , on en déduit que

$$U(A)P(A) + V(A)P'(A) = V(A)P'(A) = I_n,$$

et par conséquent que $P'(A)$ est inversible. Il résulte alors de l'égalité $P'(A)B = 0$ que $B = 0$.

Réciproquement, si A est diagonalisable et $B = 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de A et qui soit scindé à racines simples. La question précédente donne $P(M) = 0$, donc M est diagonalisable.

REMARQUE. — On peut éviter le recours au théorème de Bezout de la manière suivante. Comme A est semblable à une matrice diagonale D dont les valeurs propres λ_i sont parmi les racines de P , alors $P'(A)$ est semblable à $P'(D)$, qui est diagonale de valeurs propres $P'(\lambda_i)$, ces dernières n'étant pas nulles puisque P et P' n'ont pas de racines communes. L'inversibilité de $P'(A)$ en résulte.

675. RMS 2025 1517 CCINP PSI énoncé p. 110

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel. On suppose que u admet un polynôme annulateur P non nul dont 0 est racine simple. On rappelle que u est nilpotent s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$.

- (a) Donner une caractérisation de « 0 est racine simple de P » à l'aide des coefficients de P .
- (b) Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.
- (c) On suppose u nilpotent. Montrer que u est nul.

SOLUTION. —

- (a) $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.
- (b) $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ car si $u(x) = 0_E$ alors $u^2(x) = u(0_E) = 0_E$.
Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$: $u^2(x) = 0_E$ donc $\forall k \geq 2, u^k(x) = 0_E$. Alors $P(u)(x) = 0_E = a_1 u(x)$ donc $u(x) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}(u)$.
- (c) On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$:
 - Pour $k = 1$, c'est vérifié.
 - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$. $\text{Ker}(u^{k+1}) \subset \text{Ker}(u^{k+2})$ comme précédemment.
Soit $x \in \text{Ker}(u^{k+2})$. Alors $u^2(u^k(x)) = 0_E$ donc $u^k(x) \in \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$ donc $u^{k+1}(x) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}(u^{k+1})$.

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker } u$.
 Pour $k = r$, on a donc $\text{Ker}(u^r) = E = \text{Ker}(u)$ donc $u = 0$.

676. RMS 2025 1518 CCINP PSI énoncé p. 110

(a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- (b) Expliciter M^k pour $k \in \mathbb{N}$.
- (c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $A, P'(A)$ et $P(A)$.
- (d) Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.
- (e) Étudier la réciproque si A est inversible.
- (f) Montrer que, si A n'est pas inversible et si M est diagonalisable, alors $A = 0$.

SOLUTION. — \approx RMS 2009 712, RMS 2017 809

(a) $B = Q^{-1}AQ$ alors par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = Q^{-1}A^kQ$
 enfin si $P = \sum_{k=0}^N b_k X^k$ alors $P(B) = \sum_{k=0}^N b_k B^k = \sum_{k=0}^N b_k Q^{-1}A^kQ = Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^N b_k A^k \right) Q = Q^{-1}P(A)Q$.

(b) On commence par calculer les premières puissances de M , en profitant de la relation $AB = BA$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} A^2 & 3A^3 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

On démontre ensuite aisément par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on obtient alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^d a_k M^k = \sum_{k=0}^d a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^d a_k A^k & \left(\sum_{k=1}^d a_k k A^{k-1} \right) A \\ 0 & \sum_{k=0}^d a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)A \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

(c) Si M est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples noté P . La question précédente dit alors que $P(A) = P'(A)A = 0$. On en déduit que A est diagonalisable.

(d) En choisissant $A = I_n$ diagonalisable et inversible $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable donc égale à l'identité).

(e) Si A non inversible et M diagonalisable, on a vu que A est diagonalisable, semblable à une matrice diagonale D dont les valeurs propres λ_i sont non nulles et parmi les racines de P .

Alors $P'(A)$ est semblable à $P'(D)$, qui est diagonale de valeurs propres $P'(\lambda_i)$, ces dernières n'étant pas nulles puisque P et P' n'ont pas de racines communes.

On en déduit que $P'(A)$ est inversible, mais $P(M) = 0$ donc $AP'(A) = 0$ et donc $A = 0$.

677. RMS 2025 1519 IMT PSI énoncé p. 110

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On suppose A diagonalisable. Diagonaliser la matrice B .

SOLUTION. —

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Posons $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ 0 & -P \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix}$. On a $B = Q^{-1} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} Q$.

678. RMS 2025 1520 CCINP PSI énoncé p. 111

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AU = UB$.

(a) Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule A , alors les valeurs propres de A sont racines de P .

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.

(c) Montrer que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$. On pourra raisonner par l'absurde.

SOLUTION. — \approx RMS 2009 714, RMS 2015 829, RMS 2013 332, RMS 2013 585, RMS 2016 905, RMS 2018 914, RMS 2022 1143

679. RMS 2025 1521 CCINP PSI énoncé p. 111

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, où $n \geq 1$.

(a) Si u est diagonalisable, montrer que u^2 l'est également.

(b) Montrer que la réciproque est fautive à l'aide d'un contre-exemple.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{Id}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \lambda \text{Id})$.

(d) On suppose u bijectif. Montrer que, sous cette hypothèse, la réciproque de la première question est vraie.

SOLUTION. — RMS 2020 1218

(a) Si $\mathcal{M}_B(u) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\mathcal{M}_B(u^2) = D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ (se généralise à tout polynôme en u).

(b) Non, exemple : $B = \mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable alors que $B^2 = 0$ l'est.

(c) Puisque $\lambda \neq -\lambda$, la somme est directe.

Si $u^2 - \lambda^2 \text{id} = (u - \lambda \text{id}) \circ (u + \lambda \text{id}) = (u + \lambda \text{id}) \circ (u - \lambda \text{id})$ donc $\text{Ker}(u \pm \lambda \text{id}) \subset \text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{id})$.

Soit $x \in \text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{id})$. Supposons $x = x_1 + x_2$, $u(x) = \lambda x_1 - \lambda x_2$ donc $x_1 = \frac{1}{2\lambda}(\lambda x + u(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2\lambda}(\lambda x - u(x))$ et ces candidats conviennent (facile).

(d) En notant μ_k les vp distinctes de u^2 et m_k leurs ordres de multiplicité, on a par hypothèse $\sum_{i=1}^p m_k = n$. En notant

$\pm \lambda_k$ les racines carrées de μ_k , les $\pm \lambda_k$ sont 2 à 2 distinctes et d'après ce qui précède, $\sum_{i=1}^p (\dim(\text{Ker}(u - \lambda_k \text{id})) +$

$\dim(\text{Ker}(u + \lambda_k \text{id}))) = \sum_{i=1}^p m_k = n$ donc u est diagonalisable.

680. RMS 2025 1522 CCINP PSI énoncé p. 111

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs telle que :

$$\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1.$$

(a) Montrer que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)$.

(b) En déduire que la famille $(u_1 + e_1, \dots, u_n + e_n)$ est une base de E .

SOLUTION. — RMS 2022 1147, RMS 2020 1224

(a) Notons $u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} e_j$. $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n u_{ij} e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij} \right) e_j$ donc $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij} \right)^2$.

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ donne : $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{k=1}^n u_{kj}^2$ et donc

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{k=1}^n u_{kj}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u_{kj}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{kj}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2.$$

Autre méthode : Inégalité triangulaire et homogénéité : $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|u_i\|$

puis Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n avec les vecteurs $(|\lambda_i|)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(\|u_i\|)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$: $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|u_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2}$
 en passant au carré on a le résultat attendu.

(b) On utilise l'inégalité triangulaire inversée : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + u_i) = 0$. Alors :

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + u_i) \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\| \stackrel{\text{avec (a)}}{\geq} \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \left(1 - \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2}}_{>0} \right)$$

On en déduit que $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 0$ puis que tous les $\lambda_i = 0$.

681. RMS 2025 1523 CCINP PSI énoncé p. 111

Pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle A, B \rangle = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$.

(a) Montrer que \langle, \rangle est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\langle X^k, 1 \rangle$.

On note $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ le projeté orthogonal de 1 sur $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$.

Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2) \cdots (X+k)$.

(b) En déterminant $\langle 1 - Q, X^i \rangle$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(i) = 0$.

(c) En déduire l'expression de P .

(d) Montrer que $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{n+1}$.

SOLUTION. —

(a) \langle, \rangle est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: pas de difficulté, classique.

$\langle X^k, 1 \rangle = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = I_k$. Par IPP $I_{k+1} = (k+1)I_k$ et avec $I_0 = 1$ on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \langle X^k, 1 \rangle = k!$

On note $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ le projeté orthogonal de 1 sur $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$. Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2) \cdots (X+k)$.

(b) $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ est le projeté orthogonal de 1 sur $V = \text{Vect}(X, \dots, X^n)$ donc $1 = \underbrace{Q}_{\in V} + \underbrace{1-Q}_{\in V^\perp}$

donc $1 - Q \in V^\perp$ donc pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle 1 - Q, X^i \rangle = 0$

mais $\langle 1 - Q, X^i \rangle = \int_0^{+\infty} (1 - \sum_{k=1}^n a_k t^k) t^i e^{-t} dt = I_i - \sum_{k=1}^n a_k I_{i+k} = i! \left(1 - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(i+k)!}{i!} \right) = i! P(i)$

On en déduit que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(i) = 0$.

(c) On en déduit l'expression de P : $P = \left(\prod_{i=1}^n (X - i) \right) Q$. Mais $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par somme de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc Q est constant. On a aussi $P(-1) = 1$ donc $P(-1) = q \prod_{i=1}^n (-1 - i) = 1$ donc $q(-1)^n (n+1)! = 1$ donc $q = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

$$P = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n (X - i).$$

- (d) $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = d(1, V)^2 = \|1 - Q\|^2 = \|1\|^2 - \|Q\|^2$.
 or $\|1\|^2 = 1$ et

$$\begin{aligned} \|Q\|^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k t^k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n a_\ell t^\ell \right) e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \int_0^{+\infty} a_k a_\ell t^{k+\ell} e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k a_\ell (k + \ell)! \\ &= \sum_{k=1}^n a_k k! \left(\sum_{\ell=1}^n a_\ell \frac{(k + \ell)!}{k!} \right) = \sum_{k=1}^n a_k k! (1 - P(k)) = \sum_{k=1}^n a_k k! = 1 - P(0) \end{aligned}$$

Donc $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = P(0) = \frac{1}{n+1}$.

682. RMS 2025 1524 CCINP PSI énoncé p. 111

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

- (a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 (b) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
 (c) Déterminer $d(1, E)$.

SOLUTION. — RMS 2022 1148, RMS 2017 1268

- (a) La symétrie et la bilinéarité sont immédiates.
 Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(1))^2 \geq 0$ comme somme de termes ≥ 0 donc ϕ est positive.
 De plus, $\langle P, P \rangle = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, (P^{(k)}(1))^2 = 0$ (une somme de termes ≥ 0 est nulle \iff tous ses termes sont nuls) ce qui fait que 1 est racine d'ordre au moins $n + 1$ de P qui est de degré $\leq n$. Donc P est nul et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.
 (b) $E = \text{Ker } \phi$ où ϕ est la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(1)$. C'est un hyperplan donc $\dim E = n + 1 - 1 = n$.
 (c) $\forall P \in E, \langle P, 1 \rangle = P(1) = 0$ donc le polynôme 1 est orthogonal à E . On en déduit que $d(1, E) = \|1\| = 1$

683. RMS 2025 1525 CCINP PSI énoncé p. 112

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on note $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt$.

- (a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
 (c) Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^3 - at - b)^2 dt$.
 (d) Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_N[X], \int_0^{+\infty} t e^{-t} P(t) dt = 0 \right\}$. Montrer que H est un espace vectoriel et déterminer la distance de $X + 1$ à H .

SOLUTION. —

- (a) Classique, détail pour la séparation $= \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et elle est nulle donc par positivité stricte de l'intégrale la fonction intégrée est nulle sur \mathbb{R}^+ donc le polynôme P est nul sur \mathbb{R}^+ donc a une infinité de racines donc est nul.
 (b) On pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, par IPP, pour tout $n, I_{n+1} = (n + 1)I_n$ et $I_0 = 1$. Puis par récurrence $I_n = n!$

$$(c) \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at - b)^2 dt = \Phi(X^3 - aX - b, X^3 - aX - b) = \|X^3 - aX - b\|^2$$

$$\text{donc } \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at - b)^2 dt = d(X^3, \mathbb{R}_1[X])^2$$

On cherche une BON de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire Φ

$$\bullet Q_0 = \frac{1}{\|1\|} \text{ avec } \|1\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_0 = 1$$

$$\text{donc } \boxed{Q_0 = 1}$$

$$\bullet \tilde{Q}_1 = X + a, \Phi(Q_1, 1) = 0 \iff \int_0^{+\infty} e^{-t}(t + a) dt = 0 \iff I_1 + aI_0 = 0 \iff a = -\frac{I_1}{I_0} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\text{donc } \tilde{Q}_1 = X - 1 \text{ puis } Q_1 = \frac{\tilde{Q}_1}{\|\tilde{Q}_1\|} \text{ avec } \|\tilde{Q}_1\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}(t - 1)^2 dt = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2! - 2 \times 1! + 1! = 1$$

$$\text{donc } \boxed{Q_1 = X - 1}$$

Par formule du projeté orthogonal, $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^3) = \Phi(X^3, Q_0)Q_0 + \Phi(X^3, Q_1)Q_1$

avec $\Phi(X^3, Q_0) = I_3 = 3! = 6$ et $\Phi(X^3, Q_1) = I_4 - I_3 = 4! - 3! = 18$

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^3) = 6Q_0 + 18Q_1 = 18X - 12$$

$$\text{enfin } d(X^3, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^3)\|^2 = \|X^3 - 18X + 12\|^2 = I_6 - 36I_4 + 24I_3 + 18^2 I_2 - 18 \cdot 12 \cdot 2 \cdot I_1 + 12^2 I_0 = 720 - 36 \cdot 24 + 24 \cdot 6 + 18^2 \cdot 2 - 18 \cdot 12 \cdot 2 + 12^2 = 360$$

$$\text{Donc } \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at - b)^2 dt = 360.$$

$$(d) \text{ Soit } H = \left\{ P \in \mathbb{R}_N[X], \int_0^{+\infty} t e^{-t} P(t) dt = 0 \right\}. H = \text{Ker } \varphi \text{ où } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_N[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto \int_0^{+\infty} t e^{-t} P(t) dt \end{cases} (\varphi \text{ linéaire})$$

H est le noyau d'une forme linéaire non nulle (puisque $\varphi(1) = I_1 = 1$) donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}_N[X]$ (donc sev de dimension N).

On voit aussi que $P \in H \iff \Phi(P, X) = 0$. On conclut de cela que X un vecteur de H^\perp . Une bon de H^\perp est alors $U = \frac{X}{\|X\|}$ avec $\|X\|^2 = I_2 = 2$ donc $U = \frac{X}{\sqrt{2}}$.

La projection orthogonale de $X + 1$ sur H^\perp est alors $p_{H^\perp}(X + 1) = \Phi(X + 1, U)U = \frac{1}{2}\Phi(X + 1, X)X = \frac{1}{2}(I_2 + I_1)X = \frac{3}{2}X$

$$\text{donc la distance de } X + 1 \text{ à } H \text{ est } \|p_{H^\perp}(X + 1)\| = \frac{3}{2}\|X\| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

684. RMS 2025 1526 CCINP PSI énoncé p. 112

Soient E en espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal.

$$(a) \text{ Montrer que } \forall x \in E, \langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2.$$

$$(b) \text{ Montrer que } \sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg}(p).$$

SOLUTION. — RMS 2006 1119, RMS 2010 1055

(a) On sait qu'un projecteur d'un espace euclidien E est orthogonal si et seulement s'il est un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire s'il vérifie $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$ pour tous vecteurs x et y de E . Ici, p est supposé orthogonal, donc

$$\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x) \rangle = \langle p \circ p(x), x \rangle = \langle p(x), x \rangle.$$

(b) On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de p sur la base e . En appliquant la question (a), on obtient $\|p(e_i)\|^2 = \langle p(e_i), e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_{i,j} e_j, e_i \right\rangle = a_{i,i}$ car la base e est orthonormale, donc

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \text{tr}(A) = r,$$

car on sait que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

685. RMS 2025 1527 CCINP PSI énoncé p. 112

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que A soit la matrice d'une rotation vectorielle.

SOLUTION. — RMS 2024 1567 **mais des questions intermédiaires!**

- (a) L'endomorphisme f est une rotation si et seulement si sa matrice est orthogonale et de déterminant 1, i.e. si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1, \end{cases}$$

- (b) **Les relations entre les coefficients et les racines et a fortiori les fonctions symétriques élémentaires sont HP!**

a, b, c sont racines de $(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + ac + bc)X - abc = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = \alpha - 2\beta \\ a^3 + b^3 + c^3 = -\alpha(a^2 + b^2 + c^2) - \beta(a + b + c) - 3\gamma = -\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma \end{cases}$$

Les relations du (a) deviennent alors

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ \beta = 0 \\ -\alpha^3 + \alpha\beta = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, f est une rotation si et seulement si a, b, c sont les racines réelles de $X^3 - X^2 + k$ où $k = -\gamma = -abc \in \mathbb{R}$.

On peut montrer qu'un tel polynôme a trois racines réelles si et seulement si $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$ par la méthode de Cardan.

En posant $x = z + \frac{1}{3}$ et $q = k - \frac{2}{27}$, on voit que $x^3 - x^2 + k = 0 \iff z^3 - \frac{1}{3}z + q = 0$.

En cherchant les solutions de cette dernière équation sous la forme $z = z_1 + z_2$ où $z_1 z_2 = \frac{1}{9}$ (une telle décomposition existe : z_1 et z_2 sont les racines de $X^2 - zX + \frac{1}{9}$), on voit que

$$z^3 - \frac{1}{3}z + q = 0 \iff z_1^3 + z_2^3 = -q.$$

Alors z_1^3 et z_2^3 sont de somme égale à $-q$ et de produit égal à $\frac{1}{9^3}$, donc sont les racines de $X^2 + qX + \frac{1}{9^3}$. En posant $\Delta = q^2 - \frac{4}{9^3}$, et en notant δ une racine carrée de Δ , et α une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$, on voit que

$$(z_1, z_2) = \left(\alpha, \frac{1}{9\alpha}\right) \quad \text{ou} \quad \left(j\alpha, j^2 \frac{1}{9\alpha}\right) \quad \text{ou} \quad \left(j^2\alpha, j \frac{1}{9\alpha}\right),$$

où $j = e^{2i\pi/3}$. Les racines de $X^3 - X^2 + k$ sont donc les trois complexes

$$\frac{1}{3} + \alpha + \frac{1}{9\alpha}, \quad \frac{1}{3} + j\alpha + j^2 \frac{1}{9\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} + j^2\alpha + j \frac{1}{9\alpha},$$

et ces trois complexes sont tous réels si et seulement si $\Delta \leq 0$ (exercice ...), i.e. puisque $\Delta = q^2 - \frac{4}{9^3} = k^2 - \frac{4}{27}k = k(k - \frac{4}{27})$, si et seulement si

$$0 \leq k \leq \frac{4}{27}.$$

- (c) Si $b = c$, A est symétrique réelle donc diagonalisable et puisque $b \neq 0$, $A \neq I_3$, c'est donc un demi-tour. On remarque que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour f , associé à la valeur propre $a + b + c = -\alpha = 1$, donc f est le demi-tour d'axe u .

686. RMS 2025 1528 IMT PSI énoncé p. 112

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\det(M) = 0$ et que $M^T = M^2$.

- (a) Montrer que $M^4 = M$.
- (b) Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.
- (c) On suppose que $b = 0$. Que peut-on dire de M ?
- (d) Montrer que $M^2 = M$.

SOLUTION. —

- (a) $M^4 = (M^\top)^2 = (M^2)^\top = (M^\top)^\top = M$.
 $X^4 - X$ est scindé sur \mathbb{C} et à racines simples donc M est diagonalisable sur \mathbb{C} et $\text{Sp}(M) \subset \{0, 1, j, j^2\}$.
- (b) $\det M = 0$ donc 0 est valeur propre de M et donc M est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 $b \in \mathbb{R}$ est l'autre valeur propre de M donc $b \in \{0, 1\}$.
- (c) M étant diagonalisable, elle est semblable à (0) donc égale à (0) .
- (d) Si $b = 1$, alors M a deux valeurs propres d'ordre 1 donc est diagonalisable donc semblable à $\text{diag}(0, 1)$ donc $M^2 = M$, ce qui est vrai également si $b = 0$.

687. RMS 2025 1529 IMT PSI énoncé p. 112

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Justifier l'existence d'un vecteur propre pour A .
- (b) Soit X un tel vecteur, on pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$ et $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a le vecteur Y_a est-il propre pour B ?
- (c) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.
- (d) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ trouver un polynôme annulateur de B de degré trois.

SOLUTION. — RMS 2024 1570

- (a) Théorème spectral : il existe des valeurs propres et des vecteurs propres, soit X un vecteur propre et λ une valeur propre associée.
- (b) $BY_a = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + aXX^\top X \\ XX^\top X + aAX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + a\|X\|^2)X \\ (\|X\|^2 + a\lambda)X \end{pmatrix}$.
 Y_a est un vecteur propre de $B \iff \|X\|^2 + a\lambda = a(\lambda + a\|X\|^2) \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$
- (c) Par le théorème spectral : on prend une base orthonormée (X_1, \dots, X_n) formée de vecteurs propres de A en concaténant des bases orthonormées de chacun des sep, ainsi on peut supposer que le vecteur X choisi au départ est égal à bX_1 (plus précisément on choisit $X_1 = \frac{X}{\|X\|}$ et on complète la base de $E_\lambda(A)$ en une BON). On note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i (donc $\lambda_1 = \lambda$).

Avec ces notations $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} A & b^2 X_1 X_1^\top \\ b^2 X_1 X_1^\top & A \end{pmatrix}$

On construit les vecteurs $Y_{i,\varepsilon} = \begin{pmatrix} X_i \\ \varepsilon X_i \end{pmatrix}$ et on calcule

$$BY_{i,\varepsilon} = \begin{pmatrix} A & b^2 X_1 X_1^\top \\ b^2 X_1 X_1^\top & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ \varepsilon X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_i + \varepsilon b^2 X_1 X_1^\top X_i \\ b^2 X_1 X_1^\top X_i + \varepsilon AX_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i X_i + \varepsilon b^2 \delta_{1,i} X_1 \\ b^2 \delta_{1,i} X_1 + \varepsilon \lambda_i X_i \end{pmatrix}$$

- si $i \neq 1$ on a $BY_{i,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_i X_i \\ \varepsilon \lambda_i X_i \end{pmatrix} = \lambda_i Y_{i,\varepsilon}$ donc $Y_{i,\varepsilon}$ est vecteur propre de B associé à λ_i .

- si $i = 1$ on a $BY_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 + \varepsilon b^2 X_1 \\ b^2 X_1 + \varepsilon \lambda_1 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \varepsilon b^2) X_1 \\ \varepsilon (\lambda_1 + \varepsilon b^2) X_1 \end{pmatrix} = (\lambda_1 + \varepsilon b^2) Y_{1,\varepsilon}$

La famille $(Y_{i,\varepsilon})$ contient $2n$ vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ (de dimension $2n$), ce sont des vecteurs propres de B , il reste à vérifier que la famille est libre :

Soit $(a_{i,\varepsilon})$ des scalaires tels que $\sum_{i,\varepsilon} a_{i,\varepsilon} Y_{i,\varepsilon} = 0$ donc $\sum_{i=1}^n a_{i,1} \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n a_{i,-1} \begin{pmatrix} X_i \\ -X_i \end{pmatrix} = 0$

donc $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (a_{i,1} + a_{i,-1}) X_i \\ \sum_{i=1}^n (a_{i,1} - a_{i,-1}) X_i \end{pmatrix} = 0$ mais comme la famille (X_1, \dots, X_n) est libre (base)

on a pour tout i : $a_{i,1} + a_{i,-1} = 0$ et $a_{i,1} - a_{i,-1} = 0$ donc tous les scalaires $a_{i,1}$ et $a_{i,-1}$ sont nuls. CQFD

- (d) • On remarque que $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in E_0(A)$, c'est un vecteur de norme $b = \sqrt{3}$ associé à la valeur propre 0.
- $E_0(A)$ est un espace de dimension 2.
 - $E_3(A)$ est un espace de dimension 1.

D'après les calculs et les notations de la question précédente (il est inutile de déterminer les vecteurs propres ici)

$Y_{1,\varepsilon}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 + \varepsilon b^2 = 0 + 3\varepsilon$

si $i \neq 1$, $Y_{i,\varepsilon}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i : on a donc comme valeurs propres 0 et 3.

Finalement les valeurs propres de B sont 0 (de multiplicité 2) 3 (de multiplicité 1 + 2 = 3) et -3 (de multiplicité 1) mais comme B est diagonalisable, elle est annihilée par le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(B)} (X - \lambda) = (X - 0)(X - 3)(X + 3)$.

688. RMS 2025 1530 IMT PSI..... énoncé p. 113

Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = XX^T$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Déterminer le rang de A . Quel est le spectre de A ?
- Déterminer le polynôme caractéristique de A .

SOLUTION. — Si $X = 0$, $A = 0$. On suppose dans la suite que $X \neq 0$.

- A est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
- Les colonnes de A sont $C_j = x_j X$, elles sont toutes proportionnelles donc $\text{rg } A \leq 1$. $\text{tr } A = \text{tr}(XX^T) = \text{tr}(X^T X) = X^T X = \|X\|^2$ donc $A \neq 0$ et $\text{rg } A = 1$.
- $\dim \text{Ker } A = n - 1$ d'après le théorème du rang et la dernière valeur propre est donnée par la trace $\lambda = \text{tr } A = \|X\|^2$.
Donc $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - \|X\|^2)$.

689. RMS 2025 1531 CCINP PSI..... énoncé p. 113

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^3 = I_n$, $M \neq I_n$ et $MM^T = M^T M$.

- Montrer que $M^T M$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- On prend $n = 3$. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

SOLUTION. — RMS 2022 1153

- On a $M^3 = I_n$, donc $({}^t M)^3 = {}^t(M^3) = I_n$, et puisque ${}^t M M = M {}^t M$, on obtient $({}^t M M)^3 = ({}^t M)^3 M^3 = I_n$.
Ainsi ${}^t M M$ est une matrice symétrique réelle (...), donc diagonalisable par le théorème spectral, et elle n'admet que 1 comme valeur propre réelle (seule racine réelle de l'annulateur $X^3 - 1$), donc ${}^t M M$ est semblable à I_n , donc égale à I_n , ce qui signifie que M est orthogonale.

- (b) • On a de plus $\det(M)^3 = \det(M^3) = \det(I_n) = 1$, donc $\det(M) = 1$, de sorte que l'isométrie f canoniquement associée à M est plus précisément une rotation.
 Soit θ l'angle de cette rotation (relativement au choix d'un vecteur dirigeant l'axe). Alors $M^3 = I_n$ est la matrice de f^3 , qui est la rotation d'angle 3θ autour du même axe : f est représentée, dans une base adaptée, par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, donc f^3 l'est par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(3\theta) \end{pmatrix}$.
 Ainsi $f^3 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, donc $3\theta \equiv 0 [2\pi]$, i.e. $\theta \equiv 0 [\frac{2\pi}{3}]$. Et on suppose $M \neq I_3$, donc $\theta \neq 0 [2\pi]$, donc $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
 • Réciproquement, toute matrice canoniquement associée à une rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ dans \mathbb{R}^3 est bien orthogonale et telle que $M \neq I_3$, $M^3 = I_3$ et ${}^t M M = M {}^t M = I_3$ (puisque ${}^t M M = M {}^t M = I_3$).
 • Les matrices vérifiant ces hypothèses dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont donc les matrices canoniquement associées aux rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ dans \mathbb{R}^3 .

690. RMS 2025 1532 CCINP PSI énoncé p. 113

- (a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (b) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, $\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i\right)^2 \leq r \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$.
 (c) Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\text{tr}(B))^2 \leq \text{rg}(B) \text{tr}(B^2)$.

Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $b_{i,i} = 1$ pour tout i et $|b_{i,j}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.

- (d) Exprimer $\text{tr}(B^2)$ et montrer que $\text{tr}(B^2) \leq 2n$.
 (e) Montrer que $\text{rg}(B) \geq n/2$.

SOLUTION. — RMS 2013 986, RMS 2015 992, RMS 2016 918, RMS 2020 824 pour le début

- (a) Cours
 (b) Appliquer Cauchy-Schwarz à $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $(1, \dots, 1)$.
 (c) On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'expression $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

Tout d'abord, $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A^T A) = \langle A, A \rangle \neq 0$ car $A \neq 0$. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable : $A = PDP^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)$ où $p = \text{rg } A$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \\ \text{tr } A^2 &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Soit J la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont p uns suivis de $n - p$ zéros. On applique l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\langle D, J \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i\right)^2 \leq \|D\|^2 \|J\|^2 = p \sum_{i=1}^p \lambda_i^2,$$

ce qui donne bien l'inégalité demandée.

- (d) $[B^2]_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ik} b_{kl}$, $\text{tr}(B^2) = \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n b_{ik}^2 \leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n \frac{1}{n} = n + \frac{1}{n} n(n-1) = n + n - 1 \leq 2n$.
 (e) $\text{tr}(B) = n$ et d'après ce qui précède, $\text{tr}(B^2) > 0$. D'après b), $\text{rg}(B) \geq \frac{(\text{tr } B)^2}{\text{tr}(B^2)} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$.

691. RMS 2025 1533 CCINP PSI énoncé p. 113

On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

- (a) Montrer que M est inversible.
- (b) Montrer que M est symétrique.
- (c) Montrer que $M = I_n$.

SOLUTION. — RMS 2023 1368

- (a) Très banal, en montrant par exemple que le déterminant de A est non nul.
- (b) L'identité initiale prouve de plus que $A^{-1} = (A^\top A)^2$. Donc, en utilisant les propriétés de la transposition, on a

$$A^\top = [((A^\top A)^2)^{-1}]^\top = [(A^\top A A^\top A)^\top]^{-1} = [A^\top A A^\top A]^{-1} = A.$$

A est bien symétrique.

- (c) Étant réelle et symétrique, A est donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Or l'équation initiale qu'elle vérifie s'écrit, du fait de sa symétrie, $A^5 = I_n$, ce qui prouve que ses valeurs propres sont des racines cinquièmes de l'unité. Donc 1 est la seule valeur propre réelle possible de A et, étant diagonalisable, A est semblable, donc nécessairement égale, à I_n .

692. RMS 2025 1534 CCINP PSI énoncé p. 113

Soit $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$. Soit \mathcal{F} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$.

- (a) Montrer que toute matrice de \mathcal{N} est trigonalisable. Que peut-on dire d'une matrice de \mathcal{N} diagonalisable ?
- (b) Déterminer $\mathcal{F} \cap S_n(\mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $\dim \mathcal{F} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

SOLUTION. — RMS 2018 1411

- (a) $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$ donc $\chi_M = X^n$ qui est scindé sur \mathbb{R} donc M est diagonalisable. Toute matrice nilpotente et diagonalisable est donc semblable à (0) donc égale à (0).
- (b) D'après ce qui précède et le théorème spectral, $\mathcal{F} \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.
- (c) On a alors $F \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim F + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ donc

$$\dim F \leq n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analyse

693. RMS 2025 1535 CCINP PSI énoncé p. 114

- (a) Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.
- (b) On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

SOLUTION. — RMS 2025 1301 Centrale PSI

- (a) La série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ satisfait les hypothèses du CSSA. On en déduit qu'elle converge, donc (u_n) est bien définie et converge vers 0, de plus $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
- (b) $|v_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ donc $\sum v_n$ est absolument convergente.

694. RMS 2025 1536 CCINP PSI énoncé p. 114

- (a) Rappeler le théorème spécial des séries alternées.
 (b) Étudier la nature de la série $\sum \cos(\pi n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}))$.

SOLUTION. —

$$\cos(\pi n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})) = \cos(\pi n^2 (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O(\frac{1}{n^4}))) = \cos(\pi n - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2})) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2})) = (-1)^n \frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2})$$

Le 1^{er} terme converge grâce au CSSA et le second converge absolument par comparaison à Riemann donc la série converge.

695. RMS 2025 1537 CCINP PSI énoncé p. 114

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

- (a) Déterminer $\lim u_n$.
 (b) En déduire $\lim nu_n$.
 (c) Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

SOLUTION. — RMS 2013 993 CCP PSI, RMS 2017 1290 IMT PSI, RMS 2019 1183 CCP PSI, RMS 2020 1342 IMT PC

- (a) Par récurrence, on prouve que (u_n) est une suite strictement positive. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, ce qui assure que

$$\lim u_n = 0.$$

- (b) On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_{n-1}} = 1.$$

- (c) On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc que $\sum u_n$ est divergente par comparaison à l'exemple de RIEMANN.

Comme $u_{n-1} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$, on peut utiliser un développement limité de l'exponentielle en zéro : $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Le premier terme est le terme général d'une série semi-convergente (théorème spécial des séries alternées) et le second celui d'une série absolument convergente par comparaison à l'exemple de RIEMANN. On en déduit que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

696. RMS 2025 1538 CCINP PSI énoncé p. 114

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- (a) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
 (b) Étudier la nature de $\sum u_n^3$.
 (c) Étudier la nature de $\sum u_n^2$.

SOLUTION. — RMS 2022 1161, RMS 2017 1294

- (a) L'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sinus et $\forall x \in I$, $0 \leq \sin x \leq x$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. La fonction sinus étant continue, la limite de (u_n) est l'unique point fixe du sinus, soit 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

- (b) Comme $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ et comme la suite (u_n) converge, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. Or $u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \sim -\frac{1}{6} u_n^3$, qui est de signe constant donc, par comparaison, $\sum u_n^3$ converge.

- (c) On reprend la même démarche avec $v_n = \ln u_n$: tout d'abord, $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \ln u_n - \ln u_0$ donc la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ diverge vers $-\infty$. Or $v_{n+1} - v_n = \ln(\sin u_n) - \ln u_n = \ln(1 - \frac{1}{6} u_n^2 + o(u_n^2)) \sim -\frac{1}{6} u_n^2$, qui est de signe constant donc, par comparaison, $\sum u_n^2$ diverge.

697. RMS 2025 1539 CCINP PSI énoncé p. 114

Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

- (a) Montrer que $R_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (b) Montrer que $R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
- (c) Nature de la série $\sum \frac{R_n(\alpha)}{S_n(\alpha)}$?

SOLUTION. — RMS 2016 925 CCP PSI, RMS 2017 1295 CCP PSI

La fonction $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue décroissante positive sur $]0, +\infty[$ donc pour $t \in [k, k+1]$, on obtient $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et en intégrant : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$. En sommant pour $2 \leq k \leq n$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \leq S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq 1,$$

donc la suite (S_n) , qui est déjà croissante, est aussi majorée, donc converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ sa limite. En sommant l'encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour $k \geq n+1$, on obtient $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ i.e.

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

En multipliant par $n^{\alpha-1}$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a alors $\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{S(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ quand $n \rightarrow +\infty$ et, d'après ce qui précède, la série $\sum \frac{R_n}{S_n}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

698. RMS 2025 1540 CCINP PSI énoncé p. 114

- (a) Citer le théorème spécial des séries alternées.
- (b) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. La convergence est-elle absolue ?
- (c) En déduire la nature de la série $\sum (-1)^n \int_0^1 e^{-n^2 t^2} dt$.

SOLUTION. — RMS 2023 1372 CCINP PSI

- (a) Cours.
- (b) La série en question est alternée, de terme général décroissant en valeur absolue et tendant vers 0. La théorème spécial s'applique donc, et la série converge.
- (c) Notons $u_n := (-1)^n \int_0^1 e^{-n^2 t^2} dt$ le terme général de la série en question ici. Par un changement de variable affine et via Chasles, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \int_0^n e^{-u^2} du \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du - \int_n^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - v_n, \end{aligned}$$

avec v_n le terme général de la série convergente vue plus haut. Puisque la série harmonique alternée converge, la série en question est donc convergente, car somme de deux séries convergentes.

Énoncé étrange : on pouvait directement utiliser le théorème spécial pour la seconde série : la décroissance en valeur absolue est évidente et la convergence vers 0 se prouve facilement via la convergence dominée.

699. RMS 2025 1541 IMT PSI énoncé p. 114

On cherche les applications f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} vérifiant : (*) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$.

- (a) Soit f vérifiant (*).

i. En considérant des valeurs particulières de n , montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1)$.

ii. Montrer que $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t) dt$ est constante, puis que f' est constante.

(b) Donner toutes les solutions du problème posé.

SOLUTION. — RMS 2022 1164 IMT PSI

(a) Soit f vérifiant (*).

i. Soit $x \in \mathbb{R}$. pour x et $n = 1$ on a, $f'(x) = f(x+1) - f(x)$ (1)

pour $x+1$ et $n = 1$ on a, $f'(x+1) = f(x+2) - f(x+1)$ (2)

pour x et $n = 2$ on a, $f'(x) = \frac{f(x+2)-f(x)}{2}$ (3)

(1) + (2) - 2 × (3) donne $f'(x) + f'(x+1) - 2f'(x) = 0$ donc $f'(x+1) = f'(x)$.

ii. Soit $g(x) = \int_x^{x+1} f'(t) dt = f(x+1) - f(x)$ de dérivée nulle donc indépendant de x .

Donc $\int_x^{x+1} f'(t) dt = f(x+1) - f(x) = C$ ne dépend pas de x .

On avait $f'(x) = \frac{f(x+n)-f(x)}{n}$. Mais, par télescopage, $f(x+n) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k+1) - f(x+k) = nC$.

Donc $f'(x) = C$ est constante.

(b) Analyse : si f est solution $f' = C$ donc f est de la forme $f : x \mapsto Cx + D$.

Réciproquement, si $f : x \mapsto Cx + D$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = C$ et $\frac{f(x+n)-f(x)}{n} = \frac{(C(x+n)+D)-(Cx+D)}{n} = C$ donc ces solutions conviennent.

700. RMS 2025 1542 CCINP PSI énoncé p. 115

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

(a) Montrer que $\int_a^b tf(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$.

(b) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{te^{it}}{1+\cos^2(t)} dt$.

SOLUTION. — RMS 2013 602 Mines Ponts PSI, RMS 2016 930 CCP PSI

(a) On effectue le changement de variable $u = a+b-x$, on obtient $\int_a^b xf(x) dx = -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u) du = (a+b) \int_a^b f(u) du - \int_a^b uf(u) du$, d'où le résultat :

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

(b) On a $\frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x} = f_1(x) + if_2(x)$ où $f_1 : x \mapsto \frac{x \cos x}{1+\cos^2 x}$ est impaire et $f_2 : x \mapsto \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$ est paire. Par conséquent,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x} dx = i \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) dx = 2i \int_0^{\pi} f_2(x) dx.$$

Comme $f_2(x) = xf(x)$ avec $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ qui vérifie $f(0+\pi-x) = f(\pi-x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$, on peut appliquer la question précédente à f avec et on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x} dx = i\pi \int_0^{\pi} f(x) dx = i\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

Le changement de variable $u = \cos x$ donne

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = 2 \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = 2[\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x} dx = \frac{i\pi^2}{2}.$$

701. RMS 2025 1543 IMT PSI énoncé p. 115

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ et $\phi(f)(0) = f(0)$.

- (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme.
- (b) Montrer que ϕ est injectif.
- (c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ .

SOLUTION. — RMS 2013 598 Mines Ponts PSI, RMS 2015 906 Centrale PC, RMS 2019 1007 Centrale PSI, RMS 2020 1209 CCINP PSI, RMS 2025 1303 Centrale PSI

- (a) T est clairement linéaire.
D'après le théorème fondamental de RIEMANN, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et sa dérivée est f . En 0, cela donne que $\lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = f(0)$ et $T(f)$ est continue en 0. Ailleurs, c'est le produit de deux fonctions continues.
- (b) $T(f) = \lambda f \iff \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$ ce qui fournit (en dérivant), que f est nécessairement solution de l'équation différentielle $\lambda x y' + (\lambda - 1)y = 0$ et donc $\lambda \neq 0$ et $f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.
Une telle fonction est continue en 0 $\iff \frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0 \iff 0 < \lambda \leq 1$.
On vérifie aisément qu'une telle fonction convient.
On en déduit que $\text{Sp}(T) =]0, 1]$ et que le sep associé est la droite dirigée par $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.
- (c) $0 \notin \text{Sp}(T)$ donc T est injectif.
Si $g \in \text{Im } T$, alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $x \mapsto xg(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Prendre pour g une fonction continue sur $]0, +\infty[$ mais pas dérivable sur $]0, +\infty[$, par exemple $g : x \mapsto |x - 1|$: $g \notin \text{Im } T$ donc T n'est pas surjectif.

702. RMS 2025 1544 IMT PSI énoncé p. 115

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right)$. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) .

SOLUTION. — $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \geq n \\ \frac{x^2}{n} & \text{si } |x| \leq n \end{cases}$.

Pour $n \geq |x|$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

$f_n(n) = n$ donc $\|f_n - 0\|_\infty \geq n$ et donc la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} .

Sur $[-a, a]$ où $a > 0$: $\forall n \geq a, \forall x \in [-a, a], |f_n(x) - 0| = \frac{x^2}{n} \leq \frac{a^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc la convergence est uniforme sur $[-a, a]$.

703. RMS 2025 1545 CCINP PSI énoncé p. 115

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right)$.

- (a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
- (b) Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur tout intervalle $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1]$.
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1/n)$. En déduire que la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

SOLUTION. — RMS 2019 1186 CCP PSI RMS 2020 1242 CCINP PSI

- (a) La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (par croissances comparées si $x \neq 0$).
- (b) Si $x \in [a, 1]$, alors $|\sin(nxe^{-nx^2})| \leq nxe^{-nx^2} \leq ne^{-na^2}$, donc $\|f_n\|_\infty^{[a,1]} \leq ne^{-na^2}$ et ce majorant tend vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[a, 1]$ avec $a > 0$.
- (c) En revanche, comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(e^{-1/n}\right) \rightarrow \sin 1 \neq 0$, la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

704. RMS 2025 1546 CCINP PSI énoncé p. 115

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

- (a) Étudier la convergence simple de (f_n) .
- (b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) .

SOLUTION. — Si $x \geq 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $|f_n(x) - x| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto x$ sur \mathbb{R}_+ .

Si $x < 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $g_n(x) = |f_n(x) - x| = \frac{-x}{1+nx^2}$. $g'_n(x) = \frac{2nx^2-1}{(1+nx^2)^2}$ donc g_n atteint son maximum en $x_n = \frac{-1}{\sqrt{2n}}$.
 $g_n(x_n) = \frac{\sqrt{2}}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc même conclusion sur \mathbb{R}_- .

705. RMS 2025 1547 IMT PSI..... énoncé p. 115

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

SOLUTION. — Pour $x \geq 0$, la série est alternée et satisfait manifestement les hypothèses du CSSA et pour $x < 0$, elle diverge grossièrement (CC) : convergence simple sur \mathbb{R}_+ .

De plus, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

706. RMS 2025 1548 CCINP PSI..... énoncé p. 115

Soit $f : t \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{1+t^n}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition réel de f .
- (b) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ?
- (c) Déterminer un équivalent de $f(t)$ lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures.

SOLUTION. —

(a) Si $|t| > 1$: $u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$: terme général de série divergente

Si $|t| < 1$: $u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n} \sim_{n \rightarrow +\infty} t^n$: terme général de série absolument convergente

Si $t = 1$: $u_n(1) = \frac{1}{2}$: terme général de série divergente

Si $t = -1$: les u_n d'indice impair n'existent pas.

Donc $D_f =]-1, 1[$

(b) Les u_n sont continues. La série CVN sur $[-a, a] \subset]-1, 1[$ car si $t \in [-a, a]$ alors $|u_n(t)| \leq \frac{a^n}{1-a^n} \sim_{n \rightarrow +\infty} a^n$: TGSC.
 La fonction f est donc continue sur $D_f =]-1, 1[$.

(c) On travaille pour $t \in]0, 1[$ (fixé) et on compare à une intégrale : soit $g : x \mapsto \frac{t^x}{1+t^x} = 1 - \frac{1}{1+e^{x \ln t}}$.

$g'(x) = \frac{\ln t e^{x \ln t}}{(1+e^{x \ln t})^2} < 0$ donc g est décroissante.

décroissance de g : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n, n+1]$ on a $u_{n+1}(t) = g(n+1) \leq g(x) \leq g(n) = u_n(t)$.

on intègre sur $[n, n+1]$: $u_{n+1}(t) \leq \int_n^{n+1} g(x) dx \leq u_n(t)$.

on somme (et Chasles) : $f(t) - u_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(t) \leq \int_1^{+\infty} g(x) dx = I(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = f(t)$.

on réordonne : $I(t) \leq f(t) \leq I(t) + \frac{t}{1+t}$.

On calcule $I(t) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^x} dx$ avec le CDV : $u = t^x = e^{x \ln t}$, $du = \ln t e^{x \ln t} dx = \ln t t^x dx$.

$I(t) = \int_t^0 \frac{1}{1+u} \frac{du}{\ln t} = \frac{1}{\ln t} [\ln(1+u)]_t^0 = -\frac{\ln(1+t)}{\ln t}$. Donc $-\frac{\ln(1+t)}{\ln t} \leq f(t) \leq -\frac{\ln(1+t)}{\ln t} + \frac{t}{1+t}$.

Les extrêmes sont équivalents à $-\frac{\ln(2)}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} +\infty$ donc par encadrement des équivalents, $f(t) \sim_{t \rightarrow 1^-} -\frac{\ln(2)}{\ln t}$

707. RMS 2025 1549 IMT, CCINP PSI..... énoncé p. 116

Pour $x > 0$ et $n \geq 2$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

- (a) Déterminer le domaine D de convergence de $\sum u_n$.

- (b) Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D .
- (c) Montrer que, pour $x \geq 1$ et $n \geq 2$, le reste d'ordre n de la série vérifie : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
- (d) Étudier la continuité de $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ sur D .
- (e) Montrer que S est intégrable sur D .

SOLUTION. — RMS 2020 1248 CCINP PSI

- (a) Si $0 < x < 1$, $|u_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, si $x = 1$, $u_n(x) = 0$ et si $x > 1$, $u_n(x) = o(\frac{1}{x^n})$ donc $\sum u_n(x)$ converge absolument. $D = [1, +\infty[$.
- (b) $u_n(e^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{en \ln n}$ dont la série diverge (comparaison série-intégrale).
- (c) $|R_n(x)| \leq \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{1}{(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^n} \frac{\ln x}{x-1}$. Or $\frac{\ln x}{x-1} \leq 1$ (IAF) et $\frac{1}{x^n} \leq 1$ d'où le résultat.
- (d) On en déduit que la série converge uniformément sur D et comme les u_n sont continues, la somme S est continue.
- (e) $S(x) = \frac{\ln x}{x^2 \ln 2} + R_2(x)$ et, en reprenant ce qui précède, $|R_2(x)| \leq \frac{1}{x^2 \ln 3} = o(\frac{\ln x}{x^2})$ donc $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2 \ln 2} = o(\frac{1}{x^{3/2}})$. Par comparaison à l'exemple de RIEMANN, S est intégrable sur D .

708. RMS 2025 1550 CCINP PSI énoncé p. 116

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de S en fonction de a . On suppose pour toute la suite que $|a| < 1$.
- (b) Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- (c) Exprimer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ pour $x > 0$,
- (d) Trouver un équivalent de S en 0 .
- (e) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
- (f) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

SOLUTION. — RMS 2014 1263 CCP PSI

On pose $u_n(x) = \frac{a^n}{n+x}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Si $-x \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n(x))$ n'est pas définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $-x \notin \mathbb{N}$, $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^n}{n}$.
- Si $|a| < 1$, $\sum \frac{a^n}{n}$ converge absolument, donc $\sum u_n(x)$ aussi.
 - Si $|a| > 1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
 - Si $a = 1$, $\sum u_n(x)$ diverge.
 - Si $a = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées.

En conclusion, si $|a| < 1$ ou $a = -1$, S est défini sur $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$; sinon, S n'est pas défini.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $]0, +\infty[$. On montre qu'il y a convergence normale sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$, donc S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- (c) Soit $x > 0$. On calcule $S(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n+x}$, donc

$$aS(x+1) = S(x) - \frac{1}{x}$$

(d) Par continuité de S , on a $\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} (S(x) - \frac{1}{x}) = aS(1)$. On en déduit que $S(x) = \frac{1}{x} + O(1)$, donc

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

(e) La convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$ et le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ entraînent que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

(f) Posons $v_n(x) = xu_n(x) = \frac{a^n x}{n+x}$. Pour $x \geq 0$, $|v_n(x)| \leq a^n$ donc $\sum v_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+^* .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = a^n \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

On en déduit que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-a} \frac{1}{x}$.

709. RMS 2025 1551 CCINP PSI énoncé p. 116

Domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^x}$?

SOLUTION. — La série est alternée, on cherche à appliquer le CSSA. On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ par croissances comparées éventuellement, et la suite $(|u_n|)$ est clairement décroissante si $x \geq 0$.

Pour $x < 0$, on étudie les variations de $f_x : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^x}$ sur $[2, +\infty[$. $f'_x(t) = -\frac{x+\ln t}{t^2(\ln t)^{x+1}} \leq 0$ pour $t \geq e^{-x}$ donc f_x est décroissante sur $[e^{-x}, +\infty[$ et la suite de tg $u_n = f_x(n)$ est décroissante à partir du rang $n \geq e^{-x}$. Le CSSA s'applique donc également dans ce cas.

Finalement, $D = \mathbb{R}$.

710. RMS 2025 1552 IMT PSI énoncé p. 116

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la continuité de $S = \sum_{n \geq 1} f_n$.

(c) Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.

SOLUTION. — RMS 2009 1049 Centrale PC, RMS 2015 746 Mines Ponts PC

Les f_n étant impaires, on ne fera l'étude que sur \mathbb{R}_+ .

(a) Comme $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge et on a $S(0) = 0$.

Soit $x > 0$. Comme $f_n(x) \sim \frac{1}{n^3x}$ quand n tend vers $+\infty$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Finalement, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

(b) La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ , avec $f'_n(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$ pour tout $x \geq 0$. On en déduit le tableau de variation de f_n sur \mathbb{R}_+ :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0 -
$f_n(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2n^2}$	$\searrow 0$

Il en résulte que $\|f_n\|_{\infty}^+ = \frac{1}{2n^2} = \|f_n\|_{\infty}$ par parité, donc $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . Chaque f_n étant continue sur \mathbb{R} , on en déduit que S est continue sur \mathbb{R} .

- (c) Montrons que $S(x) \sim -x \ln x$ quand x tend vers 0^+ , à l'aide d'une comparaison série intégrale. Soit $g: u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x}{u(1+u^2x^2)}$. Pour $x > 0$ fixé, il s'agit d'une fonction strictement décroissante. On en déduit que

$$\int_n^{n+1} g(u) du \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^n g(u) du,$$

l'inégalité de gauche valant pour tout $n \geq 1$, et celle de droite pour tout $n \geq 2$. La convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ montre que g est intégrable sur $[1, +\infty[$. En sommant les inégalités ci-dessus, on obtient donc

$$I \leq S(x) \leq I + f_1(x),$$

où I désigne l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(u) du$. La décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fonction rationnelle g de la variable u est $\frac{x}{u} - \frac{x^3 u}{1+u^2x^2}$. On en déduit le calcul suivant :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\left[x \ln u - \frac{x}{2} \ln(1+u^2x^2) \right]_{u=1}^a \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(x \ln a - \frac{x}{2} \ln(1+a^2x^2) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(x \ln a - \frac{x}{2} \ln(a^2x^2) - \frac{x}{2} \ln(1+[ax]^{-2}) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) \right) = -x \ln x - \frac{x}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Comme $\frac{x}{2} \ln(1+x^2)$ et $f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sont négligeables devant $-x \ln x$ quand x tend vers 0^+ , l'encadrement $I \leq S(x) \leq I + f_1(x)$ donne alors l'équivalent

$$S(x) \underset{0^+}{\sim} -x \ln x.$$

711. RMS 2025 1553 CCINP PSI énoncé p. 116

On considère $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

- (a) i. Vérifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .
 ii. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
 iii. Que dire de la parité de f ?
- (b) On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et donner sa valeur.
- (c) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
- (d) i. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
 ii. La fonction f est-elle dérivable en 0?
- (e) Que dire alors de l'allure de la courbe représentative de f ?

SOLUTION. — \approx RMS 2014 764 Mines Ponts PC, RMS 2017 855 Mines Ponts PC, RMS 2017 736 Mines Ponts PSI
 On pose $f_n: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$. Il s'agit d'une fonction impaire, ce qui permet de réduire l'ensemble d'étude de f à \mathbb{R}_+ .

- (a) L'égalité $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ prouve la convergence normale de $\sum f_n$, donc f est définie sur \mathbb{R} . Elle y est de plus continue, car chaque f_n est continue et $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément. On fixe $a > 0$.
- (b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{\pi}{2n^2}$ et la convergence est normale donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12}$.
- (c) Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 , avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Il est clair que $\|f'_n\|_\infty, [a, +\infty[= f'_n(a) \sim \frac{1}{a^2n^3}$, donc la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Les deux hypothèses faibles du théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions ayant déjà été cités plus haut, on conclut que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$, et ceci pour tout $a > 0$. On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et que $f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$.

(d) En revanche, elle n'est pas dérivable en zéro :

On fixe $x \in]0, +\infty[$, et on pose $\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$. On vient de définir une fonction continue positive et décroissante, telle que $\sum_{n \geq 1} \varphi_x(n) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge. Le corollaire du théorème de comparaison série intégrale affirme alors que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Comme φ_x décroît, on a

$$\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(n) = f_n(x) \leq \int_{n-1}^n \varphi_x(t) dt,$$

la seconde inégalité n'ayant pas de sens pour $n = 1$. En sommant les inégalités de gauche (resp. de droite) pour n variant de 1 à l'infini (resp. de 2 à l'infini), on obtient

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} \leq f(x) \leq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)}.$$

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{t(1+t^2x^2)} = \frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} = [\ln(\frac{t}{\sqrt{1+t^2x^2}})]_{t=1}^{+\infty} = -\ln x + \ln(1+x^2)$. Comme $\ln(1+x^2)$ et $\frac{1}{1+x^2}$ sont négligeable devant $\ln x$ en zéro, on déduit de l'encadrement ci-dessus que

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

En particulier, comme f est continue en zéro, dérivable sur \mathbb{R}^* , impaire, et que $\lim_{0^+} f' = +\infty$, on peut affirmer que f n'est pas dérivable en zéro, mais que son graphe présente en ce point une tangente parallèle à Oy (appliquer l'égalité des accroissements finis $\forall x > 0, \exists c \in]0, x[, \tau(x) := \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$).

712. RMS 2025 1554 CCINP PSI énoncé p. 117

Soit (u_n) la suite de fonctions définie par $\forall x \in [0, 1], u_0(x) = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^3) dt$.

- (a) Montrer que, pour tout n, u_n est de classe \mathcal{C}^∞ .
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1], 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
- (c) Montrer que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $[0, 1]$.
- (d) Montrer que (u_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f non nulle, de classe \mathcal{C}^∞ et solution de $\forall x \in [0, 1], f'(x) = f(x - x^3)$.

SOLUTION. —

- (a) Par récurrence avec, pour $t \in [0, 1], g(t) = t - t^3 = t(1 - t^2) \in [0, 1]$:
 - u_0 est constante donc \mathcal{C}^∞
 - hérédité : si u_n est \mathcal{C}^∞ alors $x \mapsto \int_0^x u_n(t - t^3) dt$ qui est une primitive d'une fonction \mathcal{C}^∞ (par composition) est encore \mathcal{C}^∞ donc u_{n+1} est \mathcal{C}^∞
- (b)
 - $u_1(x) = 1 + \int_0^x u_0(t - t^3) dt = 1 + x$ donc $0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x \leq \frac{x^{0+1}}{(0+1)!}$ est vérifié
 - Hérédité : on suppose que la propriété est vraie au rang n alors, comme $t - t^3 \in [0, 1]$: on a $0 \leq u_{n+1}(t - t^3) - u_n(t - t^3) \leq \frac{(t-t^3)^{n+1}}{(n+1)!}$
 par positivité de l'intégrale : $0 \leq \int_0^x u_{n+1}(t - t^3) dt - \int_0^x u_n(t - t^3) dt \leq \int_0^x \frac{(t-t^3)^{n+1}}{(n+1)!} dt$
 donc $0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{(t-t^3)^{n+1}}{(n+1)!} dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{1}{(n+2)!}$
- (c) $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $[0, 1]$: immédiat avec la question 2.
- (d)
 - $\sum(u_{n+1} - u_n)$ CVN donc CVS vers $L = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (u_N - u_0)$ donc $u_N \xrightarrow{CVS} L + u_0 = f$.
 - CVU : $u_N - (L + u_0) = \sum_{n=N}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n)$ donc $\|u_N - (L + u_0)\|_\infty = \left\| \sum_{n=N}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) \right\|_\infty \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \|u_{n+1} - u_n\|_\infty$ TGSC avec la question 3.
 - Donc la suite (u_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction $f = L + u_0$.

- $L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1}(x) - u_n(x))$, limite (qui existe) de termes positifs donc $L(x) \geq 0$ donc $f(x) = L(x) + u_0(x) = L(x) + 1 > 0$: f est non nulle.
 - - Les u_n sont de classe \mathcal{C}^∞ donc \mathcal{C}^1
 - la suite (u_n) CVU donc CVS sur $[0, 1]$ vers f
 - par théorème fondamental de l'intégration, $x \mapsto \int_0^x u_n(t - t^3) dt$ est la primitive de $t \mapsto u_n(t - t^3)$ qui s'annule en 0 donc $u'_{n+1}(x) = u_n(x - x^3)$
Comme la suite (u_n) CVU sur $[0, 1]$ vers f , alors la suite (u'_n) CVU sur $[0, 1]$ vers $x \mapsto f(x - x^3)$
- On déduit du théorème de classe \mathcal{C}^1 que f est \mathcal{C}^1 et $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n(x) = f(x - x^3)$
Donc f est solution de $\forall x \in [0, 1], f'(x) = f(x - x^3)$
- Par récurrence sur k on montre alors facilement que f est \mathcal{C}^k pour tout k , donc f est de classe \mathcal{C}^∞ .

713. RMS 2025 1555 IMT PSI énoncé p. 117

Déterminer l'intervalle de convergence et la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$.

SOLUTION. — Rayon de convergence par d'Alembert : $R = 1$.

Et ± 1 il y a convergence absolue car $|u_n(\pm 1)| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^2}$, donc $D = [-1, 1]$.

On pose, pour $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$

f est continue sur D car les u_n le sont et la série converge normalement, en effet, $\|u_n\|_{\infty}^{[-1,1]} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$ TGSC

Sur $] -1, 1[$ on peut dériver terme à terme et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} = xg(x)$

Sur $] -1, 1[$ on peut dériver terme à terme $g(x)$ (aussi de rayon 1) et $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-2} = \frac{-1}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$

On en déduit que $g(x) = -\arctan(x) + g(0) = -\arctan(x)$

Puis $f'(x) = -x \arctan(x)$ et comme $f(0) = 0$ on a $f(x) = \int_0^x -t \arctan(t) dt$

Par IPP : $f(x) = \left[-\frac{t^2}{2} \arctan(t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = -\frac{x^2}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{x^2}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} (x - \arctan(x))$

Donc, sur $] -1, 1[$ on a $f(x) = -\frac{1+x^2}{2} \arctan(x) + \frac{x}{2}$ et le résultat reste vrai en ± 1 par continuité de f .

714. RMS 2025 1556 CCINP PSI énoncé p. 117

Soit $F : x \mapsto -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition de F .

(b) Montrer que $\forall x \in]0, 1[, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

SOLUTION. —

(a) $f : t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$, on note encore f ce prolongement.

- si $x \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[$ la fonction prolongée f est continue sur le segment $[0, x]$ donc l'intégrale existe.
- si $x = 1$, f est continue sur $]0, 1[$ et équivalente en 1 à $t \mapsto -\ln(1-t)$. Cette dernière est intégrable en 1 car $t \mapsto -\ln(t)$ est intégrable en 0 (référence)
- si $x > 1$, f n'est pas définie sur $]1, x[$, F n'existe pas

Le domaine de définition de F est $D =] -\infty, 0[\cup]0, 1[$.

(b) j'ai enlevé 0 du domaine initialement dans l'énoncé.

- Démonstration de l'égalité sur $]0, 1[$:

Pour $t \in]0, 1[$ on peut écrire $f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} = -\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-t)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ (vrai aussi pour le prolongement de f défini question 1) : c'est une série entière de rayon $R = 1$.

On peut primitiver la série entière terme à terme sur $] -R, R[$, F est la primitive de f qui s'annule en 0 donc pour $x \in] -1, 1[$ on a $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

- Démonstration de l'égalité en 1 :

- comme $\int_0^1 f$ converge alors par définition $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} F(1)$
- Comme les $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ sont continues et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$ ($\|u_n\|_{\infty}^{[-1,1]} = \frac{1}{n^2}$), alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
- Par unicité de la limite $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$: la formule est encore vraie en $x = 1$.

715. RMS 2025 1557 CCINP PSI énoncé p. 117

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$.

- (a) Montrer que $I_{k,n}$ est définie.
- (b) Calculer $I_{k,n}$.
- (c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
- (d) Nature de $\sum a_n e^n$.
- (e) Nature de $\sum a_n (-e)^n$.
- (f) En déduire le domaine de définition de $\sum a_n x^n$.

SOLUTION. — \approx RMS 2025 1567 CCINP PSI à compléter avec la dernière question de l'autre sujet (2025 1567)

- (a) facile
- (b) Par IPP, pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{k+1,n} = \left[-\frac{e^{-nt}}{n} t^{k+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{k+1}{n} \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt = \frac{k+1}{n} I_{k,n}$
 puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et par récurrence sur k on a $I_{k,n} = \frac{k!}{n^{k+1}}$.
- (c) Par d'Alembert : $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{n!}{n^{n+1}}} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$. Donc $R(\sum a_n x^n) = e$.
- (d) Par Stirling, $a_n e^n = \frac{n!}{n^{n+1}} e^n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^{n+1}} e^n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ TGSD. Par équivalence, $\sum a_n e^n$ diverge
- (e) $u_n = a_n (-e)^n$ est un terme général de série alternée, $a_n (-e)^n \sim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ donc $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 décroissance : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} e = e^{1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ mais $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{n+1}$
 donc $1 - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$ ce qui donne $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq 1$ d'où la décroissance.
 Par le CSSA, $\sum a_n (-e)^n$ converge.
- (f) Vu ce qui précède, le domaine de définition de $\sum a_n x^n$ est $[-e, e[$.

(g) **énoncé de la dernière question de RMS 2025 1567 CCINP PSI**

Démontrer que, pour $|x| < R$, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

correction de la dernière question de RMS 2025 1567 CCINP PSI

On a $\frac{tx}{e^t - tx} = \frac{txe^{-t}}{1 - txe^{-t}}$. Posons $g(t) = txe^{-t}$ de dérivée $g'(t) = x(e^{-t} - te^{-t}) = xe^{-t}(1 - t)$ donc $g(t)$ est majoré par sa valeur en 1 qui est $g(1) = xe^{-1} < 1$: on a donc $0 \leq txe^{-t} < 1$.

On peut alors écrire : $\frac{tx}{e^t - tx} = txe^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (txe^{-t})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} x^n$

Interversion série intégrale : pour $x \in]-e, e[$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = t^n e^{-nt} x^n$

- les u_n sont intégrables sur \mathbb{R}^+ et on calcule $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = x^n I_{n,n} = a_n x^n$ et $\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = a_n |x|^n$
- $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers $t \mapsto \frac{tx}{e^t - tx}$
- $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \sum a_n |x|^n$ converge car $|x| < R$

Le théorème s'applique et on a $\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

716. RMS 2025 1558 CCINP PSI énoncé p. 117

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 e^{-1/t} t^n dt$.

- (a) Montrer que I_n est bien définie. Quel est son signe ?
- (b) Déterminer les variations de (I_n) .
- (c) Montrer la convergence et donner la limite de (I_n) .
- (d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$
- (e) Trouver un équivalent de I_n
- (f) Nature de $\sum I_n$ et de $\sum (-1)^n I_n$?
- (g) Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.
- (h) Soit $x \in]-1, 1[$. On pose $g_n(t) = e^{-1/t} t^n x^n$ si $t \neq 0$ et $g_n(0) = 0$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
- (i) Écrire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ sous la forme d'une intégrale.

SOLUTION. —

- (a) $f : t \mapsto e^{-1/t} t^n$ est continue sur $]0, 1]$ et est prolongeable par continuité par $f(0) = 0$, donc I_n est bien définie.
Par intégration d'une fonction continue strictement positive sur $[0, 1]$, $I_n > 0$.
- (b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-1/t} t^n (t-1) dt \leq 0$ par intégration d'une fonction continue négative sur $]0, 1]$, donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.
- (c) La suite (I_n) est décroissante minorée par 0 donc converge. On note $\ell \geq$ sa limite.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: IPP sur $I_n = \int_0^1 e^{-1/t} t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-1/t} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 e^{-1/t} t^{n-1} dt = \frac{1}{n+1} e^{-1} - \frac{1}{n+1} I_{n-1}$.
Donc $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$
- (e) $(n+1)I_n = e^{-1} + I_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} + \ell > 0$. Donc $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1} + \ell}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\ell = 0$. On en déduit que $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1}}{n}$
- (f) $\sum I_n$ diverge (comparaison à Riemann) et $\sum (-1)^n I_n$ converge par le CSSA.
- (g) Avec l'équivalent de la question 5 et d'Alembert, $R = 1$.
- (h) Soit $x \in]-1, 1[$ fixé. Pour $n \geq 2$ et $t \in [0, 1]$, $g'_n(t) = x^n (e^{-1/t} t^{n-2} + e^{-1/t} n t^{n-1}) = x^n e^{-1/t} t^{n-2} (1 + nt) \geq 0$ donc $\|g_n\|_{\infty}^{[0,1]} = g_n(1) = e^{-1} x^n$ TGSC (série géométrique), donc $\sum g_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
- (i) Les fonction g_n sont continues sur $[0, 1]$ et il y a CVN donc CVU : on peut intervertir série et intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) dt \iff \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{1-tx} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{-1/t} t^n x^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = g(x)$$

Donc $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{1-tx} dt$.

717. RMS 2025 1559 CCINP PSI énoncé p. 118

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.

- (a) Déterminer les rayons de convergence de f et g .
- (b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
- (c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

- (d) Montrer que f est continue sur $] - 1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 .
- (e) Trouver un équivalent de g , puis de f , en 1^- .

SOLUTION. — RMS 2014 943 Centrale PSI

- (a) Les deux rayons de convergence valent 1, par D’ALEMBERT par exemple.
- (b) La fonction g est continue sur $] - 1, 1[$ d’après le théorème de continuité de la somme. La série définissant g sur $] - 1, 0]$ est alternée et satisfait les hypothèses du théorème spécial des séries alternées. On en déduit que g est bien définie en -1 et que

$$|R_n(x)| \leq \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) |x|^{n+1} \leq \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le reste converge uniformément vers 0 donc la somme est continue sur $[-1, 0]$.

- (c) Pour $x \in] - 1, 1[$, on sépare en deux sommes convergentes d’après (a) :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n)x^n = xf(x) - f(x) = (x-1)f(x).$$

- (d) La fonction f est continue sur $] - 1, 1[$ d’après le théorème de continuité de la somme. L’étude en -1 est simple : par continuité de g en -1 ,

$$f(x) = \frac{g(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -1} -\frac{g(-1)}{2}.$$

- (e) Étude en 1 : pour tout $x \in] - 1, 1[$, posons

$$h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\left(\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \right)}_{b_n} x^n = g(x) - \ln(1-x) - x.$$

Comme $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et h est continue en 1. On en déduit que $g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-x)$ puis que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

718. RMS 2025 1560 IMT PSI..... énoncé p. 118

On note $f : x \mapsto e^{e^x - 1}$.

- (a) Calculer le développement limité de f à l’ordre 2 en 0 .
- (b) Que vaut $f^{(n)}(0)$ pour $n = 0, 1, 2$?
- (c) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$. Calculer u_1 et u_2 . Montrer pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq n!$.
- (d) Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est non nul.
- (e) Justifier la dérivabilité de g sur $] - R, R[$ et montrer : $\forall x \in] - R, R[, g'(x) = e^x g(x)$.
- (f) En déduire : $\forall x \in] - R, R[, g(x) = f(x)$.

SOLUTION. — RMS 2015 919 Centrale PC

- (a) $f(x) = e^{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$
- (b) Avec Taylor-Young, $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2$

(c) On raisonne par récurrence complète sur n . L'inégalité $u_0 = 1 \leq 0!$ est vraie. Si $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u_k \leq k!$, alors, compte-tenu de ce qu'une factorielle est toujours plus grande que 1 :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq n!(n+1) = (n+1)!.$$

(d) La majoration $|\frac{u_n x^n}{n!}| \leq |x^n|$ montre que le rayon de convergence de f est ≥ 1 .

(e) Le théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries entières montre que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n.$$

Dans l'expression finale, on reconnaît la somme de la série entière produit de Cauchy de $g(x)$ et de $\exp(x)$. Par conséquent, g est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' - e^x y = 0.$$

(f) Ses solutions sur $] -1, 1[$ sont les fonctions telles que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1, 1[, y(x) = \lambda e^{e^x}$. Comme $g(0) = u_0 = 1$, on obtient : $\lambda = e^{-1}$ et donc

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad g(x) = \exp(e^x - 1) = f(x).$$

REMARQUE. — Le coefficient u_n est appelé le n -ième nombre de Bell. Il compte le nombre de partitions $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_p\}$ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ en blocs π_i non vides, avec la convention $u_0 = 1$: une telle partition est définie par $\forall i, \emptyset \neq \pi_i \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, et $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\cup_{i=1}^p \pi_i = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour prouver cette affirmation, on note B_n le nombre de telles partitions, et on montre que (B_n) satisfait la même relation de récurrence que la suite (u_n) . Décrivons une partition π de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ en notant $k+1$ (avec $0 \leq k \leq n$) le cardinal du bloc auquel appartient $n+1$. Alors π est entièrement déterminée par :

- le choix des k éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui appartiennent au bloc de $n+1$;
- le choix d'une partition sur les $n-k$ éléments restants.

Cette décomposition se traduit clairement par la formule de dénombrement $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$. Le changement d'indice $k \leftarrow n-k$ et la propriété de symétrie des coefficients binomiaux prouvent que cette relation est équivalente à $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$. Voici les valeurs des premiers termes de la suite (on a indiqué les partitions correspondantes pour $n \leq 3$) :

$$\begin{aligned} B_1 &= 1, & \{\{1\}\} \\ B_2 &= 2, & \{\{1\}, \{2\}\}, \quad \{\{1, 2\}\} \\ B_3 &= 5, & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1, 2\}, \{3\}\} \quad \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \quad \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}\} \\ B_4 &= 15 \\ B_5 &= 52 \dots \end{aligned}$$

La relation de la dernière question est la formule de Dobinski.

719. RMS 2025 1561 IMT PSI..... énoncé p. 118

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

- (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
- (b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} . Donner la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Trouver des réels a, b et c tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

SOLUTION. —

(a) Théorème de convergence dominée :

- pour $x \in [0, 1]$: $(1-x)^n e^{-2x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- domination : pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $|(1-x)^n e^{-2x}| \leq e^{-2x} = \varphi(x)$ intégrable sur $[0, 1]$

Par théorème de convergence dominée la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b) une IPP sur I_n donne et $I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, donc $2I_{n+1} + nI_n + I_n = 1$: en passant à la limite : $nI_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$.

(c) L'égalité de la question 2, puis la limite de nI_n de la question 2 donnent :

$$nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n \text{ donc } n(nI_n - 1) = -2 \frac{n}{n+1} (n+1) I_{n+1} - nI_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -2 - 1 = -3.$$

On en déduit que $n^2 I_n - n = -3 + o(1)$ et donc $I_n - \frac{1}{n} = -\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $I_n = 0 + \frac{1}{n} + \frac{-3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

720. RMS 2025 1562 CCINP PSI énoncé p. 118

(a) Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $x \mapsto \sum \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\alpha_n = \int_0^1 (1-t)t^{3n} dt$.

(c) Calculer $\alpha_0 + \dots + \alpha_{N-1}$ de deux manières différentes. En déduire que $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2} dt$.

(d) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$.

(e) Calculer $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$.

SOLUTION. —

(a) Par d'Alembert le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$ est $R = 1$ et en ± 1 il y a convergence absolue ($|u_n(\pm 1)| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{9n^2}$) donc le domaine de définition de $x \mapsto \sum \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$ est $[-1, 1]$.

(b) $\alpha_n = \int_0^1 t^{3n} - t^{3n+1} dt = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

(c) $S_{N-1} = \alpha_0 + \dots + \alpha_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 (1-t)t^{3n} dt = \int_0^1 (1-t) \sum_{n=0}^{N-1} t^{3n} dt$
donc $S_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 (1-t) \frac{1-(t^3)^N}{1-t^3} dt = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2} dt$

(d) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$.

(e) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dt}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2 + 1} =_{u=\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})} \frac{4}{3} \int_{1/\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan(u)]_{1/\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

721. RMS 2025 1563 CCINP PSI énoncé p. 119

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

(a) Montrer que (I_n) est bien définie.

(b) Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

(c) Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

(d) On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

SOLUTION. —

(a) Pour tout n , I_n est définie car on intègre une fonction continue sur un segment.

(b) pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq \ln(1+t^n) \leq t^n$ donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $I_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

(c) $nI_n = \int_0^1 n \ln(1+t^n) dt$. Changement de variable $u = t^n \iff t = u^{\frac{1}{n}}, dt = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du : nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} u^{\frac{1}{n}} du$.

Théorème de convergence dominée :

- pour $u \in]0, 1]$: $\frac{\ln(1+u)}{u} u^{\frac{1}{n}} = \frac{\ln(1+u)}{u} e^{\frac{1}{n} \ln u} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u)}{u}$
- domination : pour $u \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\ln(1+u)}{u} e^{\frac{1}{n} \ln u} \right| \leq \frac{\ln(1+u)}{u} = \varphi(u)$ intégrable sur $]0, 1]$ car continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0.

Par théorème de convergence dominée la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$ et donc $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

(d) $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \int_0^1 \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} du = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n} du$

- La série converge uniformément sur $[0, 1]$ car elle vérifie le CSSA

$$\text{et donc } |R_n(u)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^{k-1}}{k} \right| \leq \left| (-1)^n \frac{u^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les fonctions intégrées sont des polynômes donc continues. On peut donc intervertir somme et intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n} du = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{n} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = S$$

- On pose $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on calcule $S - T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{-2}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2p)^2} = -\frac{1}{2}T$

$$\text{Donc } S = \frac{1}{2}T = \frac{\pi^2}{12}$$

On en déduit que $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{12n}$.

722. RMS 2025 1564 CCINP PSI énoncé p. 119

On note pour $n \in \mathbb{N}^* x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right)$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

(a) Citer le théorème de convergence dominée.

(b) Justifier la définition de I_n .

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

SOLUTION. —

(a) Cours

(b) $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right)$ est continue sur $]0, 1]$ et tend vers 1 quand $x \rightarrow 0$, d'où la définition de I_n .

(c) • Théorème de convergence dominée :

◦ pour $x \in]0, 1]$: $f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$

◦ domination : pour $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$ donc $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{e^x - 1}{x} = \varphi(x)$ intégrable sur $]0, 1]$ car continu et tend vers 1 quand $x \rightarrow 0$

Par théorème de convergence dominée la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

- $\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$: il s'agit d'une série entière de rayon $+\infty$ donc on peut intégrer terme à terme sur $[0, 1]$ (on a CVN donc CVU sur $[0, 1]$) : $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!k}$

723. RMS 2025 1565 IMT PSI énoncé p. 119

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(t)^n} dt$.

(a) Montrer que (a_n) est bien définie.

(b) Étudier la limite de (a_n) .

(c) Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(d) Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

SOLUTION. —

(a) $f_n : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)^n}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et équivalente en $+\infty$ à $(\frac{2}{e^t})^2 = 2^n e^{-nt}$ intégrable (référence) si $n \in \mathbb{N}^*$. Donc (a_n) est bien définie.

(b) Théorème de convergence dominée :

$$\circ f_n(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}^{+*} \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

◦ domination : pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{ch}(t) \geq 1$ donc $\operatorname{ch}^n(t) \geq \operatorname{ch}(t)$ et donc $|f_n(t)| \leq f_1(t) = \varphi(x)$ intégrable sur \mathbb{R}^+ (question 1)

Par théorème de convergence dominée la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

(c) le CSSA donne la convergence

(d) De la question 3 on déduit que $R \geq 1$

Soit $x > 1$ alors $a_n x^n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{ch}(t)}\right)^n dt \geq \int_0^{\operatorname{argch} x} \underbrace{\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(t)}\right)^n}_{\geq 1} dt \geq \operatorname{argch} x > 0$ donc $a_n x^n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: la série

diverge donc $R \leq 1$

Finalement le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = 1$.

724. RMS 2025 1566 CCINP PSI énoncé p. 119

Pour tous p et n dans \mathbb{N}^* , on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p (\ln x)^n dx$.

(a) Montrer que les $I_{n,p}$ sont bien définies.

(b) Déterminer une relation entre $I_{n-1,p}$ et $I_{n,p}$.

(c) Soit $f : x \in]0, 1] \mapsto \frac{1}{x^x}$. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

(d) Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

SOLUTION. — Voir RMS 2016 952 CCP PSI, RMS 2020 1112 Centrale PC, RMS 2020 1386 IMT PC et aussi RMS 2017 183 ENS PC, RMS 2017 757 Mines-Ponts PSI et encore RMS 2015 852 Centrale PSI

La fonction $x \mapsto x^a \ln^b(x)$ est continue sur $]0, 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln^b(x) = 0$ par croissance comparée, ce qui prouve l'existence de $I(a, b)$. Par une intégration par partie, $I(a, b) = -\frac{b}{a+1} I(a, b-1)$ puis, par récurrence,

$$I(a, b) = \frac{(-1)^b b!}{(b+1)^a} I(a, 0) = \frac{(-1)^b b!}{(b+1)^{a+1}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, avec une notation évidente. Or :

- les fonctions u_n sont intégrables sur $[0, 1]$;
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et sa somme $f : x \mapsto \frac{1}{x^x}$ est continue sur $]0, 1]$;
- on a $\int_0^1 |u_n(x)| dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n}{n!} I(n, n) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, qui est le terme général d'une série convergente.

En appliquant le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit la convergence de l'intégrale et l'égalité demandée *via* une translation de l'indice.

725. RMS 2025 1567 CCINP PSI énoncé p. 120

On pose $I_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer l'existence de $I_{n,k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, et la calculer .
- (b) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
- (c) Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{e^n}$ et de $\sum \frac{a_n}{(-e)^n}$.
- (d) Démontrer que, pour $|x| < R$, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

SOLUTION. — \approx RMS 2025 1557 CCINP PSI le rayon étant e , la question 3 est à modifier

(a) existence facile

Par IPP, pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{k+1,n} = \left[-\frac{e^{-nt}}{n} t^{k+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{k+1}{n} \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt = \frac{k+1}{n} I_{k,n}$
 puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et par récurrence sur k on a $I_{k,n} = \frac{k!}{n^{k+1}}$.

(b) Par d'Alembert : $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(n+1)!}{n^{n+2}}}{\frac{n!}{n^{n+1}}} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$. Donc $R(\sum a_n x^n) = e$.

- (c) • Par Stirling, $a_n e^n = \frac{n!}{n^{n+1}} e^n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^{n+1}} e^n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ TGSD. Par équivalence, $\sum a_n e^n$ diverge
- $u_n = a_n (-e)^n$ est un terme général de série alternée, $a_n (-e)^n \sim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ donc $\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$
 décroissance : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} e = e^{1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ mais $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{n+1}$
 donc $1 - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$ ce qui donne $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq 1$ d'où la décroissance
 Par le CSSA, $\sum a_n (-e)^n$ converge.

• Vu ce qui précède, le domaine de définition de $\sum a_n x^n$ est $[-e, e[$.

(d) On a $\frac{tx}{e^t - tx} = \frac{txe^{-t}}{1 - txe^{-t}}$. Posons $g(t) = txe^{-t}$ de dérivée $g'(t) = x(e^{-t} - te^{-t}) = xe^{-t}(1-t)$ donc $g(t)$ est majoré par sa valeur en 1 qui est $g(1) = xe^{-1} < 1$: on a donc $0 \leq txe^{-t} < 1$.

On peut alors écrire : $\frac{tx}{e^t - tx} = txe^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (txe^{-t})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} x^n$

Interversion série intégrale : pour $x \in]-e, e[$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = t^n e^{-nt} x^n$

- les u_n sont intégrables sur \mathbb{R}^+ et on calcule $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = x^n I_{n,n} = a_n x^n$ et $\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = a_n |x|^n$
- $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers $t \mapsto \frac{tx}{e^t - tx}$
- $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \sum a_n |x|^n$ converge car $|x| < R$

Le théorème s'applique et on a $\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

726. RMS 2025 1568 CCINP PSI énoncé p. 120

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Étudier la dérivabilité de f et exprimer f' . Ind. Pour $x \neq \pm 1$, trouver des réels a_x et b_x tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a_x}{1+t^2} + \frac{b_x}{1+x^2t^2}$.

(c) Donner une expression simple de f .

(d) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2} dt$.

SOLUTION. — RMS 2006 1135 CCP PC, RMS 2011 1097 ENSAM PSI, RMS 2014 782 Mines Ponts PC, RMS 2018 987 Mines Ponts PC, RMS 2018 1172 Centrale PSI, RMS 2018 1424 CCP PC, RMS 2020 726 Mines Ponts PSI, RMS 2020 1377 CCINP PC, RMS 2020 1382 IMT PC

On pose $f: (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$. Il s'agit d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

(a) Comme $f(0, t) = 0$ pour tout $t > 0$, l'intégrale $F(0)$ converge et vaut zéro. Comme f est impaire par rapport à la variable x , il en est de même pour F , et il suffit d'étudier la nature de $F(x)$ pour $x > 0$. On fixe donc $x > 0$.

- Quand t tend vers zéro, $f(x, t)$ tend vers la limite finie x : l'intégrale $F(x)$ est faussement impropre en zéro.
- Quand t tend vers l'infini, $f(x, t) \sim \frac{\pi}{2t^3}$, donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On conclut que $D = \mathbb{R}$.

(b) L'hypothèse de domination du théorème de Leibniz est donnée par le calcul suivant : pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{t}{t(1+t^2)(1+x^2t^2)} \right| = \left| \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \right| \leq \varphi(t) := \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable, il s'ensuit que F est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

(c) On effectue le calcul de $F(x)$ pour $x > 0$, et on conclura grâce au caractère impair de F . Si $x \neq 1$, la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ d'indéterminée t est $\frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{x^2-1} [x \arctan(xt) - \arctan(t)]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

De plus, cette expression reste valable pour $x = 1$ par continuité de la dérivée (on a utilisé la positivité stricte de x de manière implicite, en écrivant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(xt) = \frac{\pi}{2}$ dans l'évaluation de l'intégrale). Comme $F(0) = 0$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$. Le caractère impair de F montre ensuite que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(d) L'intégrale est convergente (en zéro, la fonction intégrée a une limite finie égale à 1) et en $+\infty$, elle est dominée par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Son calcul se fait par intégration par parties (on l'écrit sur un segment $[0, a]$, puis on fait tendre a vers $+\infty$) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt = \left[-\frac{(\arctan t)^2}{t} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} dt = 2F(1) = \pi \ln 2.$$

727. RMS 2025 1569 ENSEA PSI énoncé p. 120

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

- (a) Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$, mais pas sur $[0, +\infty[$.
- (b) Montrer que F est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$.
- (c) Montrer que F est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par F .

SOLUTION. — RMS 2016 971 CCP PC, RMS 2017 1445 CCP PC, (RMS 2017 886 Mines Ponts PC, RMS 2020 904 Mines Ponts PC, RMS 2016 601 Mines Ponts PC)

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f_x: t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue positive sur \mathbb{R}^+ et son intégrabilité sur \mathbb{R}^+ dépend donc de son comportement en $+\infty$. Si $x \leq 0$ on a $\forall t \geq 0, 0 < \frac{1}{1+t} \leq f_x(t)$ et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$ diverge (puisque $\ln(1+x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$) il en va de même de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.
En revanche si $x > 0$, alors $0 < f_x(t) < e^{-xt}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge, donc aussi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

(b) Soient $0 < x < y$. On a : $\forall t \geq 0, \frac{e^{-yt}}{1+t} \leq \frac{e^{-xt}}{1+t}$ et puisque les fonctions sont intégrables : $f(y) \leq f(x)$. Ainsi F est décroissante..., et positive.

(c) Posons $f: (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$. On a :

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $f(x, \cdot): t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue (continue par morceaux suffit) et intégrable d'après la question a).
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $f(\cdot, t): x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t}$, qui est continue par rapport à x sur $]0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination locale : soit $[a, b] \subset]0, +\infty[. \forall x \in [a, b], \forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \psi(t)$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $a > 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe \int , F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t} dt.$$

On a alors pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ soit aussi

$$F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}$$

728. RMS 2025 1570 IMT PSI..... énoncé p. 120

Soit $\varphi: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$.

- Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} .
- Montrer que φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- Exprimer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

SOLUTION. — RMS 2010 1020 CCP PSI, RMS 2018 988 Mines Ponts PC, RMS 2018 1361 ENSAM PSI, RMS 2010 1020 CCP PSI, RMS 2018 988 Mines Ponts PC, RMS 2018 1361 ENSAM PSI

- On pose $h(x, t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ pour tout x réel et tout t réel non nul, prolongée par continuité par $h(x, 0) = x$ pour tout réel x , de sorte que l'intégrale proposée soit faussement impropre en zéro. Pour tout réel x et tout réel positif t , la majoration $|h(x, t)| \leq \frac{e^{-t}}{t}$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto h(x, t)$ sur $[1, +\infty[$, donc l'ensemble de définition de f vaut \mathbb{R} .
- La fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos(xt)$. La domination $|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)| \leq e^{-t}$, valable pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-t}$ sur \mathbb{R}_+^* permettent d'appliquer le théorème de Leibniz : la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} \right]_{t=0}^{+\infty} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il en résulte l'existence d'une constante c telle que $f(x) = \arctan x + c$ sur \mathbb{R} . La valeur évidente $f(0) = 0$ fournit $c = 0$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x.$$

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt) dt$.

- (a) Montrer que g est définie sur \mathbb{R}_+^* .
- (b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et déterminer g' .
- (c) En déduire g .

SOLUTION. — RMS 2015 922 Centrale PC, RMS 2016 788 Centrale PSI

dans la correction ci dessous le x n'est pas au bon endroit ? je pense que l'énoncé est à modifier

- (a) La fonction F est définie sur \mathbb{R} , en effet quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f_x : t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx)$ continue sur \mathbb{R}_+^* avec

$$f_x(t) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f_x(t) = b - a,$$

puisque $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \frac{1 - at + o(t) - 1 + bt + o(t)}{t} = b - a + o(1)$. La fonction f_x est donc intégrable.

Soit, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $u(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx) = f_x(t)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on vient de voir que $u(x, \cdot) = f_x$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* , intégrable.
- Pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -(e^{-at} - e^{-bt}) \sin(tx)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot)$ est bien sûr continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* .
- Enfin pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \leq e^{-at} + e^{-bt}$, expression d'une fonction continue par morceaux, intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre donne F de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- (b) Le théorème de régularité des intégrales à paramètre dit aussi que l'on peut dériver sous le signe intégral soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-bt+ixt} dt \right) - \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-at+ixt} dt \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{1}{b-ix} \right) - \text{Im} \left(\frac{1}{a-ix} \right) = \frac{x}{b^2+x^2} - \frac{x}{a^2+x^2}. \end{aligned}$$

Primitivant, il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2} \right) + C.$$

- (c) On définit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ si $t > 0$ et $u(0) = b - a$, ce qui définit une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , car elle est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence $+\infty$. En effet, pour tout réel t , on a $u(t) = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (a^n - b^n) t^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (a^n - b^n) t^{n-1}$. En particulier, elle est de classe \mathcal{C}^1 . Si $x > 0$, on pose aussi $v : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x} \sin(xt)$, qui est de classe \mathcal{C}^1 . L'intégration par parties suivante, pratiquée sur $[0, +\infty[$, est alors justifiée par la limite nulle en $+\infty$ du produit uv :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} u'(t) \sin(xt) dt.$$

La fonction h dont parle l'énoncé est donc u' , d'expression $u'(t) = \frac{t(be^{-bt} - ae^{-at}) - (e^{-at} - e^{-bt})}{t^2}$ pour tout $t > 0$. On a vu plus haut que cette fonction est continue sur \mathbb{R}_+ , et les théorèmes de croissance comparée montrent qu'elle est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Si l'on pose $K = \int_0^{+\infty} |u'(t)| dt$, on déduit du calcul de $F(x)$ ci-dessus et de l'inégalité triangulaire que $|F(x)| \leq \frac{K}{x}$, donc que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

Or d'après l'expression de $F(x)$ donnée à la question (b), on a aussi $\lim F(x) = C$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc

$$C = 0.$$

Variante. Comme $F(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt)$ soit par changements de variables linéaires

$$F(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

écrivait $\frac{e^{-u}}{u} = \frac{e^{-u}-1}{u} + \frac{1}{u}$, on a $g: u \mapsto \frac{e^{-u}-1}{u}$ qui se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R} , donc admettant une primitive G elle-même continue, si bien que $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u} du + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u} = G(b\varepsilon) - G(a\varepsilon) + \ln(\frac{b}{a})$, qui tend vers $G(0) - G(0) + \ln(\frac{b}{a}) = \ln(\frac{b}{a})$ quand ε tend vers zéro, donc $F(0) = \ln(\frac{b}{a})$.

Il vient $c + \frac{1}{2} \ln(\frac{b^2}{a^2}) = \ln(\frac{b}{a})$ donc $c = 0$ et finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right).$$

730. RMS 2025 1572 IMT PSI énoncé p. 121

On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
- (b) Calculer $f'(x)$.

SOLUTION. — je vais un peu plus loin que l'énoncé proposé

(a) pour $x \in \mathbb{R}$ on a $g : t \mapsto \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$ continue sur $[0, +\infty[$

- si $x \neq 0$, $g(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(t)}{t^2} = o(\frac{1}{t^{3/2}})$: g est intégrable
- si $x = 0$: g est nulle donc intégrable

f est définie sur \mathbb{R} . Elle est évidemment paire.

(b) Continuité : On pose $h(x, t) = \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$

- $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}
- pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in [-a, a]$ on a $|h(x, t)| \leq \frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2} = h(a, t) = \varphi(t)$ intégrable sur \mathbb{R}^+ (cas particulier de la question 1)

Donc f est continue sur \mathbb{R}

(c) On pose $h(x, t) = \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$

- $t \mapsto \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+
- $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$ est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{2t^2x}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$
- pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$ on a $|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)| \leq \frac{2t^2b}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \varphi(t)$ intégrable sur \mathbb{R}^+ (car continue sur \mathbb{R}^+ et équivalente à $\frac{cste}{t^2}$ en $+\infty$)

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2x}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt$.

- Pour $x \neq 1$ on a $\frac{2t^2x}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1+t^2} - \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1+x^2t^2}$
donc $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2} dt = \frac{2x}{x^2-1} [\arctan(t) - \frac{1}{x} \arctan(xt)]_0^{+\infty} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{x}) = \frac{\pi}{x+1}$.
- pour $x = 1$ on passe à la limite puisque f est \mathcal{C}^1 : $f'(1) = \frac{\pi}{2}$.

- (d) On en déduit que $f(x) = \pi \ln(1+x) + C$ sur $]0, +\infty[$.
 Par continuité de f sur \mathbb{R} on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = 1$ donc $C = 0$
 et par parité de f on a $f(x) = \pi \ln(1+|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

731. RMS 2025 1573 CCINP PSI énoncé p. 121

On considère $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition D_g de g .
 (b) Montrer que g est de classe C^1 sur D_g et calculer $g'(x)$.
 (c) Déterminer $(g(n))_{n \geq 2}$.
 (d) Déterminer une expression simplifiée de g .

SOLUTION. — RMS 2016 795 Centrale PSI, RMS 2020 719 Mines Ponts PSI

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , positive, et $\frac{\text{sh } t}{t} \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Et comme $\text{sh } t \sim \frac{e^t}{2}$ quand $t \rightarrow +\infty$, on obtient

$$e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{(1-x)t}}{2t}.$$

Lorsque $x > 1$, on a donc $e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} = O_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc la fonction est intégrable.

Lorsque $x \leq 1$, on a au contraire $\frac{1}{t} = O_{+\infty}(e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable, alors l'intégrale diverge. Finalement F est définie sur

$$D_F =]1; +\infty[.$$

- (b) Pour $x > a > 1$, on peut par exemple encadrer l'intégrande par $\forall t > 0, 0 \leq e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} = e^{-at} \frac{\text{sh } t}{t} e^{-(x-a)t} \leq M e^{-(x-a)t}$, où $M = \sup(e^{-at} \frac{\text{sh } t}{t}, t \in \mathbb{R}_+^*)$. En effet la fonction $t \mapsto e^{-at} \frac{\text{sh } t}{t}$ est bornée, puisque continue et de limites finies en 0 (1) et en $+\infty$ (0).

Intégrant cet encadrement, il vient $0 \leq F(x) \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)t} dt = \frac{M}{x-a}$. Par encadrement,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

- (c) Soit $u : (x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t}$, définie sur $]1; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x > 1$, la fonction $u(x, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* , intégrable d'après la première question.
- Pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est de classe C^1 par les théorèmes généraux, et pour tout $(x, t) \in]1; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \text{sh } t$.
- Pour tout $x > 1$, la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $a > 1$, pour tout $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \leq e^{-at} \text{sh } t$, expression d'une fonction continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* , intégrable.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre donne F de classe \mathcal{C}^1 avec

$$\forall x > 1, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} \text{sh } t dt = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(x-1)t} - e^{-(x+1)t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Primitivant, F est de la forme $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) + c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + c$, avec c une constante à déterminer. Comme $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \rightarrow 0$ et comme $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, on a $c = 0$, donc

$$\forall x > 1, \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

732. RMS 2025 1574 CCINP PSI énoncé p. 121

Soit $\alpha > 0$. Soit $f_\alpha : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha t \cos^n t$.

- (a) Donner l'intervalle de définition de f_α .
- (b) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donner une expression simple de $f_\alpha(t)$.
- (c) Pour quelles valeurs de α , l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(t) dt$ converge-t-elle ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t dt$.

- (d) Pour quelles valeurs de α , la série $\sum u_n(\alpha)$ converge-t-elle ?
- (e) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

SOLUTION. — Voir RMS 2016 933 CCEM PSI, RMS 2023 728 Mines-Ponts PSI

- (a) Soit $\alpha > 0$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in]0; \pi/2] \mapsto \sin^\alpha(t) \cos^n(t)$.

Les fonctions f_n sont continues, positives, la série converge simplement et sa somme $S : t \mapsto \frac{\sin^\alpha(t)}{1-\cos(t)}$ est continue.

Si la série $\sum u_n(\alpha) = \sum \int_0^{\pi/2} |f_n|$ converge, alors le théorème d'intégration terme à terme assure que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} S$ et que cette intégrale converge.

Or $S(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2t^{\alpha-2}$, donc si $\alpha \leq 1$, le critère d'équivalence assure que l'intégrale de S diverge en 0. Par contraposée, on conclut alors que la série $\sum u_n(\alpha)$ diverge pour $\alpha \leq 1$.

Pour $\alpha > 1$, on a toujours par le critère d'équivalence le fait que l'intégrale de S converge, cette fois-ci. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0; \pi/2]$, on a $0 \leq \sum_{k=0}^n f_k(t) \leq S(t)$, donc en intégrant $0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(\alpha) \leq \int_0^{\pi/2} S$.

Ainsi la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ est majorée, donc la série converge.

Et le théorème d'intégration terme à terme assure que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} S$.

- (b) En particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{1-\cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos^2(t)}{1-\cos(t)} dt = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos(t) dt = \pi/2 + 1$.

Et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t)}{1-\cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \frac{1-\cos^2(t)}{1-\cos(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t) + \cos(t) \sin(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} dt = \frac{3}{2}$.

733. RMS 2025 1575 CCINP PSI énoncé p. 121

On considère l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' + t y' + y = \frac{1}{t} + t$ sur \mathbb{R}_+^* .

- (a) Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.
- (b) On pose $g : x \mapsto f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si g est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.
- (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

SOLUTION. —

- (a) Cours.
- (b) f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si g est solution de $(E') : z'' + z = e^x + e^{-x} = 2 \operatorname{ch} x$
- (c) Les solutions de (E') sont les $z(x) = A \cos x + B \sin x + \operatorname{ch} x$ donc les solutions de (E) sont $y(t) = A \cos(\ln t) + B \sin(\ln t) + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$

734. RMS 2025 1576 IMT PSI..... énoncé p. 121

Résoudre le système
$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}.$$

SOLUTION. — $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$...

735. RMS 2025 1577 CCINP PSI..... énoncé p. 121

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et (S) le système différentiel $X' = AX$.

- (a) Montrer que A est diagonalisable.
- (b) Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
- (c) On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. Déterminer alors les solutions de (S) .
- (d) Soit (S') le système différentiel $X'' = AX$. Déterminer les solutions réelles de (S') .
- (e) Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de (S') . Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

SOLUTION. —

- (a) En développant selon C_3 , $\chi_A(X) = (X - 3)(X^2 - X - 2) = (X - 3)(X - 2)(X + 1)$. χ_A est scindé sur \mathbb{R} et à racines simples donc A est diagonalisable.

(b) On obtient $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(3, 2, -1)$

- (c) $X = PU$ et $X' = PU'$ puisque P est constante. On injecte dans (S) qui devient $PU' = PDP^{-1}X$ soit

$$U' = DU \quad (S_1)$$

(S_1) est constitué d'équations différentielles donc les solutions de (S_1) sont

$$U = ae^{3t}e_1 + be^{2t}e_2 + ce^{-t}e_3$$

où les e_i sont les vecteurs de la base canonique et a, b, c trois constantes arbitraires.

Les solutions de (S) sont donc les

$$X = PU = ae^{3t}C_1 + be^{2t}C_2 + ce^{-t}C_3$$

où les C_i sont les colonnes de P .

- (d) Avec la même méthode, (S') devient $U'' = DU \quad (S'_1)$ donc les solutions complexes sont

$$U = (ae^{\sqrt{3}t} + a'e^{-\sqrt{3}t})e_1 + (be^{\sqrt{2}t} + b'e^{-\sqrt{2}t})e_2 + (ce^{it} + c'e^{-it})e_3$$

et les solutions réelles sont

$$U = (ae^{\sqrt{3}t} + a'e^{-\sqrt{3}t})e_1 + (be^{\sqrt{2}t} + b'e^{-\sqrt{2}t})e_2 + (d \cos t + d' \sin t)e_3$$

Les solutions réelles de (S') sont donc les

$$X = PU = (ae^{\sqrt{3}t} + a'e^{-\sqrt{3}t})C_1 + (be^{\sqrt{2}t} + b'e^{-\sqrt{2}t})C_2 + (d \cos t + d' \sin t)C_3$$

- (e) X est bornée $\iff a = a' = b = b' = 0$ donc

$$E = \{(d \cos t + d' \sin t)C_3 \mid d, d' \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \dim E = 2$$

736. RMS 2025 1578 CCINP PSI énoncé p. 122

Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on note $f(x, y) = x^2y + y \ln^2(y)$.

- (a) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f .
- (b) Nature globale de ce(s) point(s) critique(s).

SOLUTION. — RMS 2015 858 Centrale PSI

Comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert, les extrema de f sont à chercher parmi ses points critiques. Or

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + \ln^2 y + 2 \ln y)$$

donc $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0$ et $\ln(y)(\ln(y) + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y \in \{1, e^{-2}\}$.

- Nature du point critique $(0, 1)$. On a $f(0, 1) = 0$ et $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$ (l'inégalité est stricte si $(x, y) \neq (0, 1)$). Donc $(0, 1)$ est un minimum (strict) global.

Autrement : $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est bien définie positive.

- Nature du point critique $(0, e^{-2})$. On a $f(0, e^{-2}) = 4e^{-2}$.

$H_f(0, e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont de signes strictement contraires : pas d'extremum local.

Probabilités

737. RMS 2025 1579 Navale PSI énoncé p. 122

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

- (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une distribution de probabilités sur \mathbb{N}^* .
- (b) Déterminer la fonction génératrice de X .
- (c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

SOLUTION. — RMS 2016 961 TPE PSI

- (a) Avec la série géométrique et sa dérivée :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-1/2)^2} - \frac{1}{1-1/2} \right) = 1.$$

- (b) On obtient

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{t}{2}\right)^k \stackrel{k:=k-1}{=} \left(\frac{t}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{t}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{1}{(1-t/2)^2} = \frac{t^2}{(2-t)^2},$$

de rayon $R = 2$.

- (c) Comme $G'_X(t) = \frac{4t}{(2-t)^3}$, le cours dit que

$$E(X) = G'_X(1) = 4.$$

De plus, $G''_X(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$ donc $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + E(X) - E(X)^2$.

$$G''_X(t) = \frac{8(t+1)}{(2-t)^4} \text{ donc } \mathbb{V}(X) = 16 + 4 - 16 = 4.$$

738. RMS 2025 1580 IMT PSI énoncé p. 122

Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$. On dispose $N = an$ boules dans n urnes, indépendamment les unes des autres. Soit T_i la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est vide, égale à 0 sinon. Soient Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = \frac{Y_n}{n}$.

- (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_i .
- (b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

SOLUTION. — RMS 2016 529 Mines Ponts PSI

- (a) Comme T_i prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, sa loi est la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(T_i = 1)$. Or l'urne numéro i reste vide si et seulement si les N boules sont réparties dans les $n - 1$ autres urnes, donc $p = P(T_i = 1) = (1 - \frac{1}{n})^N$.
On a alors

$$E(T_i) = p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N$$

$$V(T_i) = p(1 - p) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N\right).$$

- (b) On a manifestement $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$, donc par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = E(T_i) = (1 - \frac{1}{n})^N$, et par propriétés de la variance,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n V(T_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(T_i, T_j) \right).$$

Or $E(T_i T_j) = P(T_i = 1, T_j = 1) = (1 - \frac{2}{n})^N$ par le même raisonnement qu'à la question précédente, donc $\text{cov}(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) = (1 - \frac{2}{n})^N - (1 - \frac{1}{n})^{2N}$, et finalement

$$V(S_n) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N\right) + \frac{n-1}{n} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^N - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2N} \right).$$

Calcul des limites.

On a $E(S_n) = (1 - \frac{1}{n})^{an} = e^{an \ln(1 - \frac{1}{n})}$, et $n \ln(1 - \frac{1}{n}) = n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = -1 + o(1)$, donc

$$E(S_n) \rightarrow e^{-a}.$$

On obtient de même $(1 - \frac{2}{n})^{an} \rightarrow e^{-2a}$ et $(1 - \frac{1}{n})^{2an} \rightarrow e^{-2a}$, d'où

$$V(S_n) \rightarrow 0.$$

739. RMS 2025 1581 CCINP PSI énoncé p. 122

Une urne contient $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n . On effectue une suite de tirages avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au rang du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule différente de celle obtenue au premier tirage.

- (a) Déterminer la loi de X_n . Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
- (b) Vérifier que X_n est d'espérance finie, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et commenter le résultat obtenu.

On note Y_n la variable aléatoire égale au plus petit rang du tirage pour lequel toutes les boules ont été tirées au moins une fois.

- (c) Déterminer la loi de Y_2 . Déterminer $\mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = j)$.
- (d) Déterminer la loi de Y_3 .

SOLUTION. — RMS 2017 1358 CCP PSI

- (a) Appelons, à partir du second tirage, «succès» le fait de tirer une boule différente de la première. La probabilité de succès est manifestement $\frac{n-1}{n}$, et $T_n = X_n - 1$ mesure le temps d'attente d'un premier succès dans une suite de tentatives indépendantes les unes des autres. Donc T_n est une variable aléatoire discrète de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{n-1}{n})$.

On en déduit que $X_n = T_n + 1$ est une variable aléatoire discrète de loi donnée par $X_n(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$P(X_n = k) = P(T_n = k - 1) = \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

- (b) On sait que la variable T_n admet pour espérance et $E(T_n) = \frac{n}{n-1}$ (loi géométrique) donc, par linéarité, X_n admet une espérance, et

$$E(X_n) = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}.$$

- (c) • On a manifestement $Y_2 = X_2$.
 • On a $Y_3 = X_3 + T$, où T est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ (temps d'attente, à partir du tirage X_3 , du tirage de la boule non encore obtenue). Par suite,

$$Y_3(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\},$$

et pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, on a par σ -additivité et indépendance de X_3 et T (...):

$$\begin{aligned} P(Y_3 = k) &= \sum_{i=2}^{k-1} P(X_3 = i, T = k-i) = \sum_{i=2}^{k-1} P(X_3 = i)P(T = k-i) = \sum_{i=2}^{k-1} \frac{2}{3^{i-1}} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-1} \\ &= \frac{2}{3^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-3} 2^j = \frac{2}{3^{k-1}} (2^{k-2} - 1) = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}. \end{aligned}$$

Rq. On obtient, en itérant, la formule générale $Y_n = \sum_{k=1}^n T_k$, où T_k suit une loi géométrique de paramètre $\frac{k}{n}$.

740. RMS 2025 1582 CCINP PSI énoncé p. 122

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant N boules, dont r blanches et $N - r$ noires. On effectue des tirages successifs et sans remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches.

- (a) Déterminer la loi de X et son espérance pour $r = 1$ et $r = N$.
 (b) Dans cette question, $1 < r < N$.
 i. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
 ii. Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$.
 (c) Donner une relation entre $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$, puis montrer que $\mathbb{E}(X) = r \frac{N+1}{r+1}$.
Ind. On pourra raisonner par récurrence sur N .

SOLUTION. — RMS 2022 1180 CCINP PSI, Version détaillée de ??-RMS 2016 528 Mines Ponts PSI.

- (a) Si $r = N$, alors X est la variable constante égale à N , donc $X(\Omega) = \{N\}$, $P(X = N) = 1$ et $E(X) = N$.
 Si $r = 1$, alors $X(\Omega) = \llbracket 1; N \rrbracket$ et en notant B_i l'événement « la i -ème tirage donne la boule blanche », on a pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\{X = k\} = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$, donc par formule des probabilités composées et dénombrement direct des cas favorables :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \cdots P_{\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}})P_{\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-2}} \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \dots \times \frac{N-k+1}{N-k+2} \times \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N} \text{ par télescopage,} \end{aligned}$$

donc X suit dans ce cas la loi uniforme sur $\llbracket 1; N \rrbracket$, de sorte que $E(X) = \frac{N+1}{2}$.

Rq. La variable X est dans ce cas le temps d'attente d'un premier succès, mais comme les tirages sont sans remise, les différentes tentatives ne sont pas indépendantes les unes des autres, et la probabilité de succès change à chaque nouvelle tentative, donc on n'est pas dans le cadre de la loi géométrique.

- (b) i. On a manifestement $X(\Omega) = \llbracket r; N \rrbracket$, le cas minimal $X = r$ étant réalisé si les r premières boules tirées sont blanches, et le cas maximal $X = N$ étant réalisé si l'on doit vider l'urne pour obtenir la dernière boule blanche.

- ii. Soit $k \in \llbracket r; N \rrbracket$. L'événement $\{X = k\}$ est réalisé ssi la k -ème boule tirée est blanche et les $r - 1$ autres boules blanches ont été tirées aux cours des $k - 1$ premiers tirages.
 Il y a alors $\binom{k-1}{r-1}$ choix possibles pour les rangs auxquels sortent les $r - 1$ premières boules blanches, et $r!$ ordres possibles de sortie des r boules blanches, puis $\binom{N-r}{k-r}$ choix possibles pour les $k - r$ boules noires qui seront sorties au cours du processus, et $(k - r)!$ ordres possibles de sortie de ces $k - r$ boules noires.
 Le nombre de tirages constituant l'événement $\{X = k\}$ est donc de $\binom{k-1}{r-1} r! \binom{N-r}{k-r} (k - r)! = \binom{k-1}{r-1} \frac{r!(N-r)!}{(N-k)!}$, alors que le nombre de tirages sans remise possibles de k boules parmi N est de $N(N - 1) \cdots (N - k + 1) = \frac{N!}{(N-k)!}$.
 Par équiprobabilité de ces tirages, on a alors :

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1} \frac{r!(N-r)!}{(N-k)!}}{\frac{N!}{(N-k)!}} = \binom{k-1}{r-1} \frac{r!(N-r)!}{N!} = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

- (c) i. Si $p \geq q \geq 1$, alors $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p(p-1)!}{q(q-1)!(p-1-(q-1))!} = \frac{p}{q} \binom{p-1}{q-1}$ (encore valable si $p < q$ car c'est alors $0 = 0$).

ii. Donc $E(X) = \sum_{k=r}^N k P(X = k) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N k \binom{k-1}{r-1} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r}$.

Vu la formule donnée, il reste à montrer que $\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \frac{N+1}{r+1} \binom{N}{r}$, i.e. que $\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1}$ par le point précédent, ce qui se fait par récurrence sur N :

- C'est vrai pour $N = r$ puisque l'égalité voulue est alors $1 = 1$.
- Si c'est vrai pour $N - 1$, alors $\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N}{r} + \sum_{k=r}^{N-1} \binom{k}{r} = \binom{N}{r} + \binom{N}{r+1} = \binom{N+1}{r+1}$ par triangle de Pascal.

On a donc bien $\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1} = \frac{N+1}{r+1} \binom{N}{r}$ puis $E(X) = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

741. RMS 2025 1583 CCINP PSI énoncé p. 123

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que X suive la loi de Poisson de paramètre λ et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est une loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

- Déterminer la loi de (X, Y) .
- Déterminer la loi de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- Exprimer la loi de $Z = X - Y$.

SOLUTION. — *Hyper classique, non ? Je n'ai pas cherché les occurrences passées de cet exercice. CC.*

- (a) (X, Y) prend ses valeurs dans \mathbb{N}^2 et, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$P((X, Y) = (n, k)) = P(X = n, Y = k) = P_{(X=n)}(Y = k)P(X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à X , on a

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k, X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ainsi, Y suit la loi de Poisson de paramètre λp .

- (c) X et Y ne sont pas indépendantes, puisque, par exemple, $P(X = 1)P(Y = 2) \neq 0$, alors que $P(X = 1, Y = 2) = 0$.
- (d) Puisqu'on a toujours $X \geq Y$, Z est à valeurs dans \mathbb{N} . Si $\ell \in \mathbb{N}$, on a alors, toujours via la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à X ,

$$P(Z = \ell) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = \ell, X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n - \ell, X = n) = \sum_{n=\ell}^{+\infty} \binom{n}{n-\ell} p^{n-\ell} (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

et un calcul tout à fait analogue au précédent prouve que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

742. RMS 2025 1584 CCINP PSI énoncé p. 123

Soient $p \in]0, 1[$, (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 tel que $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n$ si $k \leq n$, et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ sinon.

- (a) Déterminer la loi de Y .
- (b) Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0. Justifier que $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
- (c) Déterminer la loi de X .

SOLUTION. — *Hyper classique, non ? Je n'ai pas cherché les occurrences passées de cet exercice. CC.*

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à X , on a

$$P(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = n, X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n = p(1-p)^n.$$

Ainsi, on peut dire que $Y + 1 \sim \mathcal{G}(p)$.

- (b) Très banal, presque du cours (expression de la dérivée k -ème terme à terme de la somme géométrique $\frac{1}{1-x}$).
- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à X , on a

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n = p(1-p)^n = p \left(\frac{1-p}{2} \right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2} \right)^{n-k} = \frac{p \left(\frac{1-p}{2} \right)^k}{\left(1 - \left(\frac{1-p}{2} \right) \right)^k}$$

Puisque $\frac{2p}{1+p} = 1 - \frac{1-p}{1+p}$, on peut reformuler en disant que $X + 1 \sim \mathcal{G} \left(\frac{2p}{1+p} \right)$.

743. RMS 2025 1585 CCINP PSI énoncé p. 123

On note, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \alpha \lambda^n$ la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants, où $0 < \lambda < 1$ et $(1 + \alpha)\lambda < 1$. La probabilité d'avoir un garçon est $q = 1 - p$, où $p \in]0, 1[$ est la probabilité d'avoir une fille.

- (a) Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.
- (b) Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
- (c) Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons.
- (d) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins deux garçons, sachant qu'elle en a au moins un.

SOLUTION. —

- (a) Si on note chromosomiquement X le nombre de garçons, Y le nombre de filles et $Z := X + Y$ le nombre total d'enfants, la probabilité de ne pas avoir d'enfants est, par σ -additivité,

$$P(Z = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z = n) = 1 - \frac{\alpha \lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 - \lambda(1 + \alpha)}{1 - \lambda},$$

et l'hypothèse faite sur α et λ assure que ce nombre est bien strictement positif.

(b) Banal (dérivation k -ème terme à terme du développement en série de $\frac{1}{1-x}$). On obtient $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

(c) D'abord le modèle indique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de garçons X suit, conditionnellement à l'événement $(Z = n)$, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à Z , on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k, Z = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(Z=n)}(X = k)P(Z = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} \alpha \lambda^n \\ &= \frac{\alpha(1-p)^k}{p^k} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda p)^n \\ &= \frac{\alpha(1-p)^k}{p^k} \frac{(\lambda p)^k}{(1-\lambda p)^{k+1}} \\ &= \alpha \left(\frac{\lambda - \lambda p}{1 - \lambda p} \right)^k \frac{1}{1 - \lambda p} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$, on calcule comme précédemment la différence suivante :

$$P(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1 - \frac{\alpha}{1 - \lambda p} \frac{\frac{\lambda - \lambda p}{1 - \lambda p}}{1 - \frac{\lambda - \lambda p}{1 - \lambda p}} = 1 - \alpha \frac{\lambda - \lambda p}{(1 - \lambda)(1 - \lambda p)}$$

(d) On souhaite donc exprimer $P(X \geq 2 | X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)}$. Si on note $r := \frac{\lambda - \lambda p}{1 - \lambda p}$ et $\beta := \frac{\alpha}{1 - \lambda p}$, on a, pour tout $k \geq 1$, $P(X = k) = \beta r^k$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) = \beta \frac{r^n}{1-r}$. On en déduit donc que

$$P(X \geq 2 | X \geq 1) = r = \frac{\alpha}{1 - \lambda p}.$$

744. RMS 2025 1586 CCINP PSI énoncé p. 123

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, toutes les deux de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

- (a) Rappeler la loi de X , son espérance et sa variance.
- (b) On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
- (c) Même question avec $U + V$ et $U - V$.

SOLUTION. — *Encore un très probable classique dont je n'ai pas cherché les références antérieures. CC*

- (a) Cours.
- (b) Non : puisque, pour tout $k \geq 0$ ($U = k$) et ($V = k$) contiennent $(X = k, Y = k)$, on a $P(U = k) \geq P(X = k, Y = k) = P(X = k)^2 > 0$ et idem pour $P(V = k)$. Or, si $\ell < k$, on a $(U = k, V = \ell) = \emptyset$, et donc $P(U = k, V = \ell) = 0 < P(U = k)P(V = \ell)$.
- (c) Non plus : puisque U et V sont à valeurs entières, les variables $U + V$ et $U - V$ ont la même parité. Donc l'événement $(U + V = 2, U - V = -1)$ est impossible. Or $(U + V = 2) \supset (U = 0, V = 2) \supset (X = 0, Y = 2)$, et donc $P(U + V = 2) \geq P(X = 0, Y = 2) = P(X = 0)P(Y = 2) > 0$. Et, de même, $(U - V = -1) \supset (U = 1, V = 2) \supset (X = 1, Y = 2)$, et donc $P(U - V = -1) \geq P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 2) > 0$. On a donc

$$P(U + V = 2, U - V = -1) = 0 < P(U + V = 2, U - V = -1).$$

745. RMS 2025 1587 CCINP PSI énoncé p. 123

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance et de variance finies. On suppose que $X + Y + 1 \sim \mathcal{G}(p)$, où $0 < p < 1$.

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de X .
- (b) Déterminer la fonction génératrice de X .
- (c) En déduire la loi de X .

SOLUTION. —

- (a) Linéarité de l'espérance et $X \sim Y$: $\mathbb{E}(X + Y + 1) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = \frac{1}{p}$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{2p}$
 $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim Y$: $\mathbb{V}(X + Y + 1) = 2\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = \frac{q}{2p^2}$
- (b) Les variables X, Y et 1 sont indépendantes donc $G_{X+Y+1}(t) = G_X G_Y G_1 = (G_X(t))^2 t = \frac{pt}{1-qt}$ donc $G_X(t) = \pm \sqrt{\frac{p}{1-qt}}$ mais sur $[0, 1]$ on doit avoir une fonction positive car $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$ somme de termes positifs, alors $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}$
- (c) par unicité du DSE et sachant que : $G_X(t) = \sqrt{p}(1-qt)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $\mathbb{P}(X = n) = \sqrt{p} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-n+1)}{n!} (-q)^n = \sqrt{p} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} q^n = \sqrt{p} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} q^n = \sqrt{p} \binom{2n}{n} \left(\frac{q}{4}\right)^n$.

746. RMS 2025 1588 CCINP PSI énoncé p. 124

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X_k \sim \mathcal{B}(p_k)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} = p \in [0, 1]$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Déterminer l'espérance de $\frac{S_n}{n}$.
- (b) Déterminer la limite éventuelle de $(\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}))_{n \geq 1}$.
- (c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0$.
- (d) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = 0$.

SOLUTION. —

- (a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}$.
- (b) Par indépendance des X_k , $\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{(p_1)(1-p_1) + \dots + p_n(1-p_n)}{n^2} \leq \frac{p_1 + \dots + p_n}{n^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (c) Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}(\frac{S_n}{n})}{(\frac{\varepsilon}{2})^2} \iff \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$
- (d) Inégalité triangulaire : $|\frac{S_n}{n} - p| \leq |\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| + |\frac{p_1 + \dots + p_n}{n} - p|$
 Par hypothèse, il existe N tel que si $n \geq N$, $|\frac{p_1 + \dots + p_n}{n} - p| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,
 pour un tel n on a donc $|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq |\frac{S_n}{n} - p| - \frac{\varepsilon}{2}$
 Soit $n \geq N$ alors $(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \implies (|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq \frac{\varepsilon}{2})$
 donc, avec la question 3, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

747. RMS 2025 1589 CCINP PSI énoncé p. 124

- (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que M soit diagonalisable sur \mathbb{R} .

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre p_1 et p_2 respectivement.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(Y > n)$.
- (c) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
- (d) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

SOLUTION. —

(a) Le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $X^2 - 2bX + a^2$ de discriminant $\Delta = 4(b^2 - a^2)$.

- si $|a| < |b|$ il y a deux valeurs propres réelles distinctes : M est diagonalisable.
- si $|a| > |b|$ il n'y a pas de valeur propre réelle : M n'est pas diagonalisable.
- si $|a| = |b|$: il y a une valeur propre réelle double $\lambda = b$ donc M est diagonalisable ssi elle est égale à bI_2 ce qui n'est le cas que si $a = b = 0$

Donc M est diagonalisable ssi ($|a| < |b|$ ou $a = b = 0$)

(b) Pour une loi géométrique $Y \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{P}(Y > n) = (1 - p)^n = q^n$ (où on a noté $q = 1 - p$).

(c) Avec les lois géométriques, (M est diagonalisable) ssi ($|X| < |Y|$ ou $X = Y = 0$) ssi ($X < Y$) donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \text{ diagonalisable}) &= \mathbb{P}(X < Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = n) \cap (Y > n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y > n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} p q^n = \frac{pq}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q} = \frac{1 - p}{2 - p}. \end{aligned}$$

(d) Avec les lois binomiales $\mathcal{B}(n, 1/2)$, (M est diagonalisable) ssi ($|X| < |Y|$ ou $X = Y = 0$) donc

$$\mathbb{P}(M \text{ diagonalisable}) = \mathbb{P}((X < Y) \sqcup (X = Y = 0)) = \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

On a $\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y) = 1$

or par analogie des rôles de X et Y on a $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X) = \mathbb{P}(X > Y)$ donc $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(X = Y))$ et

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 p^{2k} q^{2(n-k)}$$

$$\mathbb{P}(M \text{ diagonalisable}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 p^{2k} q^{2(n-k)} \right) + q^{2n}$$

je ne vois pas comment simplifier davantage