Énoncés

Centrale-Supélec

Algèbre

527. RMS 2025 1269 Centrale PSI solution p. 348
Mots-clés : Polynômes de Tchebychev de première espèce
Soit (P_n) la suite à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2, P_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

(a) Déterminer le degré de P_n. Étudier la parité de P_n.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

(c) Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

528. RMS 2025 1270 Centrale PSI solution p. 349
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MA - AM$.

(a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme non injectif.

(b) Trouver la dimension du noyau de Φ_A dans le cas où $A = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$.

(c) Soit $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Montrer que Φ est linéaire et trouver son noyau.

529. RMS 2025 1271 Centrale PSI solution p. 349
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \operatorname{rg}(f^k)$.

(a) Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.

(b) Montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante. Ind. On pourra considérer $g : x \in f^k(E) \mapsto f(x) \in f^{k+1}(E)$.

530. RMS 2025 1272 Centrale PSI solution p. 350
Soit $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\operatorname{rg} A \leqslant \operatorname{rg} C_1 + \operatorname{rg} C_2$.

(b) Montrer que $\operatorname{rg} A \leqslant \sum_{k=1}^{4} \operatorname{rg} A_k$.

(c) Si $\operatorname{rg} A_1 = \operatorname{rg} A_4 = n$ et $A_3 = 0$, la matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner A^{-1}.

531. RMS 2025 1273 Centrale PSI .... solution p. 350

Soient a, b, c des réels positifs tels que $a + b + c = 1$.

(a) Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Montrer qu'il existe u de module 1 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels positifs tels que $z_1 = \alpha_1 u, z_2 = \alpha_2 u$ et $z_3 = \alpha_3 u$.

(b) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver ses valeurs propres.

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Quelle est la limite de la suite $(M^n)_{n \geqslant 1}$?

532. RMS 2025 1274 Centrale PSI .... solution p. 351

Soit $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$ et son déterminant.

(b) Déterminer le noyau et l'image de la matrice.

(c) La matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?

533. RMS 2025 1275 Centrale PSI .... solution p. 351

Soit la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $m_{i,j} = a$ si $i = j$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

(a) Déterminer les puissances de M.

(b) Déterminer les éléments propres de M.

534. RMS 2025 1276 Centrale PSI .... solution p. 352

(a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie possédant exactement deux valeurs propres distinctes, λ_1 et λ_2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \mathrm{id}$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

535. RMS 2025 1277 Centrale PSI .... solution p. 353

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont impairs et que les autres sont pairs. Montrer que $\det(M)$ est impair.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(X^T X)$.

536. RMS 2025 1278 Centrale PSI .... solution p. 353

On définit l'application ϕ qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2 P$ par $X^4 - 1$.

(a) Montrer que ϕ est un endomorphisme et donner sa matrice A dans la base canonique.

(b) Montrer que ϕ est diagonalisable et donner ses valeurs propres ainsi que ses sous espaces propres.

(c) L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, donner son l'inverse.

537. RMS 2025 1279 Centrale PSI .... solution p. 354

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2). On note p le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$.

(a) Déterminer la matrice A de p dans la base canonique.

(b) Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\psi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par $\forall g \in \mathcal{L}(E), \psi_f(g) = f \circ g - g \circ f$. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\psi_f(g) = g$.

(c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \psi_f(g^k) = kg^k$.

(d) En déduire que g est nilpotent.

538. RMS 2025 1280 Centrale PSI .... solution p. 354

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$. On suppose qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de f de degré inférieur ou égal à 2 .

(a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$. En déduire $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.

(c) Soit x non nul dans $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.

(d) Construire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

539. RMS 2025 1281 Centrale PSI .... solution p. 355

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(AM) I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Exprimer Φ^2 en fonction de Φ.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit diagonalisable. Préciser ses espaces propres.

540. RMS 2025 1282 Centrale PSI .... solution p. 355

Soient $A, B, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que U est non nulle et que $AU = UB$.

(a) Montrer que, si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule A, alors toute valeur propre de A est racine de P.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X], P(A)U = UP(B)$.

(c) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing$.

541. RMS 2025 1283 Centrale PSI .... solution p. 356

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$. On note $d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_2\right\}$.

(a) Montrer que M est diagonalisable, que ses valeurs propres sont de module égal à 1 et que $|\mathrm{tr}(M)| \leqslant 2$.

(b) On suppose que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Donner les valeurs possibles de d.

(c) On suppose que les valeurs propres de M sont toutes dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que M a pour polynôme annulateur $X^2 + 1, X^2 - X + 1$ ou $X^2 + X + 1$. Donner les valeurs possibles de d.

542. RMS 2025 1284 Centrale PSI .... solution p. 357

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.

(b) On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.

i. Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0$.

ii. Montrer que $A = 0$.

(c) On suppose seulement que U et V sont semblables. Montrer que A est nilpotente. Étudier la réciproque dans le cas $n = 1$ puis $n = 2$.

543. RMS 2025 1285 Centrale PSI .... solution p. 357

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f_A(M) = AM$.

(a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

(b) Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\left(X_i Y_j^T\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) On suppose que A est diagonalisable. Construire une base de vecteurs propres de f_A à partir d'une base de vecteurs propres de A.

544. RMS 2025 1286 Centrale PSI .... solution p. 358

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.

On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $q(M)$ diagonalisable et $q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.

(b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $(p \circ q)(M) = 0$.

(c) Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k$ les racines distinctes de p. En considérant les polynômes $(q(X) - \beta_j)$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $p \circ q$ et conclure.

545. RMS 2025 1287 Centrale PSI .... solution p. 359

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E.

(a) Montrer que, si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.

(b) Montrer que, si f est diagonalisable, alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

(c) Soit λ une valeur propre complexe non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu\,\mathrm{id})$.

(d) Montrer que, si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.

(e) Montrer que, si f^2 est diagonalisable, alors f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$

546. RMS 2025 1288 Centrale PSI .... solution p. 359

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on pose, pour $0 \leqslant i \leqslant 3$, $L_i(X) = \prod\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 3 \\ k \neq i}} \frac{X-k}{i-k}$.

(a) En calculant $L_i(k)$, montrer que les L_i forment une base de E.

(b) On pose $\phi : (P, Q) \in E^2 \mapsto \sum\limits_{k=0}^{3} (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

(c) Déterminer une base orthonormée de E pour ϕ.

547. RMS 2025 1289 Centrale PSI .... solution p. 360

On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice $A_{\mathcal{B}}$ par $(A_{\mathcal{B}})_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$.

(a) Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. On note X et Y les matrices colonnes donnant leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$. Montrer que $\langle x, y\rangle = X^T A_{\mathcal{B}} Y$.

(b) On considère une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer : $A_{\mathcal{C}} = P^T A_{\mathcal{B}} P$.

(c) En raisonnant d'abord pour $n = 2$, puis $n \geqslant 3$, montrer que $\det(A_{\mathcal{B}}) > 0$ et $\operatorname{tr}(A_{\mathcal{B}}) > 0$.

(d) Montrer que $A_{\mathcal{B}}$ est définie positive.

548. RMS 2025 1290 Centrale PSI .... solution p. 360

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

(a) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par M^T.

(b) Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ stable par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

549. RMS 2025 1291 Centrale PSI .... solution p. 361

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Soient $f_1, \ldots, f_n \in E$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$.

(a) Montrer que les $a_{i,j}$ sont bien définis.

(b) Montrer que A est symétrique et que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T A Y$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

550. RMS 2025 1292 Centrale PSI .... solution p. 361

Soit E un espace euclidien.

(a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal. Montrer que p est autoadjoint et 1-lipschitzien.

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.

(b) Montrer que χ_{p+q} est scindé sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que les racines de χ_{p+q} appartiennent à $[0, 2]$.

551. RMS 2025 1293 Centrale PSI .... solution p. 362

Soient E un espace euclidien, $v \in E \backslash \{0\}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f : x \in E \mapsto x - \lambda \langle x, v\rangle v$.

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que f est autoadjoint.

(b) Déterminer les λ pour lesquels f est une isométrie. Dans ce cas, f est un endomorphisme remarquable ; le déterminer et donner ses caractéristiques.

(c) On suppose λ quelconque. Donner les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

552. RMS 2025 1294 Centrale PSI .... solution p. 362

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ tels que $A^n = A^T$. On pose $B = A^{n+1}$ et on note u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à A (resp. B).

(a) Montrer que B est symétrique positive.

(b) Calculer B^n. Qu'en déduit-on sur le spectre de B ?

(c) Montrer que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(v) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

(e) Déterminer $u_{|\mathrm{Ker}(v)}$ et étudier la nature de $u_{|\mathrm{Im}(v)}$.

553. RMS 2025 1295 Centrale PSI .... solution p. 363

Soit $H = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$.

(a) Pour $X = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on note $q(X) = X^T H X$. Montrer que $q(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1})^2 \,\mathrm{d}t$. En déduire que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) On note λ_n la plus petite valeur propre de H_n et μ_n la plus grande. Montrer que $n\lambda_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k} \leqslant n\mu_n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

(c) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \lambda_n \|X\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant \mu_n \|X\|_2^2$.

554. RMS 2025 1296 Centrale PSI .... solution p. 364

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose $a_{i,j} > 0$ pour tous i, j. Est-ce que les valeurs propres de A sont toutes positives ?

(b) On note $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les valeurs propres de A. Montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2$.

(c) On suppose $\alpha_i \geqslant 0$ pour tout i. Redémontrer que $X^T A X \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. En déduire que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{i,i}a_{j,j} \geqslant a_{i,j}^2$.

555. RMS 2025 1297 Centrale PSI .... solution p. 364

Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. On dit que f est 1-lipschitzien si, pour tout $x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

(a) Montrer que f est 1-lipschitzien si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f), |\lambda| \leqslant 1$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\forall x \in E, \|P(f)(x)\| \leqslant \sup\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \|x\|$.

556. RMS 2025 1298 Centrale PSI .... solution p. 364

Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, on pose $q(X) = \frac{X^T A X}{X^T X}$.

(a) Énoncer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.

(b) Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A, distinctes ou non. Montrer que $\lambda_3 = \max\{q(X), X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}\}$. Énoncer une propriété similaire pour λ_1.

(c) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour $P \in \mathcal{P}$, justifier l'existence de $\max\left\{X^T A X; X \in P, \|X\| = 1\right\}$, puis montrer que : $\lambda_2 = \min\limits_{P\in\mathcal{P}} \left(\max\left\{X^T A X; X \in P, \|X\| = 1\right\}\right)$.

Analyse

557. RMS 2025 1299 Centrale PSI .... solution p. 365

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $a\in\mathbb{R}$ et $P\in E$, on pose $N_a(P)=|P(a)|+\displaystyle\int_0^1|P'(t)|\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que N_a est une norme sur E.

(b) i. Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.

ii. Montrer qu'une suite de polynômes (P_n) converge dans (E,N_0) si et seulement si elle converge dans (E,N_1).

(c) Soit $(a,b)\in[0,1]^2$. Montrer que N_a et N_b sont équivalentes.

(d) Soit $(a,b)\in[1,+\infty[^2$ avec $a<b$. Montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes. Ind. Poser $P_n=X^n$.

(e) Que dire si $E=\mathbb{R}_n[X]$?

558. RMS 2025 1300 Centrale PSI .... solution p. 366

On étudie la série $\sum(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(a) Justifier la convergence de la série.

(b) Exprimer $\sum\limits_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à l'aide de factorielles.

(c) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

559. RMS 2025 1301 Centrale PSI .... solution p. 366

Soit, pour $n\in\mathbb{N}, u_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

(a) Montrer que (u_n) est définie et tend vers 0 .

(b) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}u_n$ converge.

560. RMS 2025 1302 Centrale PSI .... solution p. 367

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\neq-1$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $v_n=\frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}v_k=1-\frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

(b) Montrer que, si (u_n) est à termes positifs, alors $\sum v_n$ converge.

(c) Montrer que, si $\sum|u_n|$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

561. RMS 2025 1303 Centrale PSI .... solution p. 367

Soit $E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on définit $\varphi(f):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ par $\varphi(f)(0)=f(0)$ et, pour tout $x>0, \varphi(f)(x)=\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ.

(c) Étudier les éléments propres de φ.

562. RMS 2025 1304 Centrale PSI .... solution p. 368

Soient $h>0$ et $W_h=\{f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}); \forall x\in\mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f = 2\int_x^{x+h} f\}$.

(a) Montrer que W_h est un espace vectoriel.

(b) Pour $n\geqslant 1$, on pose $f_n\colon x\mapsto \sin(\frac{2\pi n x}{h})$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille libre d'éléments de W_h. Qu'en déduit-on quant à la dimension de W_h ?

(c) L'espace vectoriel W_h possède-il une fonction non bornée ?

563. RMS 2025 1305 Centrale PSI .... solution p. 368

Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose $T(f)(0)=f(0)$ et, pour $0<x\leqslant 1$, $T(f)(x)=\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?

(b) Soient $f,g\in E$. On pose $F: x\mapsto x\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

i. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire F' sous la forme d'une intégrale.

ii. Montrer que, si f et g sont monotones de même sens de variation, alors $T(fg)\geqslant T(f)T(g)$.

564. RMS 2025 1306 Centrale PSI .... solution p. 369

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ tel que $|z|<1$. Soient $I=[0,2\pi]$ et $f: t\in I\mapsto \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}$.

(a) Montrer que $t\mapsto |z-e^{it}|$ ne s'annule pas sur I puis que f est continue sur I.

(b) Montrer que $u:t\mapsto 1, v:t\mapsto e^{it}$ et $w:t\mapsto e^{-it}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

(c) Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$, que l'on déterminera, tel que $\forall t\in I, f(t)=-1+\frac{\alpha}{1-ze^{it}}+\frac{\beta}{1-\bar{z}e^{-it}}$.
Plutôt $-1+\frac{\alpha}{1-ze^{-it}}+\frac{\beta}{1-\bar{z}e^{it}}$ CC.

(d) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

565. RMS 2025 1307 Centrale PSI .... solution p. 370

Soit $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Justifier la convergence de I.

(b) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}, \sin^3 t=-\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)$.

(c) Montrer que $I=\frac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(d) Montrer que $g: t\mapsto \frac{\sin(t)-t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 .

(e) En déduire la valeur de I.

566. RMS 2025 1308 Centrale PSI .... solution p. 371

Soient $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et $F\colon x\mapsto\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$. On suppose que $f(x)F(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell\in\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser cette limite.

(b) Soit $g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $g(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell'\in\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell'$.

(c) Trouver un équivalent de F et de f en $+\infty$.

567. RMS 2025 1309 Centrale PSI .... solution p. 372
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ et, pour $x < 0$, $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$.

(a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

(b) La convergence est elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

568. RMS 2025 1310 Centrale PSI .... solution p. 372
Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \frac{1+\sin(2\pi nx)}{1+n^2x^2}$.

(a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?

Soient $\varepsilon > 0$ fixé, $A_n = f_n^{-1}(([\varepsilon, +\infty[)$ et $u_n = \mathbf{1}_{A_n}$.

(b) Tracer le graphe de f_5 et en déduire que u_n est continue par morceaux.

(c) Montrer que la suite (u_n) converge simplement et donner sa limite.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = 0$.

569. RMS 2025 1311 Centrale PSI .... solution p. 373
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n\colon t \mapsto \frac{e^{-nt^2}}{n^2}$.

(a) Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) Prouver que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

570. RMS 2025 1312 Centrale PSI .... solution p. 374
Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n\colon x \mapsto x^{\ln(n)}$. Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathscr{D}_f$?

(b) Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$.

(c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f_n au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

571. RMS 2025 1313 Centrale PSI .... solution p. 375
On pose, pour $x > 0$ et $n \geqslant 2, U_n(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n$. On admet que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente.

(a) Donner le domaine de convergence D de $S\colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} U_n(x)$.

(b) La convergence de cette série est-elle normale sur D ?

(c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n\colon x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$. Montrer que, pour tout x appartenant à D et tout $n \geqslant 2$ on a $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

(d) En déduire que S est continue sur D. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

572. RMS 2025 1314 Centrale PSI .... solution p. 376

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$ est égal à 1 .

(b) Rayon de convergence et somme de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} z^n$.

(c) Rayon de convergence et somme de $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.

573. RMS 2025 1315 Centrale PSI .... solution p. 377

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k H_k}{k+1}$ converge.

(b) Montrer que $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ est développable en série entière et trouver les coefficients a_n de son développement. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

574. RMS 2025 1316 Centrale PSI .... solution p. 378

(a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

(b) Établir que, pour $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_{1-x}^{1} \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

(c) Que se passe-t-il en $x = 1$?

575. RMS 2025 1317 Centrale PSI .... solution p. 378

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x$. Déterminer une relation entre W_{2n+2} et W_{2n}. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(b) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin x)^{2n+1}}{(2n+1)}$. On pourra commencer par déterminer le développement en série entière de $\arcsin$.

(c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

576. RMS 2025 1318 Centrale PSI .... solution p. 379

Mots-clés : inégalités de Kolmogorov

Soient $a > 0, f \in \mathcal{C}^\infty([-a, a], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}, M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$. Correction : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer $\forall x \in [-a, a],\ |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$. Correction : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$.
En déduire : $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

(b) On suppose qu'il existe deux réels K_1 et R tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{2n} \leqslant K_1(2n)!R^{2n}$. Montrer qu'alors il existe un réel K_2 tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{2n+1} \leqslant K_2(2n+1)!R^{2n+1}$. En déduire que f est développable en série entière sur un voisinage de 0.

577. RMS 2025 1319 Centrale PSI .... solution p. 379

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on pose $v_n = -\alpha \ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{\alpha}{k})$ et $a_n = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

(b) Montrer que $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.

(c) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

(d) Étudier la convergence de $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$. Ind. Pour $\alpha \leqslant 1$, on pourra étudier la convergence de $\sum(a_{n+1} - a_n)z^n$.

578. RMS 2025 1320 Centrale PSI .... solution p. 380

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!} \frac{x^n}{n!}$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (u_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable. Donner le rayon de convergence et la valeur de $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ où $a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}$.

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} u(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

579. RMS 2025 1321 Centrale PSI .... solution p. 381

(a) Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ puis celle de $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n\ln(n)^{(1-\alpha)}}$.

Soient $n_0 \in \mathbb{N}, \Phi \in \mathcal{C}^0([n_0, +\infty[, \mathbb{R})$ décroissante et positive telle que $\sum \Phi(n)$ diverge.

(b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n) x^n$.

(c) Montrer que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n) x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. En déduire $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t) x^t\,\mathrm{d}t$.

580. RMS 2025 1322 Centrale PSI .... solution p. 381

Soient, pour $n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$.

(b) Donner le rayon de convergence, noté R, de f.

(c) Pour tout x dans $]-R, R[$, vérifier que $x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2$.

(d) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0,4[$. Ind. Poser $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$.

(e) Trouver a, b réels tels que $\forall x \in]0,4[, \frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{4-x}$.

(f) Donner la valeur de $f(1)$.

581. RMS 2025 1323 Centrale PSI .... solution p. 382

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_0^1 f(x) x^n\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que si $f(1) > 0$, alors il existe $c > 0, a \in]0,1[$ tels que $\forall t \in [a,1], f(t) \geqslant c$.

(b) On suppose que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $f(1) = 0$.

(c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow f(1) = 0$.

582. RMS 2025 1324 Centrale PSI .... solution p. 383

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 e^{-1/t} t^n\,\mathrm{d}t$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que I_n est bien défini et donner son signe

(b) Étudier les variations de (I_n).

(c) Montrer la convergence de la suite (I_n) et déterminer sa limite.

(d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, (n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$.

(e) Montrer que $I_n \sim \frac{1}{en}$.

(f) Déterminer la nature des séries de termes généraux I_n et $(-1)^n I_n$.

(g) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum I_n x^n$.

583. RMS 2025 1325 Centrale PSI .... solution p. 383

(a) Énoncer les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme.

(b) On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

i. Justifiez la convergence de l'intégrale.

ii. Montrer que : $\forall t \geqslant 0, \frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t e^{-(2n+1)t}$.

iii. Appliquer le théorème d'intégration terme à terme et conclure.

(c) On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$.

i. Justifiez la convergence de l'intégrale.

ii. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\cos(t)}{1+e^t} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt}\cos(t)$.

iii. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique-t-il ?

iv. Établir la relation attendue.

584. RMS 2025 1326 Centrale PSI .... solution p. 384

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est dérivable.

(b) Déterminer φ' et en déduire φ à l'aide des fonctions usuelles.

585. RMS 2025 1327 Centrale PSI .... solution p. 385

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f a pour ensemble de définition $\mathbb{R}_+$et qu'elle y est continue.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Trouver les limites de f et f' en $+\infty$,

(d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. En déduire $f(x)$.

(e) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et en déduire sa valeur.

586. RMS 2025 1328 Centrale PSI .... solution p. 386

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $2\lambda < -1$ Correction : $2\lambda > -1$. On pose $g_\lambda : (x,\theta) \in \mathbb{R} \times]0,\pi[\mapsto e^{-ix\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{2\lambda} \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto g_\lambda(x,\theta)$ est intégrable sur $]0,\pi[$.

(b) On pose $f_\lambda(x) = \int_0^\pi g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrer : $f_\lambda(x) = 2\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(\theta))(\sin(\theta))^{2\lambda}\,\mathrm{d}\theta$.

(c) Montrer que f_λ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f_\lambda'' = f_{\lambda+1} - f_\lambda$.

587. RMS 2025 1329 Centrale PSI .... solution p. 387

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

(a) Soit $S = \{(x,y,z), z = f(x,y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a,b,c) \in S$.

(b) Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point critique que l'on déterminera.

588. RMS 2025 1330 Centrale PSI .... solution p. 387

Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.

(a) Montrer que S est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Chercher une majoration du reste de la série ainsi définie. Donner une fonction g tel que $|S(x) - g(x)| \leqslant 10^{-3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) On cherche les $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi] \times \mathbb{R}^+)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\pi[\times\mathbb{R}_+^*$, dont toutes les dérivées partielles d'ordre au plus 2 sont continûment prolongeables à $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, et telles que $\forall x \in [0,\pi], \forall t \in]0,+\infty[, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \forall x \in [0,\pi], u(x,0) = S(x)$ et $\forall t \in]0,+\infty[, u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

i. Vérifier que $u : (x,t) \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$ est solution du problème.

ii. Tracer la fonction qui à x associe $u(x,t)$ pour t fixé. On prendra $t = 1$ et $t = 2$

iii. En prenant u et v deux solutions du problème et en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^\pi (u(x,t)-v(x,t))^2\,\mathrm{d}x$ démontrer l'unicité de la solution du problème.

Probabilités

589. RMS 2025 1331 Centrale PSI .... solution p. 388

Un robot appuie sur une diode verte ou rouge à tout instant $n \in \mathbb{N}$. Lorsqu'il appuie sur la diode rouge à l'instant n, il appuie sur la diode verte à l'instant $n+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$, ou sur la diode rouge avec probabilité $1-p$. Lorsqu'il appuie sur la diode verte à l'instant n, il appuie sur la diode rouge à l'instant $n+1$ avec une probabilité $q \in]0,1[$, ou sur la diode verte avec probabilité $1-q$. On note r_n la probabilité que le robot appuie sur la diode rouge à l'instant n, v_n la probabilité que le robot appuie sur la diode verte à l'instant n.

(a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{r_{n+1}}{v_{n+1}} = A\binom{r_n}{v_n}$.

(b) Déterminer $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B + C = I_2$ et $A = B + (1-p-q)C$.

(c) En déduire une expression de A^n.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Commenter.

590. RMS 2025 1332 Centrale PSI .... solution p. 389

(a) Soient X_0 et Y_0 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Déterminer la loi de $X_0 + Y_0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$.

(b) Montrer que $X + Y$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

(c) Montrer que si $X+Y \sim X_0+Y_0$, alors X et Y suivent la loi uniforme sur [1,6].

591. RMS 2025 1333 Centrale PSI .... solution p. 390

On considère n urnes numérotées de 1 à n et b boules numérotées de 1 à b. On place les boules au hasard dans les urnes. Soit $k \in \{0,\dots,b\}$.

(a) Justifier qu'on peut modéliser le problème par l'univers Ω des fonctions de $\{1,\dots,b\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ muni de la probabilité uniforme. Calculer la probabilité $p_{n,b}$ de l'événement «l'urne 1 contient k boules».

(b) En modélisant le problème par une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, retrouver le résultat précédent.

(c) Soit une suite d'entiers $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $b_n \sim nc$. Montrer que $p_{n,b_n} \to e^{-c}\frac{c^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$.

592. RMS 2025 1334 Centrale PSI .... solution p. 391

Soit $n \geqslant 2$. Un secrétaire téléphone à n clients. On modélise par une variable aléatoire X le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre avec une probabilité $p \in]0,1[$ à chaque appel. On suppose que les appels sont indépendants entre eux.

(a) Déterminer la loi de X. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Le secrétaire appelle une seconde fois les $n-X$ clients restants. On note Z la variable modélisant le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre lors de cette seconde série d'appel.

(b) Déterminer la loi de Z.

593. RMS 2025 1335 Centrale PSI .... solution p. 391

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\Psi(\lambda) = \ln(\operatorname{ch}(\lambda))$.

(a) Soit Z une variable aléatoire. Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Z \geqslant t) \leqslant e^{-\lambda t}\mathbb{E}(e^{\lambda Z})$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}$.

(c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(S_n \geqslant t\right)\right) \leqslant \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t, \lambda \geqslant 0\}$.

594. RMS 2025 1336 Centrale PSI .... solution p. 392

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère $Z_i = e^{\lambda\left(X_i - \frac{1}{2}\right)}$. Calculer l'espérance de Z_i.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right)$.

(c) Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $f_t : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda t - \ln(\operatorname{ch}(\lambda/2))$. Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt\right) \leqslant e^{-nf_t(\lambda)}$.

(d) Pour $t \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, on pose $I(t) = (t-\frac{1}{2})\ln(1-2t) - (t-\frac{1}{2})\ln(2t+1)$. Montrer que $\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt\right) \leqslant e^{nI(t)}$.

(e) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

595. RMS 2025 1337 Centrale PSI .... solution p. 392

On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante. Si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ; si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne. On note X_p la variable aléatoire qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du p-ième tirage, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner les lois de X_1 et X_2.

(b) Donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{p+1} = k), \mathbb{P}(X_p = k+1), \mathbb{P}(X_p = k)$.

(c) Justifier que la fonction génératrice G_p de X_p est un polynôme.

(d) On admet la relation $\forall t \in \mathbb{R}, G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n} G'_p(t)$. Donner une relation entre $\mathbb{E}(X_{p+1})$ et $\mathbb{E}(X_p)$. Calculer $\mathbb{E}(X_p)$ et sa limite lorsque p tend vers $+\infty$. Interpréter.

(e) Démontrer l'identité admise en d).

596. RMS 2025 1338 Centrale PSI .... solution p. 393

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement s'il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = UV^T$

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que : $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, a_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

(b) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

597. RMS 2025 1339 Centrale PSI .... solution p. 394

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leqslant k) = (\mathbb{P}(X_1 \leqslant k))^n$.
On suppose l'existence d'un réel $\alpha > 1$ tel que $\mathbb{E}(X_1^\alpha) < +\infty$. On pose $m_\alpha = \mathbb{E}(X_1^\alpha)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1) \geqslant 1 - \frac{m_\alpha}{k^\alpha}$.

(c) Montrer que M_n est d'espérance finie. Ind. Justifier la convergence de la série de terme général $1 - \left(1 - \frac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)^n, k \in \mathbb{N}^*$.

(d) On suppose que $X_1 \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

  i. Montrer que $\mathbb{E}(M_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(1 - (1 - 2^{-k})^n\right)$.

  ii. Montrer que $\mathbb{E}(M_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln 2}$.

598. RMS 2025 1340 Centrale PSI .... solution p. 395

(a) i. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n n! \leqslant (2n)!$. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

  ii. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$.

(b) On se donne une variable aléatoire X centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$.

  i. Montrer : $\forall (x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}, e^{tx} \leqslant \frac{1+x}{2} e^t + \frac{1-x}{2} e^{-t}$.

  ii. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que e^{tX} admet une espérance et que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$.

(c) On considère maintenant une variable aléatoire X telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$. Montrer : $\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\lambda^2/2}$.

599. RMS 2025 1341 Centrale PSI .... solution p. 395

(a) Déterminer le rayon de convergence R de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Montrer que $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

(b) Déterminer la loi de $Y_k = \frac{1+X_k}{2}$ puis celle de $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

(c) Déterminer la loi de S_n.

Soit $T = \inf\{n \geqslant 1, S_n = 0\}$. On pose $p_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $q_n = \mathbb{P}(T = n)$. Soit $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n x^n$.

(d) Montrer que $\forall n \geqslant 1, p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k p_{n-k}$.

(e) En déduire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ puis que $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

(f) En déduire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

Corrigés

Centrale-Supélec

Algèbre

527. RMS 2025 1269 Centrale PSI .... énoncé p. 80

Mots-clés : Polynômes de Tchebychev de première espèce

Soit (P_n) la suite à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2, P_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

(a) Déterminer le degré de P_n. Étudier la parité de P_n.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

(c) Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. — Voir RMS 2014 978 Centrale PC, RMS 2015 819 Centrale PSI, RMS 2020 Centrale PC, RMS 2017 162 ENS PC.

(a) Montrons par récurrence que

$$\deg(P_n) = n \quad \text{et} \quad P_n(-X) = (-1)^n P_n(X),$$

c'est-à-dire que P_n possède la même parité que n.

Comme $P_0 = 2$ et $P_1 = X$, les propriétés ci-dessus sont vraies aux rangs 0 et 1. On les suppose vraies aux rangs $n-2$ et $n-1$ avec $n \geqslant 2$.

- Alors $\deg(XP_{n-1}) = 1 + \deg(P_{n-1}) = 1 + n - 1 = n$, et comme $\deg(-P_{n-2}) = n - 2 < n$, le degré de la somme $XP_{n-1} + (-P_{n-2})$ vaut n, donc $\deg(P_n) = n$: la première propriété est établie au rang n.
- Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence donne $P_n(-X) = (-X)P_{n-1}(-X) - P_{n-2}(-X) = (-X)(-1)^{n-1}P_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}P_{n-2}(X) = (-1)^n[XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X-)] = (-1)^n P_n(X)$, ce qui prouve la deuxième propriété au rang n.

(b) On raisonne là encore par récurrence. Au rang 0, il s'agit de montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2$, ce qui est vrai car $P_0 = 2$. Au rang 1, c'est tout aussi évident.

Supposons la propriété attendue aux rangs $n-2$ et $n-1$ avec $n \geqslant 2$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}
P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right) P_{n-1}\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_{n-2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
&= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) - \left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) \\
&= z^n + \frac{1}{z^{n-2}} + z^{n-2} + \frac{1}{z^n} - \left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) \\
&= z^n + \frac{1}{z^n}.
\end{aligned}$$

La propriété est établie au rang n.

(c) En appliquant cette l'égalité de la question précédente à $z = \exp((2k+1)i\frac{\pi}{2n})$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$P_n\left(2\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)\right) = 2\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Les n nombres $\alpha_k = 2\cos((2k+1)\frac{\pi}{2n})$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont donc des racines de P_n, et sont deux à deux distincts car les angles $(2k+1)\frac{\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ appartiennent tous à $[0, \pi]$, intervalle sur lequel la fonction cosinus est strictement monotone, donc injective. Comme $\deg(P_n) = n$, on a trouvé toutes les racines complexes de P_n : elles sont réelles, simples, et valent

$$2\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \quad \text{pour} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Remarque. — Le polynôme $T_n = \frac{1}{2}P_n(2X)$ vérifie $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ T_n(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})) = \frac{1}{2}P_n(z+\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$. En appliquant ceci à $z = \exp(i\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, c'est-à-dire que $(\frac{1}{2}P_n(2X))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Tchebychev de première espèce.

528. RMS 2025 1270 Centrale PSI .... énoncé p. 80

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MA - AM$.

(a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme non injectif.

(b) Trouver la dimension du noyau de Φ_A dans le cas où $A = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$.

(c) Soit $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Montrer que Φ est linéaire et trouver son noyau.

Solution. —

(a) Φ_A est clairement linéaire et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $A = 0$, alors $\Phi_A = 0$ est non injectif et si $A \neq 0$, $\Phi_A(A) = 0$, même conclusion.

(b) $\mathrm{Ker}\,\Phi_A$ est le commutant de A : c'est l'ensemble des matrices diagonales. En effet si $M \in \mathrm{Ker}(\Phi_A)$, alors M et A commutent, donc les sous-espaces propres de A sont stables par M. Comme les éléments diagonaux (=valeurs propres) de A sont deux à deux distincts, ces sous-espaces propres sont les n droites engendrées par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ces vecteurs sont donc propres pour M, ce qui signifie que M est diagonale. La réciproque est claire.

(c) Φ est clairement linéaire.
$A \in \mathrm{Ker}\,\Phi \iff A$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \iff A$ est scalaire.
Tout d'abord, les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA$. Montrons que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ (X, AX)$ est une famille liée.
C'est évident si $X = 0$. Sinon soit H un hyperplan tel que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(X) \oplus H$. Soit encore M la matrice de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(X)$. A et M commutent donc $\mathrm{Ker}\,M = \mathrm{Vect}(X)$ est stable par A et donc X est propre pour A et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$
On conclut alors par un résultat classique que A est une matrice d'homothétie donc est scalaire : voir par exemple l'exercice 2017 1233.

529. RMS 2025 1271 Centrale PSI .... énoncé p. 80

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \mathrm{rg}(f^k)$.

(a) Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.

(b) Montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante. Ind. On pourra considérer $g : x \in f^k(E) \mapsto f(x) \in f^{k+1}(E)$.

Solution. — RMS 2020 638 Mines Ponts PSI pour b)

(a) $\mathrm{Im}\,u^{k+1} \subset \mathrm{Im}\,u^k$ donc (r_k) est décroissante. Elle est minorée par 0 donc elle converge. Or toute suite convergente d'entier est stationnaire.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $g : x \in f^k(E) \mapsto f(x) \in f^{k+1}(E)$ est bien définie, linéaire, surjective. Le théorème du rang appliqué à g donne $\dim \operatorname{Im} u^k = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g = \dim(\operatorname{Im} f^k \cap \operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f^{k+1})$, donc

$$r_k - r_{k+1} = \dim(\operatorname{Im} f^k \cap \operatorname{Ker} f)$$

La suite $(\operatorname{Im} f^k)_k$ est décroissante pour l'inclusion d'après a) donc aussi $(\operatorname{Im} f^k \cap \operatorname{Ker} f)_k$ et donc aussi la suite de leurs dimensions.

530. RMS 2025 1272 Centrale PSI . . . . énoncé p. 80

Soit $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\operatorname{rg} A \leqslant \operatorname{rg} C_1 + \operatorname{rg} C_2$.

(b) Montrer que $\operatorname{rg} A \leqslant \sum_{k=1}^{4} \operatorname{rg} A_k$.

(c) Si $\operatorname{rg} A_1 = \operatorname{rg} A_4 = n$ et $A_3 = 0$, la matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner A^{-1}.

Solution. —

(a) Le rang d'une matrice est (entre autres) la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes. Notons $U_1, \dots, U_{2n}$ les colonnes de A, qui appartiennent à $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On a donc

$$\operatorname{rg} A = \dim F, \quad \operatorname{rg} C_1 = \dim G \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} C_2 = \dim H,$$

où l'on a posé $F = \operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_{2n})$, $G = \operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_n)$ et $H = \operatorname{Vect}(U_{n+1}, \dots, U_{2n})$. Alors l'égalité $F = G + H$ est claire, et l'inégalité $\dim(G + H) \leqslant \dim G + \dim H$, valable pour tous les sous-espaces vectoriels G et H d'un espace donné, assure que

$$\operatorname{rg} A = \dim(F) = \dim(G + H) \leqslant \dim G + \dim H = \operatorname{rg} C_1 + \operatorname{rg} C_2.$$

(b) Le rang d'une matrice étant aussi celui de sa transposée, l'application de la question précédente à $C_1^\top$ et $C_2^\top$ montre que $\operatorname{rg} C_1 = \operatorname{rg} C_1^\top \leqslant \operatorname{rg} A_1^\top + \operatorname{rg} A_3^\top = \operatorname{rg} A_1 + \operatorname{rg} A_3$, et une inégalité analogue pour C_2. On en déduit que

$$\operatorname{rg} A \leqslant \sum_{k=1}^{4} \operatorname{rg} A_k.$$

(c) Dans le cas étudié, la matrice A est inversible d'inverse

$$B = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 A_4^{-1} \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

En effet, les hypothèses $\operatorname{rg} A_1 = \operatorname{rg} A_4 = n$ sont équivalentes à l'inversibilité de A_1 et A_4, et il suffit ensuite de calculer le produit AB pour constater qu'il vaut I_{2n}.

531. RMS 2025 1273 Centrale PSI . . . . énoncé p. 81

Soient a, b, c des réels positifs tels que $a + b + c = 1$.

(a) Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Montrer qu'il existe u de module 1 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels positifs tels que $z_1 = \alpha_1 u$, $z_2 = \alpha_2 u$ et $z_3 = \alpha_3 u$.

(b) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver ses valeurs propres.

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Quelle est la limite de la suite $(M^n)_{n \geqslant 1}$?

Solution. —

(a) Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

On a par inégalité triangulaire $|z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1+z_2|+|z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3|$, donc $|z_1+z_2+z_3| = |z_1+z_2|+|z_3|$ et $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$.

L'égalité $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ assure que z_1 et z_2 on même argument, il existe donc u de module 1 et α_1, α_2 des réels positifs tels que $z_1 = \alpha_1 u$ et $z_2 = \alpha_2 u$.

Et l'égalité $|z_1+z_2+z_3| = |z_1+z_2|+|z_3|$ assure que z_1+z_2 et z_3 ont même argument, donc que z_3 même argument que $(\alpha_1+\alpha_2)u$ et donc s'écrit $z_3 = \alpha_3 u$ avec α_3 un réel positif (le cas $z_1 = z_2 = 0$ est trivial).

(b) $\chi_J = X^3 - 1$ donc $\mathrm{Sp}(J) = \{1, j, j^2\}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

(c) Précisément, J s'écrit $J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}\left(1, j, j^2\right)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.

Comme $M = aI_3 + bJ + cJ^2$, on a $M = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj\right)P^{-1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P\,\mathrm{diag}\left((a+b+c)^n, (a+bj+cj^2)^n, (a+bj^2+cj)^n\right)P^{-1}$.

Si au moins deux des trois réels a, b, c sont non nuls, alors $\left|a+bj+cj^2\right| < a+b+c = 1$ par contraposée de la première question, et $\left|a+bj^2+cj\right| < a+b+c = 1$, donc $\mathrm{diag}\left((a+b+c)^n, (a+bj+cj^2)^n, (a+bj^2+cj)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{diag}\,(1,0,0)$, et par continuité de $X \mapsto PXP^{-1}$ (linéaire en dimension finie), $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\,\mathrm{diag}\,(1,0,0)\,P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $(a,b,c) = (1,0,0)$, alors $M = I_3$ donc $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_3$.

Si $(a,b,c) = (0,1,0)$ (resp. $(0,0,1)$) alors $M = J$ (resp. J^2), la suite (M^n) est 3-périodique et non constante donc diverge.

532. RMS 2025 1274 Centrale PSI .... énoncé p. 81

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$ et son déterminant.

(b) Déterminer le noyau et l'image de la matrice.

(c) La matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

Solution. — $M(a,b,c)$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Précisons :

$C_1 + C_3 = (a+c)(e_1+e_3)$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre associé à $a+c$. De même $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est propre associé à $a-c$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est propre associé à b.

Donc $M(a,b,c) = PD(a,b,c)P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D(a,b,c) = \mathrm{diag}(a+c, a-c, b)$.

533. RMS 2025 1275 Centrale PSI .... énoncé p. 81

Soit la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $m_{i,j} = a$ si $i = j$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

(a) Déterminer les puissances de M.

(b) Déterminer les éléments propres de M.

Solution. — RMS 2009 693 Mines Ponts PC pour a),
RMS 2016 481 Mines Ponts PSI, RMS 2016 884 ENSAM PSI pour b)

(a) On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1. Alors $M = (a-b)I_n + bJ$. On constate ensuite que I_n et J commutent, et que $J^2 = nJ$, donc que $J^k = n^{k-1}J$ pour tout $k \geqslant 1$, par une récurrence immédiate. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^k J^k (a-b)^{p-k} = (a-b)^p I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} b^k (a-b)^{p-k} \right) J \\ &= (a-b)^p I_n + \frac{1}{n} \left[(nb+a-b)^p - 1 \right] J. \end{aligned}$$

(b) Elle s'écrit

$$M = bJ_n + (a-b)I_n$$

où J_n est la matrice d'Attila (également appelée matrice des 1). Comme J_n est symétrique réelle, elle est diagonalisable, son rang est 1 donc zéro est valeur propre d'ordre $(n-1)$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. La dernière valeur propre est n (par la trace) et le sous-espace propre associé est la droite $H^\perp = \mathrm{Vect}(U)$ où

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En notant P une matrice dont la 1re colonne est U et les suivantes constituées d'une base de H (au choix), on a

$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, \ldots, a-b).$$

534. RMS 2025 1276 Centrale PSI .... énoncé p. 81

(a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie possédant exactement deux valeurs propres distinctes, λ_1 et λ_2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \mathrm{id}$.

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Solution. — RMS 2018 1126 Centrale PSI

(a) *Sens direct.* Supposons qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 vérifiant $p_1 + p_2 = \mathrm{id}$ et $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$. En composant la première relation par p_1 (à gauche puis à droite), on voit que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$, d'où $u^2 = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)^2 = \lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)u - \lambda_1\lambda_2 \,\mathrm{id}$. Donc u est annulé par le polynôme scindé à racines simples $X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, donc est diagonalisable.

Remarque. — On peut de plus vérifier que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2)$ et que $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k \,\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p_k)$ pour $k \in \{1;2\}$, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1; \lambda_2\}$, avec égalité dès que les deux projecteurs sont non nuls.

Sens réciproque Supposons que u est diagonalisable, donc que u est annulé par $P = (X-\lambda_1)^(X-\lambda_2) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$, de sorte que

$$u^2 = (\lambda_1+\lambda_2)u - \lambda_1\lambda_2 \,\mathrm{id}\,. \tag{$\star$}$$

Posons alors $p_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(u - \lambda_2 \,\mathrm{id})$ et $p_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(u - \lambda_1 \,\mathrm{id})$ (ces formules se trouvent par *analyse*). On a alors manifestement $p_1 + p_2 = \mathrm{id}$ et $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = u$, puis $p_1^2 = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}(u - \lambda_2 \,\mathrm{id})^2 = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}(u^2 - 2\lambda_2 u + \lambda_2^2 \,\mathrm{id})$, d'où vu $(\star)$, $p_1^2 = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}((\lambda_1-\lambda_2)u - \lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathrm{id}) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(u - \lambda_2 \,\mathrm{id}) = p_1$. On montre que même que $p_2^2 = p_2$. Ainsi, il existe deux projecteurs p_1 et p_2 vérifiant

$$p_1 + p_2 = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2.$$

(b) La matrice A est la matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$ dont tous les coefficients non diagonaux valent a, et tous les coefficients diagonaux valent $a+b$. La matrice $A - bI_n$ est de rang 1, donc b est valeur propre de A de multiplicité $\geqslant n-1$. Par la trace, on a alors $\operatorname{tr}(A) = n(a+b) = (n-1)b + \lambda$, où λ est la dernière valeur propre de A, donc

$$\operatorname{Sp}(A) = \{b, na+b\}.$$

Suivant la première question, posons alors $P_1 = \frac{1}{-na}(A - (na+b)I_n) = I_n - \frac{1}{n}J$ et $P_2 = \frac{1}{na}(A - bI_n) = \frac{1}{n}J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. On vérifie facilement que les matrices P_1 et P_2 sont des matrices de projection telles que $P_1 + P_2 = I_n$ et $A = bP_1 + (na+b)P_2$, donc par la première question, A est diagonalisable. (vu la remarque faite dans la démonstration du sens direct dans la première question, la détermination préalable de $\operatorname{Sp}(A)$ est inutile).

535. RMS 2025 1277 Centrale PSI .... énoncé p. 81

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont impairs et que les autres sont pairs. Montrer que $\det(M)$ est impair.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(X) = \operatorname{rg}(X^T X)$.

Solution. —

(a) On procède par récurrence sur n. Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Supposons le pour les matrice de taille $n-1$, avec $n \geqslant 2$ fixé.

Soit donc $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont les coefficients diagonaux sont impairs et les autres pairs.

Un développement selon la première colonne (par exemple) donne $\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,1}(-1)^{i+1}\Delta_{i,1}$.

$\Delta_{1,1}$, le mineur d'indice $(1,1)$, est le déterminant d'une matrice de taille $n-1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, dont les coefficients diagonaux sont des coefficients diagonaux de M donc impairs et les autres des coefficients non diagonaux de M donc pairs.

Par hypothèse de récurrence, $\Delta_{1,1}$ est impair donc le produit $m_{1,1}(-1)^{1+1}\Delta_{1,1}$ aussi, puisque $m_{1,1}$ est impair.

Et pour $i \in [\![2\,;\,n]\!]$, $m_{i,1}$ est pair donc $m_{i,1}(-1)^{i+1}\Delta_{i,1}$ aussi.

Ainsi, $\det(M)$ s'écrit comme la somme d'un terme impair et de $n-1$ termes pairs, donc $\det(M)$ est impair, ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$.

Pour tout $Y \in \operatorname{Ker}(X)$, on a $XY = 0$ donc $X^T XY = 0$, soit $Y \in \operatorname{Ker}(X^T X)$.

Réciproquement, pour tout $Y \in \operatorname{Ker}(X^T X)$, on a $X^T XY = 0$ donc $Y^T X^T XY = 0 = \|XY\|^2$, et donc $XY = 0$ soit $Y \in \operatorname{Ker}(X)$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(X) = \operatorname{Ker}(X^T X)$.

Le théorème du rang assure que $\operatorname{rg}(X^T X) = k - \dim \operatorname{Ker}(X^T X) = k - \dim \operatorname{Ker}(X) = \operatorname{rg}(X)$.

536. RMS 2025 1278 Centrale PSI .... énoncé p. 81

On définit l'application ϕ qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2 P$ par $X^4 - 1$.

(a) Montrer que ϕ est un endomorphisme et donner sa matrice A dans la base canonique.

(b) Montrer que ϕ est diagonalisable et donner ses valeurs propres ainsi que ses sous espaces propres.

(c) L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, donner son l'inverse.

Solution. — RMS 2025 1512 CCINP PSI, RMS 2016 908 CCEM PSI

L'application va de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ (par théorème de la division euclidienne).

Si A et B sont dans $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et si $C = A + \lambda B$ alors, le théorème de la division euclidienne donne l'existence et l'unicité d'un couple (Q_A, R_A) avec $\deg(R_A) \leqslant 3$ (resp (Q_B, R_B) avec $\deg(R_B) \leqslant 3$ et (Q_C, R_C) avec $\deg(R_C) \leqslant 3$) tel que $X^2 A = (X^4 - 1)Q_A + R_A$ (resp $X^2 B = (X^4 - 1)Q_B + R_B$ et $X^2 C = (X^4 - 1)Q_C + R_C$).

Or $X^2 C = X^2 A + \lambda X^2 B = (X^4 - 1)Q_A + R_A + \lambda((X^4 - 1)Q_B + R_B) = (X^4 - 1)(Q_A + \lambda Q_B) + (R_A + \lambda R_B)$.

Mais $\deg(R_A+\lambda R_B)\leqslant 3$ donc par unicité de l'écriture $Q_C=Q_A+\lambda Q_B$ et $R_C=R_A+\lambda R_B$.
Donc $R_C=f(C)=f(A+\lambda B)=R_A+\lambda R_B=f(A)+\lambda f(B)$. Donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, qui est inversible (son déterminant vaut 1) et diagonalisable ($A^2=I_4$ donc A est une symétrie et donc f aussi).

537. RMS 2025 1279 Centrale PSI .... énoncé p. 82
énoncé p. 82

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $(\ e_1,e_2\ )$. On note p le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$.

(a) Déterminer la matrice A de p dans la base canonique.

(b) Déterminer toutes les matrices $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB-BA=B$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Soit $\psi_f\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par $\forall g\in\mathcal{L}(E),\psi_f(g)=f\circ g-g\circ f$. On suppose qu'il existe $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\psi_f(g)=g$.

(c) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\psi_f(g^k)=kg^k$.

(d) En déduire que g est nilpotent.

Solution. —

(a) $p(e_1)=e_1$ et $e_2=-e_1+(e_1+e_2)$ donc $p(e_2)=-e_1$: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$.

(b) En posant $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $AB-BA-B=0\iff\begin{pmatrix}-a-c&a-d\\-2c&c-d\end{pmatrix}=0\iff a=c=d=0\iff B=b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

(c) Par récurrence.

(d) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\psi_f(g^k)=kg^k$. Si tous les g^k étaient non nuls, ils constitueraient une famille de vecteurs propres de ψ_f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, ils formeraient donc une famille libre infinie dans $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie. C'est impossible donc au moins un des g^k est nul et g est nilpotent.

538. RMS 2025 1280 Centrale PSI .... énoncé p. 82
énoncé p. 82

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3+f^2+f=0$. On suppose qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de f de degré inférieur ou égal à 2 .

(a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Montrer que $\mathrm{rg}(f)=2$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{id})$. En déduire $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{id})$.

(c) Soit x non nul dans $\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{id})$. Montrer que $(x,f(x))$ est libre.

(d) Construire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est représenté par $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

Solution. —

(a)
- Montrons par l'absurde que f n'est pas diagonalisable. Supposons donc f diagonalisable.
  Le polynôme $X^3+X^2+X=X(X-j)(X-\overline{j})$ est annulateur de f et n'admet que 0 pour racine réelle, donc $\mathrm{Sp}(f)\subset\{0\}$. f étant en outre diagonalisable, on en tire que $f=0$, par exemple en considérant la matrice de f dans une base de diagonalisation. Ainsi, le polynôme X est annulateur de f, ce qui est absurde puisque, par hypothèse, f n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.

- f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{rg}(f) \in \{0,1,2,3\}$.
  Déjà, $f \neq 0$ (cf. ci-dessus), donc $\mathrm{rg}(f) \neq 0$.
  Ensuite, f est non inversible, sinon en composant à gauche par f^{-1} dans l'égalité vérifiée par f, on obtient $f^2 + f + \mathrm{id} = 0$, ce qui est absurde pour les mêmes raisons que ci-dessus. Par suite, $\mathrm{rg}(f) \neq 3$.
  Enfin, montrons par l'absurde que $\mathrm{rg}(f) \neq 1$. Supposons donc $\mathrm{rg}(f) = 1$. Il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a)$. $f(a) \in \mathrm{Vect}(a)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = \alpha a$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x a$, d'où $f^2(x) = \lambda_x f(a) = \lambda_x \alpha\, a = \alpha\lambda_x\, a = \alpha f(x)$, avec α indépendant de x, ce qui permet de conclure que $f^2 = \alpha f$. Le polynôme $X^2 - \alpha X$ est donc annulateur de f, ce qui est absurde, toujours pour les mêmes raisons.
  Ainsi, par élimination des autres valeurs possibles, $\mathrm{rg}(f) = 2$.

(b)
- $f^3 + f^2 + f = 0$, donc $\left(f^2 + f + \mathrm{id}\right) \circ f = 0$, donc, classiquement, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$. Alors $f(x) = 0$, puis $f^2(x) = 0$, et comme $f^2(x) + f(x) + x = 0$, $x = 0$. D'où $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}) = \{0\}$.
  De plus, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$, donc, en passant aux dimensions, $\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})\right) \geqslant 2$. Et comme $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}) \neq \mathbb{R}^3$ (sinon, $f^2 + f + \mathrm{id} = 0$, ce qui est absurde pour des raisons déjà invoquées), $\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})\right) = 2$. Ainsi, $\dim\left(\mathrm{Ker}\, f\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.
  Finalement, par la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.

(c) Montrons par l'absurde que $(x, f(x))$ est libre. Supposons donc la famille $(x, f(x))$ liée. Comme $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors $f^2(x) = \lambda^2 x$, puis, comme x est dans $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$, $\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) x = 0$. Or $x \neq 0$, donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est absurde car le polynôme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles.

(d) Soit (e_1) une base de $\mathrm{Ker}\, f$ (on rappelle que $\dim\left(\mathrm{Ker}\, f\right) = 1$).

Soit e_2 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ (on rappelle que $\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})\right) = 2$). Notons $e_3 = f\left(e_2\right)$. e_3 est dans $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ car le noyau d'un polynôme en f est stable par f, et, par (c), (e_2, e_3) est libre. Ainsi, (e_2, e_3) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$, qui est de dimension 2, donc (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.

Or $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$, donc, par recollement, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin $f\left(e_1\right) = 0$, $f\left(e_2\right) = e_3$ et $f\left(e_3\right) = f^2\left(e_2\right) = -e_2 - f\left(e_2\right) = -e_2 - e_3$, donc la matrice de f dans la base ainsi construite est celle demandée.

539. RMS 2025 1281 Centrale PSI . . . . énoncé p. 82

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(AM) I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Exprimer Φ^2 en fonction de Φ.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit diagonalisable. Préciser ses espaces propres.

Solution. — RMS 2018 1309 CCP PSI, RMS 2019 1170 CCP PSI

(a) Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi^2(M) = \mathrm{tr}(AM)\Phi(I_n) = (\mathrm{tr}\, A)\Phi(M)$, donc

$$\Phi^2 = (\mathrm{tr}\, A)\Phi.$$

(b) On discute selon la valeur de la trace de A.

- Si $\mathrm{tr}\, A \neq 0$, alors Φ est annulé par $X(X - \mathrm{tr}\, A)$, scindé à racines simples, donc Φ est diagonalisable. Le noyau de Φ est celui de la forme linéaire $M \mapsto \mathrm{tr}(AM) = \langle A^\top, M\rangle$ donc $\mathrm{Ker}\, \Phi = (A^\top)^\perp$, et comme $\Phi(I_n) = (\mathrm{tr}\, A) I_n$, on a $E_{\mathrm{tr}\, A}(\Phi) = \mathrm{Vect}(I_n)$.
- Si $\mathrm{tr}\, A = 0$, alors zéro est l'unique valeur propre de Φ. Or $\Phi \neq 0$. En effet, l'un des $a_{i,j}$ est non nul, donc $\Phi(E_{j,i}) = a_{i,j} I_n \neq 0$. Dans ce cas, Φ n'est pas diagonalisable.

Conclusion : Φ est diagonalisable si et seulement $\mathrm{tr}\, A \neq 0$, et ses sous-espaces propres ont été calculés plus haut.

540. RMS 2025 1282 Centrale PSI . . . . énoncé p. 82

Soient $A, B, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que U est non nulle et que $AU = UB$.

(a) Montrer que, si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule A, alors toute valeur propre de A est racine de P.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X], P(A)U = UP(B)$.

(c) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing$.

Solution. —

(a) On suppose que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ annule A. Soit λ une valeur propre de A. On dispose donc d'un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Alors, en multipliant à gauche par A, on obtient $A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$, puis, par une récurrence élémentaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$, et donc

$$P(A)X = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right) X = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k X = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k X = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) X = P(\lambda)X.$$

Or $P(A) = 0$, donc $P(\lambda)X = 0$, et comme $X \neq 0$, on en tire que $P(\lambda) = 0$.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Les calculs pour montrer que $P(A)U = UP(B)$ sont analogues à ceux de la question précédente : $AU = UB$, donc $A^2U = AUB = UBB = UB^2$, puis, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kU = UB^k$, et donc

$$P(A)U = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right) U = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k U = \sum_{k=0}^{p} a_k U B^k = U\left(\sum_{k=0}^{p} a_k B^k\right) = UP(B).$$

(c) Montrons par l'absurde que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$. Supposons donc $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

En appliquant la question précédente au polynôme caractéristique de A, on obtient $\chi_A(A)U = U\chi_A(B)$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, et donc $U\chi_A(B) = 0$.

Montrons maintenant que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible. Décomposons χ_A dans $\mathbb{C}[X]$: $\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, où $\lambda_1, ...\lambda_r$ sont les valeurs propres de A, deux à deux distinctes, et $\alpha_1, ..., \alpha_r$ leurs multiplicités respectives. Alors $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{r} (B - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$. Or, pour tout k entre 1 et r, λ_k n'est pas valeur propre de B car $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, donc $B - \lambda_k I_n$ est inversible, et donc $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{r} (B - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$ est inversible, en tant que produit de matrices inversibles.

Achevons le raisonnement : $U\chi_A(B) = 0$ et $\chi_A(B)$ est inversible, donc, en multipliant à droite par l'inverse de $\chi_A(B)$, on obtient $U = 0$, ce qui est absurde.

541. RMS 2025 1283 Centrale PSI .... énoncé p. 82

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$. On note $d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_2\right\}$.

(a) Montrer que M est diagonalisable, que ses valeurs propres sont de module égal à 1 et que $|\operatorname{tr}(M)| \leqslant 2$.

(b) On suppose que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Donner les valeurs possibles de d.

(c) On suppose que les valeurs propres de M sont toutes dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que M a pour polynôme annulateur $X^2 + 1, X^2 - X + 1$ ou $X^2 + X + 1$. Donner les valeurs possibles de d.

Solution. —

(a) $X^k - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses vp sont dans $\mathbb{U}_k \subset \mathbb{U}$.
$|\operatorname{tr} M| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| = 1 + 1 = 2$.

(b) Les vp de M sont parmi ± 1 donc M est semblable à $\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1)$ donc $d \leqslant 2$. Si les deux sont égales à 1, alors $M = I_2$ et $d = 1$, sinon -1 est vp donc $M \neq I_2$ donc $d > 1$ donc $d = 2$.

(c) M étant réelle, ses vp sont λ et $\overline{\lambda}$ dans $\mathbb{U}_k$ de même ordre de multiplicité donc 1.
$\det M = \lambda\overline{\lambda} = 1$ et $\operatorname{tr} M = \lambda + \overline{\lambda} = 2\cos\theta \in \mathbb{Z}$ où $\lambda = e^{i\theta}$ donc $\cos\theta = 0, \pm\frac{1}{2}$ ou ± 1, mais cette dernière possibilité est exclue car $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ donc $\operatorname{tr} M = 0$ ou ± 1. $\chi_M = X^2 - \operatorname{tr} M.X + \det M$ d'où le 1er résultat avec Cayley-Hamilton.
On en déduit que M est semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ donc $d = 4$ ou 6 ou 3 respectivement.

542. RMS 2025 1284 Centrale PSI .... énoncé p. 82

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.

(b) On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.

i. Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0$.

ii. Montrer que $A = 0$.

(c) On suppose seulement que U et V sont semblables. Montrer que A est nilpotente. Étudier la réciproque dans le cas $n = 1$ puis $n = 2$.

Solution. —

(a) Par récurrence sur k, $V^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ et $U^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ puis par linéarité, $R(V) = \begin{pmatrix} R(A) & 0 \\ 0 & R(A) \end{pmatrix}$ et $R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0 & R(A) \end{pmatrix}$

(b) i. $A = QDQ^{-1}$ donc $V = Q'D'Q'^{-1}$ où $Q' = \operatorname{diag}(Q, Q)$ (inversible) et $D' = \operatorname{diag}(D, D)$ (diagonale) donc V est diagonalisable et puisque U est semblable à V, elle l'est également. Il existe donc un polynôme annulateur de U scindé à racines simples, qui vérifie donc $P(A) = AP'(A) = 0$.

ii. Par suite, le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines communes à P et à XP'. Comme P est à racines simples, P et P' n'ont pas de racine commune, ce qui entraîne que zéro est la seule valeur propre de A. Comme A est diagonalisable et n'a que zéro pour valeur propre, elle est nulle.

(c) Soit P un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal d (un tel polynôme existe grâce à Cayley-Hamilton). Comme précédemment, XP' est également annulateur de A donc aussi $XP' - dP$ qui est de degré $< d$ donc $XP' - dP = 0$ et donc $P = CX^d$ (*via* la résolution de l'équation différentielle par exemple).
Réciproque :

- $n = 1$: $A = 0$ donc $U = V = 0$ et donc $U \sim V$.
- $n = 2$: si $A = 0$, comme pour $n = 1$, sinon, A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $A = PTP^{-1}$ (classique).
  Alors $V = QT_1Q^{-1}$ et $U = QT_2Q^{-1}$ où $T_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.
  $T_2 = RT_1R^{-1}$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. U et V sont donc semblables.

543. RMS 2025 1285 Centrale PSI .... énoncé p. 83

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f_A(M) = AM$.

(a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

(b) Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\left(X_i Y_j^T\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) On suppose que A est diagonalisable. Construire une base de vecteurs propres de f_A à partir d'une base de vecteurs propres de A.

Solution. — Voir RMS 2014 1331 TPE PC, RMS 2017 1013 Centrale PSI, RMS 2018 1319 CCP PSI, RMS 2020 1212 CCINP PSI

(a) Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_A^k = f_{A^k}$. On en déduit par linéarité que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f_A) = f_{P(A)}$. De plus, on a manifestement $f_B = 0$ si et seulement si $B = 0$. Cela montre que f_A et A ont les mêmes polynômes annulateurs, ce qui implique que f_A est diagonalisable si et seulement si A l'est (par caractérisation de la diagonalisabilité via un polynôme annulateur scindé à racines simples).

(b) Soient P et Q les matrices de passage de la base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ aux bases (X_i) et (Y_j) : $X_i = Pe_i, Y_j = Qe_j$.
Soit $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n^2}$. $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}X_iY_j^\top = P\left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}e_ie_j^\top\right)Q^\top = P\left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}\right)Q^\top$ donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}X_iY_j^\top = 0 \iff \forall i,j,\ a_{ij} = 0$.
La famille $\left(X_iY_j^T\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est donc libre et de bon cardinal : c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de vecteurs propres pour A. D'après ce qui précède, $\left(X_iX_j^T\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $AX_iX_j^\top = \lambda_iX_iX_j^\top$ donc les $X_iX_j^\top$ sont des vecteurs propres pour f_A.
Remarque : peu importe en fait que les $Y_j = X_j$, l'essentiel est qu'ils constituent une base de $\mathbb{C}^n$.

544. RMS 2025 1286 Centrale PSI . . . . énoncé p. 83
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.

On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $q(M)$ diagonalisable et $q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.

(b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $(p \circ q)(M) = 0$.

(c) Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k$ les racines distinctes de p. En considérant les polynômes $(q(X) - \beta_j)$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $p \circ q$ et conclure.

Solution. —

(a) On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de M^2, non nulles.
Le polynôme $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ est annulateur de M^2 donc $P(X^2) = \prod_{i=1}^p (X^2 - \lambda_i)$ est annulateur de M.
Notant $\mu_1, \ldots, \mu_p$ des racines carrées complexes de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, on a $P(X^2) = \prod_{i=1}^p (X-\mu_i)(X+\mu_i)$, scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

(b) $q(M)$ est diagonalisable, il existe donc $p \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $p(q(M)) = 0$ soit $(p \circ q)(M) = 0$.

(c) Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k$ les racines distinctes de p. Quitte à diviser par un scalaire, on peu supposer p unitaire, soit $p = \prod_{i=1}^k (X - \beta_i)$ et donc $p \circ q = \prod_{i=1}^k (q(X) - \beta_i)$.
Soit λ une valeur propre de M, racine de $p \circ q$ donc.
Il existe $i \in [\![1\,;\,k]\!]$ tel que λ est racine de $q(X) - \beta_i$.
$q'(M)$ est inversible donc $q'(\lambda) \neq 0$, en effet si q' s'écrit $q' = \alpha\prod_{i=1}^{d-1}(X - \lambda_i)$, alors $q'(M) = \alpha\prod_{i=1}^{d-1}(M - \lambda_iI_n)$ est inversible donc pour tout $i \in [\![1\,;\,d-1]\!]$, $M - \lambda_iI_n$ est inversible, autrement dit les racines de q' ne sont pas valeur propre de M.
Ainsi $q(\lambda) - \beta_i = 0$ et $q'(\lambda) \neq 0$ donc λ est racine simple de $q(X) - \beta_i$, et pour $j \neq i$, on a $q(\lambda) - \beta_j \neq q(\lambda) - \beta_i = 0$ donc λ n'est pas racine de $q(X) - \beta_j$.
Finalement, λ est racine simple de $p \circ q = \prod_{i=1}^k (q(X) - \beta_i)$.

Soit donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ est racines simples de $p \circ q$. Alors $p \circ q = s\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$ avec s sans racine simple.
$p \circ q(M) = 0 = s(M)\prod_{i=1}^r (M - \alpha_iI_n)$. Et s n'a aucune racine simple, donc aucune racine de s n'est valeur propre de M, et donc $s(M)$ est inversible (raisonnement identique à celui mené sur q', en factorisant s on obtient que $s(M)$ s'écrit comme un produit de matrices inversible).
Multipliant par $s(M)^{-1}$, il vient $0 = \prod_{i=1}^r (M - \alpha_iI_n)$ donc $\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$ est annulateur de M, scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

545. RMS 2025 1287 Centrale PSI .... énoncé p. 83
Soit f un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E.

(a) Montrer que, si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.

(b) Montrer que, si f est diagonalisable, alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

(c) Soit λ une valeur propre complexe non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{id}) = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu \operatorname{id})$.

(d) Montrer que, si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.

(e) Montrer que, si f^2 est diagonalisable, alors f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$

Solution. —

(a) Tout vecteur propre de f étant vecteur propre de f^2, si f est diagonalisable alors il existe une base formée de vecteur propres de f donc de f^2, autrement dit f^2 est diagonalisable.

(b) Si f est diagonalisable, alors dans une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f, f a une matrice diagonale D et f^2 a pour matrice D^2. Le nombre de coefficients non nuls de D^2 étant le même que celui de D, on a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$ donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \operatorname{Ker}(f^2)$. Comme $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$, il vient $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

(c) Soit λ une valeur propre complexe non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ.

Lest inclusions $\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{id})$ et $\operatorname{Ker}(f + \mu \operatorname{id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{id})$ sont claires, en effet si $f(x) = \pm\mu x$ alors $f^2(x) = (\pm\mu)^2 x = \lambda x$. Et $\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id})$ et $\operatorname{Ker}(f + \mu \operatorname{id})$ sont en somme directe en tant que sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Donc $\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu \operatorname{id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{id})$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \operatorname{id})$ alors $x = \frac{1}{2\mu}(\mu x + f(x)) + \frac{1}{2\mu}(\mu x - f(x))$ avec $\frac{1}{2\mu}(\mu x + f(x)) \in \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id})$ et $\frac{1}{2\mu}(\mu x - f(x)) \in \operatorname{Ker}(f + \mu \operatorname{id})$, d'où l'inclusion réciproque.

N.B. Le résultat déoule directement d'un résultat de cours. Si $P = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$ est scindé à racines simples alors $\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f - \alpha_i \operatorname{id})$.

(d) Montrer que, si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est bien sûr inversible $(\det(f)^2 = \det(f^2) \neq 0)$.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f^2 et f^2 est diagonalisable donc possède des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non nulles, distinctes, et $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda_i \operatorname{id})$.

Si $\mu_1, \ldots, \mu_p$ désignent des racines carrées complexes de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, alors d'après la question précédente $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f - \mu_i \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu_i \operatorname{id})$.

En particulier, les sous-espaces propres de f sont supplémentaires donc f est diagonalisable.

(e) On sait déjà que, si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Récirproquement, supposons f^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Si f^2 est inversible, la question précédente permet de conclure. Sinon, 0 est valeur propre de f^2, donc si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres non nulles de f^2, alors $E = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda_i \operatorname{id}) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda_i \operatorname{id})$.

Si $\mu_1, \ldots, \mu_p$ désignent des racines carrées complexes de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, alors comme précédemment $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f - \mu_i \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu_i \operatorname{id})$.

En particulier, les sous-espaces propres de f sont supplémentaires donc f est diagonalisable.

546. RMS 2025 1288 Centrale PSI .... énoncé p. 83
On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on pose, pour $0 \leqslant i \leqslant 3$, $L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 3 \\ k \neq i}} \frac{X-k}{i-k}$.

(a) En calculant $L_i(k)$, montrer que les L_i forment une base de E.

(b) On pose $\phi : (P,Q) \in E^2 \mapsto \sum_{k=0}^{3} (P(k)+P(1))(Q(k)+Q(1))$. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

(c) Déterminer une base orthonormée de E pour ϕ.

Solution. — = RMS 2025 890 Mines Ponts PSI

547. RMS 2025 1289 Centrale PSI .... énoncé p. 84

On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice $A_{\mathcal{B}}$ par $(A_{\mathcal{B}})_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$.

(a) Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. On note X et Y les matrices colonnes donnant leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$. Montrer que $\langle x, y \rangle = X^T A_{\mathcal{B}} Y$.

(b) On considère une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer : $A_{\mathcal{C}} = P^T A_{\mathcal{B}} P$.

(c) En raisonnant d'abord pour $n = 2$, puis $n \geqslant 3$, montrer que $\det(A_{\mathcal{B}}) > 0$ et $\operatorname{tr}(A_{\mathcal{B}}) > 0$.

(d) Montrer que $A_{\mathcal{B}}$ est définie positive.

Solution. —

(a) Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$, X et Y les matrices colonnes donnant leurs coordonnées $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathcal{B}$.
Alors $\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$ par bilinéarité.
Autrement dit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i (A_{\mathcal{B}})_{i,j} y_j = X^T A_{\mathcal{B}} Y$.

(b) Soient $f_1, \dots, f_n$ les vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{C}$.
La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est donc la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de la famille $(f_1, \dots, f_n)$. Notant $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes, on a pour tout $i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\left(P^T A_{\mathcal{B}} P\right)_{i,j} = C_i^T A_{\mathcal{B}} C_j = \langle f_i, f_j \rangle$ d'après la première question, puisque C_i (resp. C_j) est la matrice colonne des coordonnées de f_i (resp. f_j) dans $\mathcal{B}$.
Ceci prouve exactement que $A_{\mathcal{C}} = P^T A_{\mathcal{B}} P$.

(c) En choisissant pour $\mathcal{C}$ la base canonique, on a $A_{\mathcal{C}} = I_n = P^T A_{\mathcal{B}} P$.
Par multiplicativité du déterminant, $1 = \det(P^t)\det(A_{\mathcal{B}})\det(P) = \det(A_{\mathcal{B}})\det(P)^2$.
Et donc $\det(A_{\mathcal{B}}) = 1/\det(P)^2 > 0$.
D'autre part, $\operatorname{tr}(A_{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 > 0$.

(d) $A_{\mathcal{B}}$ est clairement symétrique (par symétrie du produit scalaire).
Et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T A_{\mathcal{B}} X = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, où x est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est X.
Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A_{\mathcal{B}} X \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si le vecteur x est nul soit $X = 0$.
Ainsi, $A_{\mathcal{B}}$ est définie positive.

548. RMS 2025 1290 Centrale PSI .... énoncé p. 84

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

(a) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T.

(b) Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ stable par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) Soit $Y \in F^\perp$. $\forall X \in F, (MX)^\top Y = 0$ car $MX \in F$ mais aussi $= X^\top(M^\top Y)$ donc $M^\top Y \in F^\perp$ et donc $F^\perp$ est stable par $M^\top$.
La réciproque s'obtient par double transposition et double orthogonal.

(b) D'après ce qui précède, les plans stables par A sont les orthogonaux des droites stables par $A^\top$ c'est-à-dire des droites dirigées par un vecteur propre de $A^\top$. On en vient à réduire $A^\top$: $\chi_{A^\top} = (X-1)^3$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A^\top - I_3) \iff a + c = 0$. Les plans stables par A sont donc les plans d'équation $ax + by - az = 0$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b) \neq (0,0)$.

549. RMS 2025 1291 Centrale PSI .... énoncé p. 84

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ de carré intégrable. Soient $f_1, \dots, f_n \in E$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$.

(a) Montrer que les $a_{i,j}$ sont bien définis.

(b) Montrer que A est symétrique et que $\varphi : (X,Y) \mapsto X^T A Y$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Solution. —

(a) Pour tout $i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$ la fonction $f_i f_j$ est continue sur I, et l'on a $|f_i f_j| \leqslant \frac{1}{2}\left(f_i^2 + f_j^2\right)$.

Par hypothèse f_i^2 et f_j^2 sont intégrables sur I donc $\frac{1}{2}\left(f_i^2 + f_j^2\right)$ aussi.

Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives assure que $f_i f_j$ est intégrable sur I, en particulier son intégrale $a_{i,j}$ converge.

(b) La symétrie de A est claire, ce qui fait de φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

Et pour tout $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(X,X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} x_j = \int_I \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i f_i f_j x_j\right) = \int_I \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i\right)^2$ donc $\varphi(X,X) \geqslant 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue et positive.

(c) Supposons que φ est un produit scalaire. Soit alors $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$. Posant $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(X,X) = \int_I \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i\right)^2 = \int_I 0 = 0$ donc, par le caractère défini du produit scalaire, $X = 0$ soit $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Ceci prouve que la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Réciproquement, supposons la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ libre. On sait déjà que φ est bilinéaire symétrique positive. Soit enfin $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(X,X) = 0 = \int_I \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i\right)^2$.

La fonction $\left(\sum_{i=1}^n x_i f_i\right)^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur I non trivial, elle est donc identiquement nulle. Et donc $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$, soit grâce à la liberté de la famille, $x_1 = \ldots = x_n = 0$ soit $X = 0$. φ est donc définie, c'est un produit scalaire.

550. RMS 2025 1292 Centrale PSI .... énoncé p. 84

Soit E un espace euclidien.

(a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal. Montrer que p est autoadjoint et 1-lipschitzien.

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.

(b) Montrer que χ_{p+q} est scindé sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que les racines de χ_{p+q} appartiennent à $[0,2]$.

Solution. — Voir RMS 2016 761 Centrale PSI, RMS 2017 696 Mines Ponts PSI, RMS 2018 806 Mines Ponts PSI, RMS 2019 732 Mines Ponts PSI

(a) Cours + inégalité de Bessel :
$\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ car $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $y - p(y) \in \operatorname{Ker} p$ et p orthogonal.
Donc p est autoadjoint et par Pythagore, $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$.

(b) Les endomorphismes p et q sont autoadjoints donc u également, car $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Le théorème spectral assure que u est diagonalisable donc que son polynôme caractéristique est scindé.

(c) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda\|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle + \langle q(x), x\rangle = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2$$

donc

$$\lambda = \frac{\|p(x)\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|q(x)\|^2}{\|x\|^2} \in [0, 2].$$

En effet, comme p et q sont des projecteurs orthogonaux, on a l'inégalité de Bessel $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ et $\|q(x)\| \leqslant \|x\|$.

551. RMS 2025 1293 Centrale PSI . . . . énoncé p. 84

Soient E un espace euclidien, $v \in E\backslash\{0\}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f : x \in E \mapsto x - \lambda\langle x, v\rangle v$.

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que f est autoadjoint.

(b) Déterminer les λ pour lesquels f est une isométrie. Dans ce cas, f est un endomorphisme remarquable ; le déterminer et donner ses caractéristiques.

(c) On suppose λ quelconque. Donner les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution. —

(a) La linéairité de f est laissée aux lectrices et lecteurs consciencieux, f étant à valeur dans E, c'est donc un endomorphisme.

Et pour tous $x, y \in E$, on a $\langle f(x), y\rangle = \langle x - \lambda\langle x, v\rangle v, y\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle x, v\rangle\langle v, y\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle y, v\rangle\langle v, x\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ donc f est autoadjoint.

(b) Si f est une isométrie, alors $\|v\| = \|f(v)\| = \left|1 - \lambda\|v\|^2\right| \|v\|$ donc $1 - \lambda\|v\|^2 = \pm 1$, soit $\lambda = 0$ ou $\frac{2}{\|v\|^2}$.

Le cas $\lambda = 0$ est exclu par l'énoncé, et si $\lambda = \frac{2}{\|v\|^2}$ alors $p : x \mapsto \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(v)$ donc $f = \mathrm{id} - 2p$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(v)^\perp$, donc une isométrie.

(c) $f(v) = (1 - \lambda\|v\|^2)v$ donc $v \in E_{1-\lambda\|v\|^2}(f)$, et en particulier $\dim E_{1-\lambda\|v\|^2}(f) \geqslant 1$.

Et si $x \perp v$, alors $f(x) = x$ donc $\mathrm{Vect}(v)^\perp \subset E_1(f)$, et en particulier $\dim E_1(f) \geqslant \dim E - 1$.

Ainsi $\dim E_{1-\lambda\|v\|^2}(f) + \dim E_1(f) \geqslant \dim E$, donc il n'y a pas d'autre valeur propre que 1 et $1-\lambda\|v\|^2$, $\dim E_{1-\lambda\|v\|^2}(f) = 1$ et $\dim E_1(f) = \dim E - 1$ et donc $E_{1-\lambda\|v\|^2}(f) = \mathrm{Vect}(v)$, $E_1(f) = \mathrm{Vect}(v)^\perp$.

f est donc diagonalisable, ce que le théorème spectral nous disait par ailleurs.

552. RMS 2025 1294 Centrale PSI . . . . énoncé p. 84

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ tels que $A^n = A^T$. On pose $B = A^{n+1}$ et on note u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à A (resp. B).

(a) Montrer que B est symétrique positive.

(b) Calculer B^n. Qu'en déduit-on sur le spectre de B ?

(c) Montrer que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(v) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

(e) Déterminer $u_{|\mathrm{Ker}(v)}$ et étudier la nature de $u_{|\mathrm{Im}(v)}$.

Solution. —

(a) $B = A^T A$ est clairement symétrique, puisque $B^T = A^T(A^T)^T = A^T A = B$.

Et pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T B X = X^T A^T A X = \|AX\|^2 \geqslant 0$ donc B est positive.

(b) $A^T = A^n$ commute avec A donc $B^n = (A^T)^n A^n = (A^n)^T A^n = (A^T)^T A^T = AA^T = A^{n+1} = B$.

Le polynôme $X^n - X$ est donc annulateur de B, donc les valeurs propres de B sont racines de $X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$.

D'autre part, B est symétrique positive donc ses valeurs propres sont des réels positifs. Au total, les valeurs propres de B valent toutes 0 ou 1.

(c) B étant symétrique réelle, elle est orthogonalement diagonalisable, *i.e.* orthogonalement semblable à une matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux valent tous 0 ou 1.

D est donc une matrice de projecteur orthogonal, et donc B aussi.

Ainsi v est un projecteur orthogonal donc $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(v) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)$.

(d) u commute avec $v = u^{n+1}$ donc $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

(e) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$ et X sa matrice dans la base canonique. Alors $BX = 0 = A^T AX$ donc $X^T A^T AX = X^T 0 = 0$, soit $\|AX\|^2 = 0$ et donc $AX = 0$, soit $u(x) = 0$.

Ainsi $u_{|\mathrm{Ker}(v)}$ est l'endomorphisme nul.

Et pour $x \in \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$, on a $v(x) = x = u^{n+1}(x)$. En particulier, si $u(x) = 0$ alors $x = u^{n+1}(x) = 0$. Donc $u_{|\mathrm{Im}(v)}$ est injectif, donc bijectif, autrement dit u induit un automorphisme de $\mathrm{Im}(v)$ (dont la puissance $n+1$-ème est l'identité).

553. RMS 2025 1295 Centrale PSI .... énoncé p. 85

Soit $H = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$.

(a) Pour $X = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on note $q(X) = X^T HX$. Montrer que $q(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1})^2 \,\mathrm{d}t$. En déduire que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) On note λ_n la plus petite valeur propre de H_n et μ_n la plus grande. Montrer que $n\lambda_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \leqslant n\mu_n$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$.

(c) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \lambda_n \|X\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant \mu_n \|X\|_2^2$.

SOLUTION. —

(a) Pour $X = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on a $q(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} \,\mathrm{d}t$, soit par linéarité $q(X) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2} \,\mathrm{d}t$ et donc $q(X) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{d}t$.

En particulier, pour $X \neq 0$, la fonction $t \in [0\,;1] \mapsto \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ n'est pas identiquement nulle donc $t \in [0\,;1] \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2$ est continue, positive et non identiquement nulle, son intégrale est donc strictement positive, c'est-à-dire que $q(X) > 0$. On a montré que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) H_n est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral, et ses valeurs propres sont strictement positives puisque $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Sa trace est donc égale à la somme de ses valeurs propres, et donc $0 < n\lambda_n \leqslant \mathrm{tr}(H_n) = \sum_{k=1}^n a_{k,k} \leqslant n\mu_n$.

En particulier $0 < \lambda_n \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$. Or $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1))$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}$, et en particulier $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Par encadrement, on conclut que $\lambda_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(c) Notons Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés à $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ (avec $\alpha_1 = \lambda_n$ et $\alpha_n = \mu_n$ donc).

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $X = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle X_i$ donc $HX = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle \alpha_i X_i$ et $q(X) = \langle X, HX \rangle = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle^2 \alpha_i$.

Comme $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\lambda_n \leqslant \alpha_i \leqslant \mu_n$ on a en multipliant par $\langle X, X_i \rangle^2$ et en sommant l'encadrement $\lambda_n \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle^2 \leqslant q(X) \leqslant \mu_n \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle^2$ soit $\lambda_n \|X\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant \mu_n \|X\|_2^2$.

554. RMS 2025 1296 Centrale PSI .... énoncé p. 85

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose $a_{i,j} > 0$ pour tous i, j. Est-ce que les valeurs propres de A sont toutes positives ?

(b) On note $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les valeurs propres de A. Montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2$.

(c) On suppose $\alpha_i \geqslant 0$ pour tout i. Redémontrer que $X^T AX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. En déduire que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{i,i}a_{j,j} \geqslant a_{i,j}^2$.

Solution. —

(a) Non, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ admet une valeur propre négative, égale à -1.

(b) On note $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les valeurs propres de A. Le théorème spectral assure que A est semblable à $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Alors $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(D))^2 - \operatorname{tr}(D^2)\right)$.

Or la trace est un invariant de similitude, donc $\operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(A)$ et $\operatorname{tr}(D^2) = \operatorname{tr}(A^2)$, c'est-à-dire que $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}(A))^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right)$.

Enfin $(\operatorname{tr}(A))^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,i}a_{j,j}$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}a_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}^2$, donc on a bien $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2$.

(c) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés à $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $X = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i\rangle X_i$ donc $AX = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i\rangle \alpha_i X_i$ et $X^T AX = \langle X, AX\rangle = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i\rangle^2 \alpha_i \geqslant 0$.

Soit $i \neq j \in [\![1\,;\,n]\!]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(tE_i + E_j)^T A(tE_i + E_j) \geqslant 0$ soit $t^2 a_{i,i} + 2ta_{i,j} + a_{j,j} \geqslant 0$.

Le polynôme $X^2 a_{i,i} + 2Xa_{i,j} + a_{j,j}$ admet donc au plus une racine réelle, son discriminant $4a_{i,j}^2 - 4a_{i,i}a_{j,j}$ est donc de signe négatif, soit $a_{i,i}a_{j,j} \geqslant a_{i,j}^2$. Ceci reste trivialement vrai lorsque $i = j$.

555. RMS 2025 1297 Centrale PSI .... énoncé p. 85

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. On dit que f est 1-lipschitzien si, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

(a) Montrer que f est 1-lipschitzien si et seulement si, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f), |\lambda| \leqslant 1$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\forall x \in E, \|P(f)(x)\| \leqslant \sup\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} |P(\lambda)|\|x\|$.

Solution. —

(a) Si f est 1-lipschitzien, soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé. Alors $|\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\| = \|f(x)\| \leqslant \|x\|$ donc $|\lambda| \leqslant 1$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f), |\lambda| \leqslant 1$.

Le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs propres, associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de valeurs absolues inférieures à 1.

Pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i$ donc $f(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle \lambda_i x_i$ et donc $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle^2 \lambda_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle^2 = \|x\|^2$, et donc $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On introduit une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs propres, associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i$ donc $P(f)(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle P(\lambda_i) x_i$ et donc $\|P(f)(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle^2 P(\lambda_i)^2 \leqslant \sup_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} |P(\lambda)|^2 \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle^2 = \sup_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} |P(\lambda)|^2 \|x\|^2$, et donc $\|f(x)\| \leqslant \sup_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} |P(\lambda)|\|x\|$.

556. RMS 2025 1298 Centrale PSI .... énoncé p. 85

Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, on pose $q(X) = \frac{X^T AX}{X^T X}$.

(a) Énoncer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.

(b) Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A, distinctes ou non. Montrer que $\lambda_3 = \max\{q(X), X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}\}$. Énoncer une propriété similaire pour λ_1.

(c) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour $P \in \mathcal{P}$, justifier l'existence de $\max\left\{X^T AX; X \in P, \|X\| = 1\right\}$, puis montrer que : $\lambda_2 = \min\limits_{P\in\mathcal{P}}\left(\max\left\{X^T AX; X \in P, \|X\| = 1\right\}\right)$.

Solution. —

(a) Le théorème spectral affirme que toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. Autrement dit, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe D diagonale et P orthogonale telles que $A = PDP^T$.

(b) Soit (X_1, X_2, X_3) une base orthonormée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Pour tout $X \neq 0$, on a $X = \langle X, X_1\rangle X_1 + \langle X, X_2\rangle X_2 + \langle X, X_3\rangle X_3$ donc $AX = \langle X, X_1\rangle\lambda_1 X_1 + \langle X, X_2\rangle\lambda_2 X_2 + \langle X, X_3\rangle\lambda_3 X_3$, puis $X^T AX = \langle X, X_1\rangle^2\lambda_1 + \langle X, X_2\rangle^2\lambda_2 + \langle X, X_3\rangle^2\lambda_3 \leqslant \lambda_3(\langle X, X_1\rangle^2 + \langle X, X_2\rangle^2 + \langle X, X_3\rangle^2) = \lambda_3 X^T X$.

Et donc $q(X) \leqslant \lambda_3$, avec égalité lorsque $X = X_3$. Donc $\lambda_3 = \max\{q(X), X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}\}$.

De même pour tout $X \neq 0$, on a $q(X) \geqslant \lambda_1$, avec égalité lorsque $X = X_1$. Donc $\lambda_1 = \min\{q(X), X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}\}$.

(c) Pour $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\{X \in P, \|X\| = 1\} = P \cap S(0,1)$ est fermé en tant qu'intersection de deux fermés, borné évidemment.

Et $X \mapsto X^T AX$ est continue car polynomiale en les fonctions coordonnées. Le théorème des bornes atteintes assure qu'elle admet un maximum sur $\{X \in P, \|X\| = 1\}$, c'est-à-dire que $\max\left\{X^T AX; X \in P, \|X\| = 1\right\}$ existe.

$\mathrm{Vect}(X_1)^\perp$ est un plan donc $P \cap \mathrm{Vect}(X_1)^\perp$ est une droite. Soit donc $X \in P \cap \mathrm{Vect}(X_1)^\perp$ unitaire. X sécrit $X = \langle X, X_2\rangle X_2 + \langle X, X_3\rangle X_3$ donc $AX = \langle X, X_2\rangle\lambda_2 X_2 + \langle X, X_3\rangle\lambda_3 X_3$, puis $X^T AX = \langle X, X_2\rangle^2\lambda_2 + \langle X, X_3\rangle^2\lambda_3 \geqslant \lambda_2(\langle X, X_2\rangle^2 + \langle X, X_3\rangle^2) = \lambda_2\|X\|^2 = \lambda_2$.

Et donc $\max\left\{X^T AX; X \in P, \|X\| = 1\right\} \geqslant \lambda_2$. Ceci pour tout $P \in \mathcal{P}$.

Et pour $P_0 = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$, on a pour tout $X \in P_0$ unitaire, $X = \langle X, X_1\rangle X_1 + \langle X, X_2\rangle X_2$ donc $AX = \langle X, X_1\rangle\lambda_1 X_1 + \langle X, X_2\rangle\lambda_2 X_2$, puis $X^T AX = \langle X, X_1\rangle^2\lambda_1 + \langle X, X_2\rangle^2\lambda_2 \leqslant \lambda_2(\langle X, X_1\rangle^2 + \langle X, X_2\rangle^2) = \lambda_2\|X\|^2 = \lambda_2$. Ceci assure que $\max\left\{X^T AX; X \in P_0, \|X\| = 1\right\} = \lambda_2$.

Ainsi, on a bien $\lambda_2 = \min_{P\in\mathcal{P}}\left(\max\left\{X^T AX; X \in P, \|X\| = 1\right\}\right)$.

Analyse

557. RMS 2025 1299 Centrale PSI .... énoncé p. 86

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que N_a est une norme sur E.

(b) i. Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.

ii. Montrer qu'une suite de polynômes (P_n) converge dans (E, N_0) si et seulement si elle converge dans (E, N_1).

(c) Soit $(a,b) \in [0,1]^2$. Montrer que N_a et N_b sont équivalentes.

(d) Soit $(a,b) \in [1,+\infty[^2$ avec $a < b$. Montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes. Ind. Poser $P_n = X^n$.

(e) Que dire si $E = \mathbb{R}_n[X]$?

Solution. — Voir RMS 2024 949 Mines Ponts PSI, RMS 2022 1154 CCINP PSI

(a) L'application N_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Elle est séparée car si $N_a(P) = 0$, alors $P(a) = \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, donc $P'(t) = 0$ pour tout $t \in [0;1]$ (positivité de l'intégrale), donc $P' = 0$ (infinité de racines), donc P est constant, et donc avec $P(a) = 0$, $P = 0$.
Elle est homogène car pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(\lambda P) = |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|(|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t) = |\lambda| N_a(P)$.

Elle vérifie l'inégalité triangulaire car pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P+Q) = |P(a)+Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)+Q'(t)|\,\mathrm{d}t$, or $|P(a)+Q(a)| \leqslant |P(a)|+|Q(a)|$, et de même, $|P'(t)+Q'(t)| \leqslant |P'(t)|+|Q'(t)|$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 |P'(t)+Q'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (|P'(t)|+|Q'(t)|)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 Q'(t)|\,\mathrm{d}t$, de sorte que l'on a bien $N_a(P+Q) \leqslant N_a(P)+N_a(Q)$.
Ainsi, N_a est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) i. Voir c).
  ii. C'est du cours.

(c) Soit a, b dans $[0,1]$, et soit $P \in E$. P étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a $P(b) = P(a) + \int_a^b P'$, et donc, par inégalité triangulaire et positivité

$$|P(b)| \leqslant |P(a)| + \int_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} |P'| \leqslant |P(a)| + \int_0^1 |P'| = N_a(P),$$

ce qui prouve que $N_b(P) = |P(b)| + \int_0^1 |P'| \leqslant 2N_a(P)$. Les rôles de a et b étant interchangeables, ceci prouve que, pour tout $P \in E$

$$\frac{1}{2}N_a(P) \leqslant N_b(P) \leqslant 2N_a(P) :$$

N_a et N_b sont bien équivalentes.

(d) $N_a(X^n) = a^n + 1$ donc $\frac{N_b(X^n)}{N_a(X^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{b}{a}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc le rapport $\frac{N_b}{N_a}$ n'est pas borné donc N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

(e) $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes, en particulier N_a et N_b.

558. RMS 2025 1300 Centrale PSI .... énoncé p. 86

On étudie la série $\sum(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(a) Justifier la convergence de la série.

(b) Exprimer $\sum\limits_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à l'aide de factorielles.

(c) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Solution. — RMS 2015 840 Centrale PSI
La série vérifie le critère spécial des séries alternées, et est donc convergente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_n = \sum_{j=1}^n (-1)^j \ln(\frac{j+1}{j})$ la somme partielle d'indice n de la série. La somme de la série est la limite de la suite (S_n), ou encore de sa sous-suite (S_{2n}). Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $-\ln(\frac{2k}{2k-1}) + \ln(\frac{2k+1}{2k}) = \ln(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2})$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right) = 2\ln\left(\frac{(2n)!\sqrt{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\right).$$

La formule de Stirling $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$ donne $2^{2n}(n!)^2 \sim (\frac{2n}{e})^{2n}2\pi n$ et $(2n)! \sim (\frac{2n}{e})^{2n}2\sqrt{\pi n}$, d'où $\frac{(2n)!\sqrt{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{\pi n}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. On en déduit que $S_{2n} \to \ln(\frac{2}{\pi})$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

559. RMS 2025 1301 Centrale PSI .... énoncé p. 86

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

(a) Montrer que (u_n) est définie et tend vers 0 .

(b) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} u_n$ converge.

Solution. — RMS 2025 1535 CCINP PSI

(a) La série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ satisfait les hypothèses du CSSA. On en déduit qu'elle converge, donc (u_n) est bien définie et converge vers 0, de plus $|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

(b) $|v_n| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$ donc $\sum v_n$ est absolument convergente.

560. RMS 2025 1302 Centrale PSI .... énoncé p. 86

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

(b) Montrer que, si (u_n) est à termes positifs, alors $\sum v_n$ converge.

(c) Montrer que, si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

Solution. — Voir RMS 2020 1237 CCINP PSI

(a) On obtient $u_1 + u_2 = \frac{a_1+a_2+a_1a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$ puis, par récurrence,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}.$$

(b) La suite $p_n = (1+a_1)\cdots(1+a_n)$ est croissante donc converge ou diverge vers $+\infty$ donc son inverse converge et donc $\sum u_n$ converge.

(c) $\sum |u_n|$ converge donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\ln\left|\prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)\right| = \sum\limits_{k=0}^{n} |\ln(1+u_k)|$ et $|\ln(1+u_k)| \sim |u_k|$ donc la série converge et donc $\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)$ converge vers un réel strictement positif ℓ. Alors $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|u_n|}{\ell}$ donc $\sum v_n$ converge absolument.

561. RMS 2025 1303 Centrale PSI .... énoncé p. 86

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $\varphi(f)(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0, \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ.

(c) Étudier les éléments propres de φ.

Solution. — RMS 2013 598 Mines Ponts PSI, RMS 2015 906 Centrale PC, RMS 2019 1007 Centrale PSI, RMS 2020 1209 CCINP PSI, RMS 2025 1543 IMT PSI

(a) T est clairement linéaire.
D'après le théorème fondamental de Riemann, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est f. En 0, cela donne que $\lim\limits_{x\to 0} T(f)(x) = f(0)$ et $T(f)$ est continue en 0. Ailleurs, c'est le produit de deux fonctions continues.

(b) $T(f) = \lambda f \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x)$ ce qui fournit (en dérivant), que f est nécessairement solution de l'équation différentielle $\lambda x y' + (\lambda - 1)y = 0$ et donc $\lambda \neq 0$ et $f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.
Une telle fonction est continue en $0 \iff \frac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0 \iff 0 < \lambda \leqslant 1$.
On vérifie aisément qu'une telle fonction convient.
On en déduit que $\mathrm{Sp}(T) =]0,1]$ et que le sep associé est la droite dirigée par $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

(c) $0 \notin \mathrm{Sp}(T)$ donc T est injectif.

Si $g \in \mathrm{Im}\, T$, alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Prendre pour g une fonction continue sur $[0,+\infty[$ mais pas dérivable sur $]0,+\infty[$, par exemple $g : x \mapsto |x-1|$: $g \notin \mathrm{Im}\, T$ donc T n'est pas surjectif.

562. RMS 2025 1304 Centrale PSI . . . . énoncé p. 87

Soient $h > 0$ et $W_h = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}); \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f = 2\int_x^{x+h} f\}$.

(a) Montrer que W_h est un espace vectoriel.

(b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n \colon x \mapsto \sin(\frac{2\pi n x}{h})$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille libre d'éléments de W_h. Qu'en déduit-on quant à la dimension de W_h ?

(c) L'espace vectoriel W_h possède-il une fonction non bornée ?

Solution. —

(a) La partie W_h contient manifestement la fonction nulle, et la linéarité de l'intégrale montre qu'elle est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

(b) Les fonctions f_n sont h–périodiques, et de valeur moyenne nulle (l'intégrale sur une période est nulle), donc elles vérifient l'égalité caractérisant l'appartenance à W_h.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = -(\frac{2\pi n}{h})^2$ et on note u l'endomorphisme de $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $f \mapsto f''$. Les f_n appartiennent toutes à E et satisfont

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u(f_n) = \lambda_n f_n.$$

Comme les f_n pour $n \geqslant 1$ ne sont pas la fonction nulle, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille de vecteurs propres (de u) associés à des valeurs propres distinctes (les λ_n). Le cours affirme qu'une telle famille est libre.

Cela prouve que $\dim E = +\infty$. Comme $E \subset W_h$, on en déduit que

$$\dim W_h = +\infty.$$

(c) Oui, la fonction $g \colon t \in \mathbb{R} \mapsto 2^{t/h} = \exp(t\frac{\ln 2}{h})$ est non bornée (c'est évident : $\lim_{+\infty} g = +\infty$) et appartient à h. Vérifions ce dernier point :

$$\int_x^{x+h} g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{h}{\ln 2}2^{t/h}\right]_x^{x+h} = \frac{h}{\ln 2}(2^{1+x/h} - 2^{x/h}) = \frac{h}{\ln 2}2^{x/h}$$
$$\int_{x+h}^{x+2h} g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{h}{\ln 2}2^{t/h}\right]_{x+h}^{x+2h} = \frac{h}{\ln 2}(2^{2+x/h} - 2^{1+x/h}) = \frac{h}{\ln 2}2^{1+x/h} = 2\int_x^{x+h} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

563. RMS 2025 1305 Centrale PSI . . . . énoncé p. 87

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f)(0) = f(0)$ et, pour $0 < x \leqslant 1$, $T(f)(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?

(b) Soient $f, g \in E$. On pose $F : x \mapsto x\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

i. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire F' sous la forme d'une intégrale.

ii. Montrer que, si f et g sont monotones de même sens de variation, alors $T(fg) \geqslant T(f)T(g)$.

Solution. —

(a) Voir RMS 2025 1303 Centrale PSI, RMS 2025 1543 IMT PSI, RMS 2013 598 Mines Ponts PSI, RMS 2015 906 Centrale PC, RMS 2019 1007 Centrale PSI, RMS 2020 1209 CCINP PSI
T est clairement linéaire.
D'après le théorème fondamental de RIEMANN, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est f. En 0, cela donne que $\lim\limits_{x\to 0} T(f)(x) = f(0)$ et $T(f)$ est continue en 0. Ailleurs, c'est le produit de deux fonctions continues.
Injectivité : Si $T(f) = 0$, alors $\forall x \neq 0, \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ puis par TFA, $\forall x \neq 0, f(x) = 0$ puis, par continuité, $f(0) = 0$.
Donc T est injectif.
Surjectivité : Si $g \in \operatorname{Im} T$, alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Prendre pour g une fonction continue sur $[0,1]$ mais pas dérivable sur $]0,1[$, par exemple $g : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$: $g \notin \operatorname{Im} T$ donc T n'est pas surjectif.

(b) i. D'après le TFA, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + xf(x)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - g(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - f(t)g(x))\,\mathrm{d}t = \int_0^x ((f(x) - f(t))(g(x) - g(t)))\,\mathrm{d}t$

ii. Si f et g sont monotones de même sens de variation, alors $\forall x, t \in [0,1], (f(x) - f(t))(g(x) - g(t) \geqslant 0$ donc $F' \geqslant 0$ et F est croissante. Donc $\forall x \in [0,1], F(x) \geqslant F(0) = 0$. En divisant par $x^2 > 0$, on obtient $T(fg) \geqslant T(f)T(g)$.

564. RMS 2025 1306 Centrale PSI .... énoncé p. 87

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$. Soient $I = [0, 2\pi]$ et $f : t \in I \mapsto \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}$.

(a) Montrer que $t \mapsto |z - e^{it}|$ ne s'annule pas sur I puis que f est continue sur I.

(b) Montrer que $u : t \mapsto 1, v : t \mapsto e^{it}$ et $w : t \mapsto e^{-it}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

(c) Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, que l'on déterminera, tel que $\forall t \in I, f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1-ze^{it}} + \frac{\beta}{1-\bar{z}e^{-it}}$.
Plutôt $-1 + \frac{\alpha}{1-ze^{-it}} + \frac{\beta}{1-\bar{z}e^{it}}$ CC.

(d) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

SOLUTION. —

(a) Pour tout $t \in I$ $|e^{it}| = 1 > |z|$, et donc on a $e^{it} \neq z$. Ainsi $t \mapsto |z - e^{it}|$ ne s'annule pas sur I. Donc f est bien définie sur I, et y est continue par opérations usuelles sur des fonctions continues, $t \mapsto e^{it}$ et $s \mapsto |s|$ l'étant.

(b) Si on pose une relation de liaison $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$, on obtient en évaluant en 0, π et $\pi/2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + i\beta - i\gamma = 0 \end{cases}$$

Les deux premières lignes prouvent que $\alpha = 0$, puis les deux dernières que $\beta = \gamma = 0$. Donc la famille (u, v, w) est bien libre dans $\mathbb{C}^I$.

(c) Soit $t \in I$. On remarque d'abord que le dénominateur $|z - e^{it}|^2$ peut se factoriser ainsi, en multipliant par $1 = e^{it}e^{-it}$:

$$|z - e^{it}|^2 = e^{it}e^{-it}\left(z - e^{it}\right)\left(\bar{z} - e^{-it}\right) = \left(ze^{-it} - 1\right)\left(\bar{z}e^{it} - 1\right) = \left(1 - ze^{-it}\right)\left(1 - \bar{z}e^{it}\right).$$

De plus, il se développe ainsi :

$$|z - e^{it}|^2 = \left(z - e^{it}\right)\left(\bar{z} - e^{-it}\right) = |z|^2 - ze^{-it} - \bar{z}e^{it} + 1.$$

Ceci donne donc le calcul suivant :

$$f(t) + 1 = \frac{1 - |z|^2 + \left(|z|^2 - ze^{-it} - \bar{z}e^{it} + 1\right)}{|z - e^{it}|^2} = \frac{1 - ze^{-it} + 1 - \bar{z}e^{it}}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it})} = \frac{1}{(1 - ze^{-it})} + \frac{1}{(1 - \bar{z}e^{it})}.$$

Donc $\alpha = \beta = 1$ conviennent. Pour montrer leur unicité, on reformule l'égalité en mettant au même dénominateur, pour obtenir, pour tout $t \in I$

$$1 - |z|^2 = -\left(|z|^2 - ze^{-it} - \bar{z}e^{it} + 1\right) + \alpha\left(1 - \bar{z}e^{it}\right) + \beta\left(1 - ze^{-it}\right),$$

soit, après simplification et regroupement,

$$(\alpha+\beta-2)+\bar{z}\,(1-\alpha)\,e^{it}+z\,(1-\beta)\,e^{-it}=0.$$

La question précédente prouve alors bien que $\alpha=\beta=1$ est l'unique solution (remarquons que c'est uniquement ici qu'on utilise que $z\neq 0$).

(d) Il suffit de prouver que $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-ze^{-it}}=2\pi$. En effet, on a, par linéarité de l'intégrale (les termes étant tous continus sur le segment I)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}-\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-ze^{-it}}+\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-\bar{z}e^{it}}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-2\pi+\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-ze^{-it}}+\overline{\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-ze^{-it}}\right)}\right),$$

et donc l'égalité voulue s'ensuivra.

Le reste est classique : puisque $\left|ze^{-it}\right|<1$ pour tout $t\in I$, on a le développement en série valable sur I

$$\frac{1}{1-ze^{-it}}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^ne^{-int},$$

et la convergence de cette série de fonctions est normale, donc uniforme, sur I, la série $\sum|z|^n$ étant absolument convergente. Les termes étant continus, l'intégration terme à terme sur le segment I est donc possible, et on obtient

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-ze^{-it}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}z^ne^{-int}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[z^n\frac{e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi}=2\pi+0=2\pi.$$

565. RMS 2025 1307 Centrale PSI .... énoncé p. 87

Soit $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

(a) Justifier la convergence de I.

(b) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\sin^3 t=-\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)$.

(c) Montrer que $I=\frac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

(d) Montrer que $g:t\mapsto\frac{\sin(t)-t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 .

(e) En déduire la valeur de I.

Solution. —

(a) $t\mapsto\frac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, équivalente à t (donc tend vers 0) en $t=0$ et $\left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$. Donc $t\mapsto\frac{\sin^3 t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc I existe.

(b) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\sin^3 t=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=\frac{e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{2i(-4)}=-\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)$.

(c) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\int_x^{+\infty}\frac{-\sin(3t)+3\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(-\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}\mathrm{d}t+3\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right)$

mais avec le cdv $u=3t$ on a $\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}\mathrm{d}t=\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{\left(\frac{u}{3}\right)^2}\frac{\mathrm{d}u}{3}=3\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}\mathrm{d}u$

donc $-\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}\mathrm{d}t+3\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t=-3\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}\mathrm{d}u+3\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t=3\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

Donc $I=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

(d) $g(t)=\frac{\sin(t)-t}{t^2}\sim_{t\to 0}\frac{-\frac{t^3}{3}}{t^2}\longrightarrow_{t\to 0}0.$

Le prolongement de g ainsi construit est continu sur $[0,+\infty[$ est continu donc admet une primitive, notée G.

(e) $\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t = \int_x^{3x} \left(g(t) + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = G(3x) - G(x) + \ln 3 \longrightarrow_{x \to 0} G(0) - G(0) + \ln 3 = \ln 3$. Donc $I = \frac{3 \ln 3}{4}$.

566. RMS 2025 1308 Centrale PSI .... énoncé p. 87

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(t)^2 \, \mathrm{d}t$. On suppose que $f(x)F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser cette limite.

(b) Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{x} \displaystyle\int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell'$.

(c) Trouver un équivalent de F et de f en $+\infty$.

Solution. — Voir 2016 366 X ESPCI PC et 2018 496 X ESPCI PC.

(a) La fonction F est positive et croissante, car c'est la primitive d'une fonction continue et positive (la fonction f^2). Le théorème de la limite monotone affirme que F possède une limite en $+\infty$, notée

$$L = \int_0^{+\infty} f^2,$$

avec $L \in \mathbb{R}_+$ ou bien $L = +\infty$. La fonction f ne peut pas être nulle, sinon ℓ ne pourrait pas être strictement positive. Alors la fonction F devient strictement positive au voisinage de l'infini, donc $L \neq 0$. L'hypothèse relative à l'existence de ℓ se réécrivant

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\ell}{F(x)},$$

on en déduit que f admet une limite en $+\infty$ donnée *a priori* par la disjonction de cas suivante :

$$\lim_{+\infty} f = \begin{cases} \frac{\ell}{L} & \text{si } f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fait, le premier cas est impossible car, si f possède la limite finie non nulle $\frac{\ell}{L}$ en $+\infty$, alors f^2 possède la limite finie non nulle $(\frac{\ell}{L})^2$ en $+\infty$, donc n'est pas intégrable. On conclut que

$$f \notin L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad L = \lim_{+\infty} F = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = 0.$$

(b) Il s'agit d'un théorème de Cesàro pour les fonctions. Tout d'abord, en considérant la fonction $g - \ell'$, on se ramène par linéarité de l'intégrale au cas où $\ell' = 0$.

Si $\ell' = 0$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que $\forall t \geqslant x_0, \ |g(t)| \leqslant \varepsilon$. Si l'on pose $M = |\int_0^{x_0} g(t) \, \mathrm{d}t|$, l'inégalité triangulaire permet d'écrire que, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{M}{x} + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x |g(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{x} + \frac{\varepsilon}{x} \int_{x_0}^x \mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{x} + \varepsilon \frac{x - x_0}{x} \leqslant \frac{M}{x} + \varepsilon.$$

Comme $\frac{M}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, il existe $x_1 > 0$ tel que $\forall x \geqslant x_1, \ \frac{M}{x} \leqslant \varepsilon$. On pose $x_2 = \max(x_0, x_1)$. Alors, pour tout $x \geqslant x_2$, on aura

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui achève la preuve.

(c) Le théorème fondamental de l'intégration dit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f^2$. L'hypothèse relative à ℓ, une fois élevée au carré, s'écrit donc $F'(x)F^2(x) \to \ell^2$ quand $x \to +\infty$. La question précédente appliquée à $g = F'F^2$ montre alors que

$$\frac{1}{x} \int_0^x F'(t)F^2(t) \, \mathrm{d}t = \frac{F^3(x) - F^3(0)}{3x} = \frac{F^3(x)}{3x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell^2.$$

Il en résulte que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (3\ell^2 x)^{1/3} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \left(\frac{\ell}{3x} \right)^{1/3}.$$

567. RMS 2025 1309 Centrale PSI .... énoncé p. 88

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ et, pour $x < 0,\ f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$.

(a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

(b) La convergence est elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Solution. —

(a) La suite (f_n) converge simplement vers

$$f = \mathrm{id} \colon x \in \mathbb{R} \mapsto x.$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\delta_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{x}{1+nx} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction δ_n est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$ (et elle l'est aussi en zéro avec $\delta_n'(0) = -1$ car on dispose du développement limité $\delta_n(x) = -x + \mathrm{o}(x)$ en zéro) avec

$$\delta_n'(x) = \begin{cases} -\frac{1+nx^2-x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{nx^2-1}{(1+nx^2)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1+nx-nx}{(1+nx)^2} = -\frac{1}{(1+nx)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		0		$+\infty$
$\delta_n'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$\delta_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{n}$

On en déduit que

$$\|f_n - f\|_\infty^{]-\infty,0[} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_\infty^{[0,+\infty[} = \frac{1}{n},$$

donc $\|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour n assez grand ($n \geqslant 4$) tend vers zéro quand $n \to +\infty$: la convergence est uniforme.

568. RMS 2025 1310 Centrale PSI .... énoncé p. 88

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \frac{1+\sin(2\pi nx)}{1+n^2x^2}$.

(a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?

Soient $\varepsilon > 0$ fixé, $A_n = f_n^{-1}(([\varepsilon, +\infty[)$ et $u_n = \mathbf{1}_{A_n}$.

(b) Tracer le graphe de f_5 et en déduire que u_n est continue par morceaux.

(c) Montrer que la suite (u_n) converge simplement et donner sa limite.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = 0$.

Solution. —

(a) La majoration $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n^2x^2}$ montre que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le caractère prolongeable par continuité de f_n avec $f_n(0) = 1$ montre que $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} \geqslant 1$, donc la convergence de (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Le tracé de f_5 relève de l'usage de Python, et est laissé à la lectrice et au lecteur.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, il existe $c > 0$ tel que $\forall x > c,\ |f_n(x)| < \varepsilon$. Par conséquent, $A_n \subset]0, c]$.

Par ailleurs, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n'(x) = \frac{2\pi n \cos(2\pi nx)(1+n^2x^2) - (1+\sin(2\pi nx))2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$$
$$= \frac{n\pi\cos(2n\pi x)(1+\frac{1}{n^2x^2}) - \frac{1+\sin(2\pi nx)}{x}}{2n^2x^2(1+n^2x^2)^2}$$

Comment prouver sans trop de technicité que f_n' n'a qu'un nombre fini de racines dans l'intervalle $]0, c]$? (E.R.)

Peut-être ceci : $x \in A_n \iff f_n(x) \geqslant \varepsilon \iff g(x) = 1 + \sin(2\pi nx) - \varepsilon(1+n^2x^2) \geqslant 0$.
$g''(x) = -2n^2(2\pi^2\sin(2\pi nx) - \varepsilon) = 0 \iff \sin(2\pi nx) = \frac{\varepsilon}{2\pi^2} \iff x = \frac{1}{2n\pi}\arcsin(\frac{\varepsilon}{2\pi^2})$ ou $\frac{1}{2n\pi}(\pi - \arcsin(\frac{\varepsilon}{2\pi^2}))$ modulo 2π.
Ainsi, g'' admet un nombre fini de zéros dans l'intervalle borné $]0, c]$, en lesquels elle change de signe. Il en va donc de même pour g' puis pour g.
Donc $A_n = g^{-1}([0, +\infty[$ est une réunion finie d'intervalles inclus dans $]0, c]$. (LG)

Alors les deux fonctions $f_n - \varepsilon$ et $f_n + \varepsilon$, ayant toutes deux pour dérivée f_n', n'auront qu'un nombre fini de racines dans $]0, c]$ en vertu du théorème de Rolle. Alors A_n sera la réunion d'un nombre fini de segment contenus dans $]0, c]$, et u_n sera continue par morceaux (en réalité, u_n sera une fonction en escalier, le point essentiel étant le nombre *fini* de discontinuités sur tout segment).

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La majoration de la question (a) montre que $f_n(x) \geqslant \varepsilon$ implique $\frac{2}{n^2x^2} \geqslant \varepsilon$, donc que $x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\varepsilon}}$. En d'autres termes,

$$A_n \subset \left]0, \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\varepsilon}}\right].$$

Par conséquent u_n est nulle sur $]\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\varepsilon}}, +\infty[$, donc la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) La question précédente montre que la suite de fonctions continues par morceaux (u_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $A_n \subset]0, \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\varepsilon}}] \subset]0, \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}] = J$, on a

$$|u_n| \leqslant \mathbf{1}_J$$

la fonction $\mathbf{1}_J$ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée montre alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = 0.$$

569. RMS 2025 1311 Centrale PSI .... énoncé p. 88

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \mapsto \frac{e^{-nt^2}}{n^2}$.

(a) Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) Prouver que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-nt^2}}{n^2}$.

(a) La majoration $\forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ prouve la convergence normale, donc simple et uniforme, de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Chaque f_n est paire et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(t) = -2t\frac{e^{-nt^2}}{n}$$
$$f_n''(t) = -\frac{2e^{-nt^2}}{n}(1-2nt^2).$$

Le tableau de variation de f_n' sur $\mathbb{R}_+$ est donc le suivant :

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$f_n''(t)$		$-$	0	$+$	0
$f_n'(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}}$	$\nearrow$	0

La parité de f_n, donc le caractère impair de f_n', permet d'en déduire que

$$\|f_n'\|_\infty = \frac{c}{n^{3/2}},$$

où c est une constante strictement positive. Alors $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions assure que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

570. RMS 2025 1312 Centrale PSI .... énoncé p. 88

Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n \colon x \mapsto x^{\ln(n)}$. Soit $f \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathscr{D}_f$?

(b) Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$.

(c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f_n au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Solution. — Les fonctions f_n sont *a priori* définies sur $\mathbb{R}_+^*$, et sont prolongeables par continuité en zéro par la valeur 0, sauf f_1 qui est constante de valeur 1. On désignera encore par f_n ce prolongement.

(a) Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on a

$$f_n(x) = x^{\ln n} = \exp((\ln n)(\ln x)) = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}$$

La série $\sum f_n(x)$ est donc une série de Riemann d'exposant $-\ln x$. Elle converge si et seulement si $-\ln x > 1$, c'est-à-dire $x < \frac{1}{e}$. Comme $\sum f_n(0)$ est nulle à partir du rang 2, elle converge, et on conclut que

$$\mathscr{D}_f = \left[0, \frac{1}{e}\right[.$$

Chaque f_n possède une limite finie $\ell_n = \frac{1}{n}$ en $\frac{1}{e}$. Si la convergence de la série $\sum f_n$ était uniforme sur $\mathscr{D}_f$, le théorème de la double limite assurerait entre autres que la série numérique $\sum \ell_n$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.

On conclut que $\sum f_n$ n'est pas uniformément convergente sur $\mathscr{D}_f$.

(b) Fixons un segment $[a, b] \subset \mathscr{D}_f$ (avec $b > 0$). L'expression de f_n obtenue à la question précédente montre que $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} = \frac{1}{n^{-\ln b}}$, qui est le terme général d'une série convergente. Par suite, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathscr{D}_f$. Le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions assure alors que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

On va en fait démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intérieur de $\mathscr{D}_f$, c'est-à-dire sur $]0, \frac{1}{e}[$. Sur cet intervalle ouvert, les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[, \quad f_n^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\ln n - i)\right) x^{\ln(n) - k}.$$

On fixe $k \in \mathbb{N}$ ($k \geqslant 1$ suffirait puisqu'on a déjà étudié la continuité de f), ainsi qu'un segment $[a, b] \subset]0, \frac{1}{e}[$. Pour n assez grand, $\ln n \geqslant k$, donc tous les facteurs du produit ci-dessus sont positifs, et on a la majoration

$$0 \leqslant \prod_{i=0}^{k-1} (\ln n - i) \leqslant (\ln n)^k.$$

Ensuite $x \in [a,b]$ implique $\ln a \leqslant \ln x \leqslant \ln b$, puis $(\ln a)(\ln n - k) \leqslant (\ln x)(\ln n - k)(\ln b)(\ln n - k)$ car $\ln n - k$ est positif. En composant par l'exponentielle, croissante, on obtient $a^{(\ln n)-k} \leqslant x^{(\ln n)-k} \leqslant b^{(\ln n)-k}$. Par suite,

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{b^k} \times \frac{(\ln n)^k}{n^{-\ln b}}.$$

Comme $b < \frac{1}{e}$, on a $-\ln b > 1$, et on choisit $\alpha \in]1, -\ln b[$, de sorte que $n^\alpha \|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} \to 0$ quand $n \to +\infty$ par croissances comparées. La règle de Riemann assure alors que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$, donc uniformément, et le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions permet de conclure : f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, \frac{1}{e}[$, et se dérive terme à terme à tout ordre.

Remarque. — Ce qui précède assure que $\sum_{n\geqslant 3}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{1}{e}[$ car $|f_n'(x)| = |(\ln n)x^{\ln n - 1}| \leqslant (\ln n) b^{\ln n - 1}$ pour $n \geqslant 3$, attendu que $\ln n - 1 > 0$. On conclut comme ci-dessus. Mais comme $f_1 = 1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_2 \colon x \mapsto x^{\ln 2}$ n'est pas dérivable en zéro vu que $\ln 2 < 1$, la fonction f n'est pas dérivable en zéro, en tant que somme d'une fonction qui l'est et de f_2 qui ne l'est pas.

(c) Comme $f_n'(\frac{1}{e}) = \frac{e \ln n}{n}$, l'équation de la tangente à la courbe de f_n au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est

$$y = f_n'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e \ln n}{n}\left(x - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{n}.$$

571. RMS 2025 1313 Centrale PSI .... énoncé p. 88

On pose, pour $x > 0$ et $n \geqslant 2, U_n(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n$. On admet que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente.

(a) Donner le domaine de convergence D de $S \colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} U_n(x)$.

(b) La convergence de cette série est-elle normale sur D ?

(c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \colon x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$. Montrer que, pour tout x appartenant à D et tout $n \geqslant 2$ on a $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

(d) En déduire que S est continue sur D. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

Solution. —

(a) Soit $x > 0$.

- Si $x < 1$, la majoration $|\frac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n| \leqslant c x^n$ où $c = \frac{|\ln x|}{\ln 2}$ ne dépend pas de n montre que $\sum U_n(x)$ converge.
- Si $x = 1$, la série étduéie est la série nulle, donc converge.
- Si $x > 1$, la suite $(\frac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n)$ diverge vers l'infini par croissances comparée, donc $\sum U_n(x)$ diverge.

En conclusion, le domaine de convergence de $S \colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} U_n(x)$ est

$$D =]0, 1].$$

(b) La fonction U_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D avec

$$\forall x \in]0,1], \quad U_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{\ln n}(1 + n \ln x).$$

Le tableau de variation de U_n sur D s'en déduit :

x	0		$e^{-1/n}$		1
$U_n'(x)$		$-$	0	$+$	0
$U_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-1}}{n \ln n}$	$\nearrow$	0

Par conséquent, $\|U_n\|_\infty^D = \frac{e^{-1}}{n \ln n}$, qui est, selon l'énoncé, le terme général d'une série divergente. La convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} U_n$ n'est donc pas normale sur D.

(c) Dans un premier temps, en majorant $\frac{1}{\ln k}$ par $\frac{1}{\ln(n+1)}$ pour tout $k \geqslant n+1$, on obtient, pour tout $x \in]0,1[$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|\ln x|}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^n}{\ln(n+1)} \times \underbrace{\frac{x \ln x}{x-1}}_{\tau(x)} \leqslant \tau(x).$$

La fonction τ ainsi définie de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto x \ln x$ au point 1. Elle est continue, prolongeable par continuité en zéro par la valeur zéro (croissances comparées) et aussi en 1, puisque $x \mapsto x \ln x$ y est dérivable de nombre dérivé 1. Elle est donc bornée, et cela suffit pour traiter la dernière question.

Néanmoins, prouvons l'inégalité demandée par l'énoncé en calculant

$$\forall x \in]0,1[, \quad \tau'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2}.$$

Cette dérivée est positive par concavité du logarithme. Le calcul des limites de τ mené ci-dessus montre alors que

$$\forall x \in]0,1[, \quad 0 \leqslant \tau(x) \leqslant 1,$$

et on en déduit que pour tout x appartenant à D et tout $n \geqslant 2$ on a

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

(d) L'inégalité ci-dessus montre que $\sum_{n\geqslant 2} U_n$ converge uniformément sur D. Comme les U_n sont toutes continues, le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions montre que S est continue sur D.

Les fonctions U_n sont toutes prolongeables par continuité n zéro par la valeur zéro, donc elles sont intégrable sur D avec (intégration par parties classique justifiée par la convergence du crochet) :

$$\int_0^1 |U_n(x)| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln n} \left(\left[\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \,\mathrm{d}x \right) = \frac{1}{(n+1)\ln n} \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2 \ln n}.$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2 \ln n} \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 3$, la série $\sum \int_D |u_n|$ converge, dont on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme (les hypothèses faibles, notamment la continuité de S, ont déjà été prouvées).

Par suite, S est intégrable sur D et

$$\int_0^1 S(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=2}^{+\infty} U_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 U_n(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln n}.$$

572. RMS 2025 1314 Centrale PSI .... énoncé p. 88

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$ est égal à 1 .

(b) Rayon de convergence et somme de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} z^n$.

(c) Rayon de convergence et somme de $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.

Solution. —

(a) Cours.

(b) RMS 2015 668 Mines Ponts PSI, RMS 2018 1347 CCP PSI, RMS 2018 1429 CCP PC, RMS 2019 1256 IMT PC
Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$, et les deux séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum nx^n$ sont de rayon de convergence égal à 1, donc par comparaison, $R = 1$
Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k}$. Or, d'une part,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2),$$

et on en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

D'autre part $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, donc $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$, puis $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$ (toujours pour $x \in]-1,1[$) et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

(c) RMS 2017 1313 IMT PSI
$R = +\infty$ avec d'Alembert.
On trouve

$$1 + j^k + \bar{j}^k = 1 + j^k + j^{2k} = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 3k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule ensuite

$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + j^n + j^{2n}) \frac{x^n}{n!} = 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

et on en déduit, en utilisant l'égalité $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}\right) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

573. RMS 2025 1315 Centrale PSI .... énoncé p. 89

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k H_k}{k+1}$ converge.

(b) Montrer que $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ est développable en série entière et trouver les coefficients a_n de son développement. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Solution. — Voir RMS 2016 844 Centrale PC
On rappelle que $H_n \sim \ln(n)$ (par comparaison série intégrale par exemple).

(a) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{H_n}{n+1}$ converge, car elle relève du théorème spécial des séries alternées :

- Elle est clairement alternée.
- Son terme général est équivalent à $(-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n+1}$, qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ (croissances comparées).

- La valeur absolue de son terme général forme une suite décroissante, car

$$\frac{H_{n+2}}{n+2} \leqslant \frac{H_{n+1}}{n+1} \iff (n+1)H_{n+2} = (n+1)\left(H_{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \leqslant (n+2)H_{n+1} \iff \frac{n+1}{n+2} \leqslant H_{n+1},$$

ce qui est vrai, car le membre de gauche est plus petit que 1, alors que celui de droite est plus grand que 1.

(b) D'après le cours, les deux fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sont développables en série entière au voisinage de zéro avec des rayons de convergence égaux à 1. On note respectivement $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ ces développements. Le théorème relatif au produit de Cauchy des séries entières affirme que leur produit, la fonction f, est développable en série entière au voisinage de zéro avec un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(1,1) = 1$. De plus, on a $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k} \times 1 = -H_n.$$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ donc $R = 1$ par la règle de d'Alembert.

574. RMS 2025 1316 Centrale PSI .... énoncé p. 89

(a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

(b) Établir que, pour $x \in]-R,R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_{1-x}^{1} \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

(c) Que se passe-t-il en $x = 1$?

Solution. — Voir 2025 936 Mines Ponts PSI.

(a) Il vaut 1 (le cours dit que « Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$ vaut 1 », ou bien croissances comparées, ou bien règle de d'Alembert).

(b) Fixons $x \in]-1,1[$.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est continue sur le segment $[1-x, 1]$ et le changement de variable $u = 1-t$ donne

$$\int_{1-x}^{1} \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

L'intégration terme à terme est justifiée est justifiée par l'intégrabilité de $u \mapsto \frac{u^{n-1}}{n}$ et la convergence de $\sum \frac{x^n}{n^2}$, ou bien par la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions sur le segment $[0,x]$.

(c) Pour $x = 1$, on obtiendrait $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2} = 0$!

575. RMS 2025 1317 Centrale PSI .... énoncé p. 89

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$. Déterminer une relation entre W_{2n+2} et W_{2n}. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(b) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin x)^{2n+1}}{(2n+1)}$. On pourra commencer par déterminer le développement en série entière de arcsin.

(c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution. — Je suis persuadé de l'avoir vu les années précédentes, mais je ne le retrouve pas (E. R.)

(a) Très classique : avec une IPP, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ donc $W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} W_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(b) $\forall x \in]-1,1[, \arcsin' x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ et donc intégrant sur $[0,x]$ et avec $\arcsin 0 = 0$, on a $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

On remplace ensuite x par $\sin x (\in]0,1[)$ en utilisant que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \arcsin(\sin x) = x$.

(c) On intègre sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ avec le théorème d'intégration terme à terme : $\displaystyle\int_0^1 |u_n(x)| \, \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$ d'après a), c'est bien le tg d'une série convergente.

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$.

576. RMS 2025 1318 Centrale PSI . . . . énoncé p. 89

Mots-clés : inégalités de Kolmogorov

Soient $a > 0, f \in \mathcal{C}^\infty([-a,a], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}, M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$. Correction : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer $\forall x \in [-a,a], \; |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$. Correction : $\forall x \in \mathbb{R}, \; |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$.
En déduire : $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

(b) On suppose qu'il existe deux réels K_1 et R tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; M_{2n} \leqslant K_1(2n)!R^{2n}$. Montrer qu'alors il existe un réel K_2 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; M_{2n+1} \leqslant K_2(2n+1)!R^{2n+1}$. En déduire que f est développable en série entière sur un voisinage de 0.

Solution. — Voir 2013 363 X ESPCI PC, 2020 181 ENS PSI, 2020 431 X ESPCI PC.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne $|f(x+a) - f(x) - af'(x)| \leqslant \frac{a^2M_2}{2}$ et $|f(x-a) - f(x) + af'(x)| \leqslant \frac{a^2M_2}{2}$ donc $|f(x+a) - f(x-a) - 2af'(x)| \leqslant a^2M_2$ et finalement $2a\,|f'(x)| \leqslant |f(x+a) - f(x-a)| + a^2M_2 \leqslant 2M_0 + a^2M_2$, soit $|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$.

Ceci pour tout x, et donc $M_1 \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{M_0}{t} + \frac{tM_2}{2}$ admet un minimum en $t = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, égal à $\sqrt{2M_0M_2}$, donc $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$, soit $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

(b) L'inégalié précédente s'applique à la fonction $f^{(2n)}$ et donne $M_{2n+1}^2 \leqslant 2M_{2n}M_{2n+2}$ soit $M_{2n+1}^2 \leqslant 2K_1(2n)!R^{2n}K_1(2n+2)!R^{2n+2} = 2K_1^2 \frac{2n+2}{2n+1} \left((2n+1)!R^{2n+1}\right)^2$.

Et comme $\frac{2n+2}{2n+1} \leqslant 2$, $M_{2n+1}^2 \leqslant \left(2K_1(2n+1)!R^{2n+1}\right)^2$ soit $M_{2n+1} \leqslant 2K_1(2n+1)!R^{2n+1} = K_2(2n+1)!R^{2n+1}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; M_n \leqslant Kn!R^n$ en notant $K = \max(K_1, K_2)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le reste intégral de Taylor $R_n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t$ se majore donc par

$$|R_n(f)(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M_{n+1} \, \mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \leqslant K\,|x|^{n+1}\,R^{n+1}$$

En particulier, lorsque $|x|\,R < 1$ soit pour $|x| < 1/R$, on a donc par encadrement $R_n(f)(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, autrement dit $f(x)$ est égal à la somme de la série de Taylor de f évaluée en x. Donc f est développable en série entière sur $]-1/R\,;1/R[$.

577. RMS 2025 1319 Centrale PSI . . . . énoncé p. 89

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on pose $v_n = -\alpha \ln(n) + \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{\alpha}{k})$ et $a_n = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (\alpha + i)}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

(b) Montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

(c) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

(d) Étudier la convergence de $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$. Ind. Pour $\alpha \leqslant 1$, on pourra étudier la convergence de $\sum(a_{n+1} - a_n)z^n$.

Solution. —

(a) On trouve $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\alpha+n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$, donc

$$R = 1.$$

(b) On trouve

$$v_n - v_{n-1} = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) + \alpha \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha\left(-\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.

(c) Montrer l'équivalent souhaité revient à montrer que la suite $(n^\alpha a_n)$ possède une limite strictement positive, ou encore que la suite de terme général

$$\begin{aligned}\ln(n^\alpha a_n) &= \alpha\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + i) = \alpha\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{i=1}^n \left[\ln(i) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{i}\right)\right] \\ &= \alpha\ln(n) - \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{\alpha}{i}\right) = -v_n\end{aligned}$$

converge. Il revient au même de montrer que la suite (v_n) converge, ou encore (d'après le cours) que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge. La question précédente permet de conclure : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

(d)
- Pour $z = R = 1$, il s'agit d'étudier la série à termes positifs $\sum a_n$ avec $a_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Pour $|z| = R$ et $z \neq 1$, donc pour $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$, on effectue la transformation d'Abel indiquée par l'énoncé, en calculant la somme partielle S_n d'ordre n : si l'on pose $T_k = \sum_{\ell=0}^k z^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $T_{-1} = 0$, alors

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^n a_k(T_k - T_{k-1}) = \sum_{k=0}^n a_k T_k - \sum_{k=1}^n a_k T_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k T_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} T_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1})T_k + a_{n+1}T_n.\end{aligned}$$

Or $|T_n| = |\frac{1-z^{n+1}}{1-z}| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$ pour tout k, donc la suite (T_n) est bornée, et $a_n \to 0$ d'après l'équivalent de la question (c), donc la suite $(a_{n+1}T_n)$ converge vers zéro.
Par ailleurs, $a_n - a_{n+1} = a_n(1 - \frac{n+1}{\alpha+n+1}) = \frac{\alpha a_n}{\alpha+n+1} \sim \frac{\lambda\alpha}{n^{1+\alpha}}$ quand $n \to +\infty$. Comme $1+\alpha > 1$ d'après l'énoncé, et comme la suite (T_n) est bornée, cet équivalent prouve que la série de terme général $(a_n - a_{n+1})T_n$ converge absolument, donc converge.
Finalement, la série $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ converge lorsque $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ pour tout $\alpha > 0$.

578. RMS 2025 1320 Centrale PSI énoncé p. 90
Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!} \frac{x^n}{n!}$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (u_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable. Donner le rayon de convergence et la valeur de $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ où $a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}u(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

SOLUTION. —

(a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,p}(x)| = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)!}(e^x)^{2p+2} = e^x\,\mathrm{sh}(e^x)$ qui est bien finie.

Puisque la famille est sommable, on peut intervertir les $\sum$: $u(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}(e^x)^{2p+2} =$ $e^x\sin(e^x)$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}u(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sin(e^t)\,\mathrm{d}t \overset{v=e^t}{=} \int_1^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v$ qui converge *via* une IPP (classique).

579. RMS 2025 1321 Centrale PSI .... énoncé p. 90

(a) Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ puis celle de $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{n\ln(n)^{(1-\alpha)}}$.

Soient $n_0\in\mathbb{N}, \Phi\in\mathcal{C}^0([n_0,+\infty[,\mathbb{R})$ décroissante et positive telle que $\sum\Phi(n)$ diverge.

(b) Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n$.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n \underset{x\to1^-}{\sim} \int_{n_0}^{+\infty}\Phi(t)x^t\,\mathrm{d}t$.

SOLUTION. —

(a) Bertrand dit que, *via* une comparaison $\sum-\int$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{n\ln(n)^{(1-\alpha)}}$ converge.

(b) Pour $x=1$, la série diverge et pour $|x|<1$, $\forall n\geqslant n_0, \Phi(n)|x|^n \leqslant \Phi(n_0)|x|^n$ qui est le tg d'une série convergente (géométrique). Donc $R=1$.

(c) $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n$ croît sur $[0,1[$ puisque le tg croît, donc admet une limite ℓ (finie ou $+\infty$) lorsque $x\to1^-$.

Pour $x\in[0,1[$, le tg est $\geqslant 0$ donc pour $N\geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n \geqslant \sum_{n=n_0}^{N}\Phi(n)x^n$. En passant cette inégalité à la limite lorsque $x\to1^-$, on obtient $\ell\geqslant\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N}\Phi(n)$ puis en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\ell=+\infty$.
On effectue une comparaison $\sum-\int$: pour $x\in]0,1[$, $t\mapsto\Phi(t)x^t$ est décroissante sur $[n_0,+\infty[$.
Soit $n\geqslant N_0$. $\forall t\in[n,n+1], 0\leqslant\Phi(n+1)x^{n+1}\leqslant\Phi(t)x^t\leqslant\Phi(n)x^n$ donc $0\leqslant\Phi(n+1)x^{n+1}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\Phi(t)x^t\,\mathrm{d}t\leqslant\Phi(n)x^n$ puis, en sommant sur $n\geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\Phi(n)x^n\leqslant\int_{n_0}^{+\infty}\Phi(t)x^t\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n = +\infty$, $\Phi(n_0)x^{n_0}$ est négligeable devant $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Phi(n)x^n$ donc les deux encadrants sont équivalents. En divisant par cet équivalent commun et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient le résultat escompté.

580. RMS 2025 1322 Centrale PSI .... énoncé p. 90

Soient, pour $n\in\mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

(a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, (4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$.

(b) Donner le rayon de convergence, noté R, de f.

(c) Pour tout x dans $]-R,R[$, vérifier que $x(4-x)f'(x)-(x+2)f(x)=-2$.

(d) Déterminer une primitive de $x\mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0,4[$. Ind. Poser $u=\sqrt{\frac{4-x}{x}}$.

(e) Trouver a,b réels tels que $\forall x\in]0,4[$, $\frac{x+2}{x(4-x)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{4-x}$.

(f) Donner la valeur de $f(1)$.

Solution. — Voir 2016 586 Mines Ponts PC.

(a) $\frac{n+1}{a_{n+1}}=(n+1)\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!}=2(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}=(4n+2)\binom{2n}{n}=\frac{4n+2}{a_n}$.

(b) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n+1}{4n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}$ donc $R=4$.

(c) Avec le théorème de dérivation terme à terme, on obtient $x(4-x)f'(x)-(x+2)f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(4na_n-(n-1)a_{n-1}-2a_n-a_{n-1})x^n-2a_0=-2$ d'après a).

(d) $u=\sqrt{\frac{4-x}{x}} \iff x=\frac{4}{u^2+1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-8u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$.
$\int\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=-8\int u\frac{u^2+1}{4}\frac{u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u=-2\int\frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u=-2\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u=-2(u-\arctan u)+C=-2\sqrt{\frac{4-x}{x}}+2\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}}+C$

(e) $\frac{x+2}{x(4-x)}=\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(4-x)}$.

(f) On résout l'équation différentielle avec les calculs faits ci-dessus.
Une solution de l'équation homogène est $y_1=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}^3}$.
Avec la variation de la constante, zy_1 et solution de l'équation complète $\iff z'=\frac{-2}{ay_1}=\frac{-2\sqrt{4-x}^3}{x(4-x)\sqrt{x}}=-2\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$.
On en déduit avec d) que $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}^3}(C+4\sqrt{\frac{4-x}{x}}-4\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}})$.
Un développement limité en zéro à droite de f donne :

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-3/2}\left[C\sqrt{x}+8\left(1-\frac{x}{4}\right)^{1/2}-4\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)\right)\right]\\&=\frac{1}{8}\left(1+\mathrm{O}(x)\right)\left[C\sqrt{x}+8\left(1+\mathrm{O}(x)\right)-4\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{O}(\sqrt{x})\right)\right]\\&=1+\left(\frac{C}{8}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{x}+\mathrm{O}(\sqrt{x})\end{aligned}$$

Si $C\neq 2\pi$, la fonction f ne serait pas dérivable en zéro, donc $C=2\pi$. Alors

$$f(1)=\frac{1}{3\sqrt{3}}(2\pi+4\sqrt{3}-4\arctan(\sqrt{3}))=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(2\pi+4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

581. RMS 2025 1323 Centrale PSI .... énoncé p. 90

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n=\int_0^1 f(x)x^n\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que si $f(1)>0$, alors il existe $c>0, a\in]0,1[$ tels que $\forall t\in[a,1], f(t)\geqslant c$.

(b) On suppose que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $f(1)=0$.

(c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow f(1)=0$.

Solution. —

(a) C'est la définition de la continuité de f en 1 : $\varepsilon=\frac{f(1)}{2}>0$, $c=1-\varepsilon$, $a=1-\eta$.

(b) Si $f(1)>0$, alors $\forall x\in[a,1], f(x)\geqslant c>0$ donc $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^a f(x)x^n\,\mathrm{d}x + \int_a^1 cx^n\,\mathrm{d}x$.
$\left|\displaystyle\int_0^a f(x)x^n\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_0^a |f(x)|x^n\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_0^a |f(x)|x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^a |f(x)|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a \frac{|f(x)|}{1-x}\,\mathrm{d}x$ donc la SATP $\displaystyle\sum\int_0^a |f(x)|x^n\,\mathrm{d}x$ est bornée donc converge et donc, par comparaison, la série $\displaystyle\sum\int_0^a f(x)x^n\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
D'autre part, $0\leqslant \displaystyle\int_a^1 cx^n\,\mathrm{d}x = \frac{c(1-a^{n+1})}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n+1}$ donc la série $\displaystyle\sum\int_a^1 cx^n\,\mathrm{d}x$ diverge.
On a alors que $\sum u_n$ diverge : contradiction.
Si $f(1)<0$, on obtient la même contradiction en considérant $g=-f$.
Donc $f(1)=0$.

(c) Il reste à démontrer $\Leftarrow$: on suppose $f(1)=0$. Une IPP (légitime car f est supposée $\mathcal{C}^1$) fournit : $u_n = -\frac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 f'(x)x^{n+1}\,\mathrm{d}x$. Or f' est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$. On en déduit que $|u_n| \leqslant \frac{\|f'\|_\infty}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\|f'\|_\infty}{(n+1)(n+2)}$ donc $\sum u_n$ converge par comparaison à l'exemple de Riemann.

582. RMS 2025 1324 Centrale PSI .... énoncé p. 90

Soit, pour $n\in\mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-1/t}t^n\,\mathrm{d}t$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que I_n est bien défini et donner son signe

(b) Étudier les variations de (I_n).

(c) Montrer la convergence de la suite (I_n) et déterminer sa limite.

(d) Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}, (n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$.

(e) Montrer que $I_n \sim \frac{1}{en}$.

(f) Déterminer la nature des séries de termes généraux I_n et $(-1)^n I_n$.

(g) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum I_n x^n$.

Solution. — $\approx$ 2025 1558 CCINP PSI

583. RMS 2025 1325 Centrale PSI .... énoncé p. 91

(a) Énoncer les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme.

(b) On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

i. Justifiez la convergence de l'intégrale.

ii. Montrer que : $\forall t\geqslant 0, \frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t e^{-(2n+1)t}$.

iii. Appliquer le théorème d'intégration terme à terme et conclure.

(c) On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$.

i. Justifiez la convergence de l'intégrale.

ii. Montrer que : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, \frac{\cos(t)}{1+e^t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-nt}\cos(t)$.

iii. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique-t-il ?

iv. Établir la relation attendue.

Solution. — Voir RMS 2019 1192 CCP PSI pour c)

(a) Cours

(b) i. $f : t \mapsto \frac{t}{\operatorname{ch} t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2te^{-t} = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$.

ii. $\frac{t}{\operatorname{ch}(t)} = \frac{2te^{-t}}{1+e^{-2t}} \overset{e^{-2t}<1}{=} 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n te^{-(2n+1)t}$.

iii. Avec une IPP, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$, tg d'une série convergente.
On en déduit qu'on peut intervertir $\sum$ et $\int$ et le même calcul au $(-1)^n$ près fournit le résultat.

(c) La fonction $f\colon t \mapsto \frac{\cos t}{1+e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$; en $+\infty$, $f(t) = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, I converge.

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|e^{-t}| < 1$ donc

$$f(t) = \frac{e^{-t}\cos t}{1+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cos t\, e^{-(n+1)t}.$$

Le théorème d'intégration terme à terme ne fonctionne pas. En effet, quoi faire d'autre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$?

On utilise donc le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles : On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_k\colon t \in]0, +\infty[\mapsto (-1)^l \cos t\, e^{-(k+1)t}$.La suite de fonctions continues (S_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction continue f. De plus, on dispose de l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad : \forall t \in]0, +\infty[, \quad |S_n(t)| = \left| e^{-t}\cos(t)\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} \right| \leqslant 2e^{-t},$$

et la fonction continue $\varphi\colon t \mapsto 2e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{(i-(n+1)t}\,\mathrm{d}t) = (-1)^n\frac{n+1}{(n+1)^2+1}$, on en déduit l'égalité demandée :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{1+(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2}.$$

584. RMS 2025 1326 Centrale PSI .... énoncé p. 91

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est dérivable.

(b) Déterminer φ' et en déduire φ à l'aide des fonctions usuelles.

Solution. — RMS 2010 1020 CCP PSI, RMS 2018 988 Mines Ponts PC, RMS 2018 1361 ENSAM PSI
On pose $h(x,t) = e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}$ pour tout x réel et tout t réel non nul, prolongée par continuité par $h(x, 0) = x$ pour tout réel x, de sorte que l'intégrale proposée soit faussement impropre en zéro. Pour tout réel x et tout réel positif t, la majoration $|h(x,t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{t}$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ sur $[1, +\infty[$, donc l'ensemble de définition de f vaut $\mathbb{R}$.
La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt)$. La domination $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant e^{-t}$, valable pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ permettent d'appliquer le théorème de Leibniz : la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_{t=0}^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il en résulte l'existence d'une constante c telle que $f(x) = \arctan x + c$ sur $\mathbb{R}$. La valeur évidente $f(0) = 0$ fournit $c = 0$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x.$$

585. RMS 2025 1327 Centrale PSI .... énoncé p. 91

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f a pour ensemble de définition $\mathbb{R}_+$et qu'elle y est continue.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Trouver les limites de f et f' en $+\infty$,

(d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. En déduire $f(x)$.

(e) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et en déduire sa valeur.

Solution. — RMS 2014 1339 CCP PC, RMS 2018 990 Mines Ponts PC, RMS 2018 1421 CCP PC, RMS 2020 1262 CCINP PSI

(a) Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $h(x,t) = \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}$.

Pour tout x, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 0 et inférieure à $\frac{2}{t^2}$ en $+\infty$). Pour tout t, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin $|h(x,t)| \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2} = \varphi(t)$ qui est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 0 et inférieure à $\frac{2}{t^2}$ en $+\infty$). Donc par théorème de continuité, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$ sont continues par rapport à x et t, et on a les majorations suivantes : pour $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\right| \leqslant \frac{1-\cos t}{t} e^{-at} = \varphi_1(t)$$
$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|(1-\cos t)e^{-xt}\right| \leqslant 2e^{-at} = \varphi_2(t),$$

où φ_1 et φ_2 sont positives, continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeables par continuité en 0 et inférieures à $2e^{-at}$ en $+\infty$). Donc par théorème, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a en outre

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

(b) On utilise théorème de convergence dominée à paramètre continu.
$h(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ qui est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par théorème de convergence dominée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

De même $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant \frac{1-\cos t}{t} e^{-at} = \varphi_1(t)$ (inégalité valable si $x \in [a,+\infty[$) et φ_1 est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

(c) Sur $\mathbb{R}_+^*$, par la question (a), on avait : $f''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$
$$\int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Donc $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ et donc en primitivant $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{cste}$, enfin comme la limite de $f'(x)$ en $+\infty$ est 0 il reste $\text{cste} = 0$ et on a bien $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(d) Une intégration par parties donne que $I = f(0)$. On calcule f en primitivant f' :
$$f(x) = \int \ln x - \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2) = x\ln x - x - \frac{1}{2}\left(x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$
par intégration par parties donc il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln x - x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + x - \arctan x + c \\ &= -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) - \arctan x + c. \end{aligned}$$
Comme $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, on a $c = \frac{\pi}{2}$. Finalement sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = -\frac{x}{2}\ln(\frac{1+x^2}{x^2}) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$. Et enfin, par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, on obtient
$$f(0) = I = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

586. RMS 2025 1328 Centrale PSI .... énoncé p. 91

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $2\lambda < -1$ Correction : $2\lambda > -1$. On pose $g_\lambda \colon (x,\theta) \in \mathbb{R}\times\,]0,\pi[\, \mapsto e^{-ix\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{2\lambda} \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto g_\lambda(x,\theta)$ est intégrable sur $]0,\pi[$.

(b) On pose $f_\lambda(x) = \int_0^\pi g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrer : $f_\lambda(x) = 2\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(\theta))(\sin(\theta))^{2\lambda}\,\mathrm{d}\theta$.

(c) Montrer que f_λ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f_\lambda'' = f_{\lambda+1} - f_\lambda$.

Solution. —

(a) La fonction $\theta \mapsto g_\lambda(x,\theta)$ est continue sur $]0,\pi[$ et vérifie
$$|g_\lambda(x,\theta)| = \frac{1}{(\sin\theta)^{-2\lambda}} \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{1}{\theta^{-2\lambda}}.$$
Comme l'exposant -2λ est strictement plus petit que 1, l'équivalent positif ci-dessus prouve que $\int_0^{\pi/2} g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ converge absolument donc converge.

De plus, on a $g_\lambda(x,\pi-\theta) = \overline{g_\lambda(x,\theta)}$, donc la convergence absolue de $\int_0^{\pi/2} g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ entraîne celle de $\int_{\pi/2}^{\pi} g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto g_\lambda(x,\theta)$ est intégrable sur $]0,\pi[$.

(b) La relation de Chasles, l'égalité $g_\lambda(x,\pi-\theta) = \overline{g_\lambda(x,\theta)}$ de la question précédente et le changement de variable affine $\alpha = \pi - \theta$ dans la deuxième intégrale ci-dessous montrent que
$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \int_0^{\pi/2} g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} g_\lambda(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{0} g_\lambda(x,\pi-\alpha)(-\,\mathrm{d}\alpha) \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[g_\lambda(x,\theta) + \overline{g_\lambda(x,\theta)}\right]\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{Re}(g_\lambda(x,\theta))\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(\theta))(\sin(\theta))^{2\lambda}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

(c) La fonction g_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport au couple $(x,\theta) \in \mathbb{R}\times\,]0,\pi[$, donc toutes les hypothèses faibles du théorème de régularité des intégrales à paramètres sont satisfaites. On a
$$\forall (n,x,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\,]0,\pi[,\quad |g_\lambda^{(n)}(x,\theta)| = \left|(-i\cos\theta)^n e^{-ix\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{2\lambda}\right| \leqslant (\sin\theta)^{2\lambda}.$$
La fonction $\theta \mapsto (\sin\theta)^{2\lambda}$ est continue et intégrable (vu plus haut) sur $]0,\pi[$. Le théorème de régularité montre que f_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_\lambda^{(n)}(x) = \int_0^\pi (-i\cos\theta)^2 e^{-ix\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{2\lambda}\,\mathrm{d}\theta.$$
En particulier
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad f_\lambda''(x) &= -\int_0^\pi (\cos\theta)^2 e^{-ix\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{2\lambda}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi (\sin^2\theta - 1)e^{-ix\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{2\lambda}\,\mathrm{d}\theta = f_{\lambda+1}(x) - f_\lambda(x). \end{aligned}$$

587. RMS 2025 1329 Centrale PSI .... énoncé p. 92

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

(a) Soit $S = \{(x, y, z), z = f(x, y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a, b, c) \in S$.

(b) Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point critique que l'on déterminera.

Solution. —

(a) Soit F définie par $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Ce plan tangent est le plan orthogonal à $\nabla F(a, b, c) = \left(b - \frac{1}{a^2}, a - \frac{1}{b^2}, -1\right)$, il a donc pour équation $(b - \frac{1}{a^2})(x - a) + (a - \frac{1}{b^2})(y - b) - (z - c) = 0 = \left(b - \frac{1}{a^2}\right)x + \left(a - \frac{1}{b^2}\right)y - z + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - ab$.

(b) f est minorée par 0.

$\nabla f(x, y) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}\right) = (0, 0) \iff y = \frac{1}{x^2}$ et $x = \frac{1}{y^2} \iff x = y = 1$.

f étant définie sur un ouvert, son minimum est atteint en un point critique, lequel est donc $(1, 1)$.

Ce minimum existe bien, en effet f est continue sur $[1/3\,;9]^2$ fermé borné donc admet un minimum m sur cet ensemble vérifiant $m \leqslant f(1, 1) = 3$.

Et pour $(x, y) \notin [1/3\,;9]^2$, on a nécessairement

- Soit $x < 1/3$ ou $y < 1/3$, auquel cas $1/x > 3$ ou $1/y > 3$ et donc $f(x, y) > 3 \geqslant m$.
- Soit $x \geqslant 1/3$ et $y \geqslant 1/3$, et donc $x > 9$ ou $y > 9$, auquel cas $xy > 3$ et donc $f(x, y) > 3 \geqslant m$.

Ainsi m est le minimum de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

588. RMS 2025 1330 Centrale PSI .... énoncé p. 92

Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.

(a) Montrer que S est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Chercher une majoration du reste de la série ainsi définie. Donner une fonction g tel que $|S(x) - g(x)| \leqslant 10^{-3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) On cherche les $u \in \mathcal{C}^0([0, \pi] \times \mathbb{R}^+)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[\times\mathbb{R}_+^*$, dont toutes les dérivées partielles d'ordre au plus 2 sont continûment prolongeables à $[0, \pi]\times\mathbb{R}_+^*$, et telles que $\forall x \in [0, \pi], \forall t \in]0, +\infty[, \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = S(x)$ et $\forall t \in]0, +\infty[, u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

   i. Vérifier que $u : (x, t) \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$ est solution du problème.

   ii. Tracer la fonction qui à x associe $u(x, t)$ pour t fixé. On prendra $t = 1$ et $t = 2$

   iii. En prenant u et v deux solutions du problème et en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^\pi (u(x, t) - v(x, t))^2 \,\mathrm{d}x$ démontrer l'unicité de la solution du problème.

Solution. —

(a) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{(2n+1)^3}$, terme général d'une série convergente.

Autrement dit la série $\sum u_n$ converge normalement, ce qui assure que S est bien définie. S est 2π-périodique en tant que somme d'une série de fonctions toutes 2π-périodiques.

Enfin la série converge normalement donc uniformément, et comme les fonctions u_n sont toutes continues, la somme S est encore continue.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|\sin((2k+1)x)|}{(2k+1)^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}$.

Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{(2t+1)^3}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $|R_n(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^3} = \left[-\frac{1}{4(2t+1)^2}\right]_N^{+\infty} = \frac{1}{4(2n+1)^2}$.

En particulier, on a $|R_n(x)| \leqslant 10^{-3}$ dès que $4(2n + 1)^2 \geqslant 1000$ soit $(2n + 1)^2 \geqslant 250$. $n = 8$ convient, donc $g = S_8 : x \mapsto \sum_{k=1}^{8} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$ convient.

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : (x,t) \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,] \times \mathbb{R}_+$, et la série converge normalement, donc sa somme u est continue sur $[\,0\,;\pi\,] \times \mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\,0\,;\pi\,] \times \mathbb{R}_+^*$ (et même $\mathcal{C}^\infty$). Et pour $i,j \in \{1,2\}$, on a $\partial_i u_n$ et $\partial_{i,j} u_n$ de la forme $(x,t) \mapsto \pm \sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}(2n+1)^k$ ou $(x,t) \mapsto \pm \cos((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}(2n+1)^k$, donc pour $a > 0$, on a $\forall (x,t) \in [\,0\,;\pi\,] \times [\,a\,;+\infty\,[\,,\ |\partial_{i,j} u_n(x,t)| \leqslant e^{-(2n+1)^2 a}(2n+1)^k$, terme général d'une série convergente.

Autrement dit les séries des dérivées partielles convergent normalement sur tout compact de $[\,0\,;\pi\,] \times \mathbb{R}_+^*$, ce qui suffit à assurer le caractère $\mathcal{C}^2$ sur $[\,0\,;\pi\,] \times \mathbb{R}_+^*$ de la fonction u.

De plus $\forall (x,t) \in [\,0\,;\pi\,] \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

Les conditions $\forall x \in [\,0\,;\pi\,]\,, u(x,0) = S(x)$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ sont clairement vérifiées.

ii. Laissé aux lectrices et lecteurs courageux.

iii. Soit u et v deux solutions du problème et $f : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^\pi (u(x,t) - v(x,t))^2 \,\mathrm{d}x$.

f est continue grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction partielle $x \mapsto (u(x,t) - v(x,t))^2$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$.
- Pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, la fonction partielle $t \mapsto (u(x,t) - v(x,t))^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a > 0$, $(u-v)^2$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,] \times [\,0\,;a\,]$ donc bornée par une constante sur cet ensemble, via le théorème des bornes atteintes.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre. En effet :

- Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction partielle $x \mapsto (u(x,t) - v(x,t))^2$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$, intégrable.
- Pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, la fonction partielle $t \mapsto (u(x,t) - v(x,t))^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et se dérive en $t \mapsto 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)(u(x,t) - v(x,t))$.
- Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction partielle $x \mapsto 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)(u(x,t) - v(x,t))$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$.
- Enfin pour $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}_+^*$, le théorème des bornes atteintes assure que sur $[\,0\,;\pi\,] \times [\,a\,;b\,]$, la fonction $(x,t) \mapsto 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)(u(x,t) - v(x,t))$ est majorée en valeur absolue par une constante.

Ainsi, pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \int_0^\pi 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)(u(x,t) - v(x,t))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\right)(u(x,t) - v(x,t))\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)(u(x,t) - v(x,t))\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= -2\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 0
\end{aligned}$$

En particulier, f est donc décroissante, clairement positive. Enfin $f(0) = 0$ donc f est identiquement nulle. Autrement dit, pout $t \geqslant 0$ fixé, la fonction $x \mapsto (u(x,t) - v(x,t))^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle donc identiquement nulle sur $[\,0\,;\pi\,]$. C'est-à-dire que $\forall t \geqslant 0, \forall x \in [\,0\,;\pi\,]\,, u(x,t) = v(x,t)$. Soit $u = v$.

Probabilités

589. RMS 2025 1331 Centrale PSI .... énoncé p. 92

Un robot appuie sur une diode verte ou rouge à tout instant $n \in \mathbb{N}$. Lorsqu'il appuie sur la diode rouge à l'instant n, il appuie sur la diode verte à l'instant $n+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$, ou sur la diode rouge avec probabilité $1-p$. Lorsqu'il appuie sur la diode verte à l'instant n, il appuie sur la diode rouge à l'instant $n+1$ avec une probabilité $q \in]0,1[$, ou sur la diode verte avec probabilité $1-q$. On note r_n la probabilité que le robot appuie sur la diode rouge à l'instant n, v_n la probabilité que le robot appuie sur la diode verte à l'instant n.

(a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{r_{n+1}}{v_{n+1}} = A\binom{r_n}{v_n}$.

(b) Déterminer $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B + C = I_2$ et $A = B + (1-p-q)C$.

(c) En déduire une expression de A^n.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Commenter.

SOLUTION. —

(a) On note R_n (resp. V_n) l'événement « le robot appuie sur la diode rouge (resp. verte) à l'instant n », et $r_n = \mathbb{P}(R_n)$ $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ leurs probabilités.

Par formule des probabilités totales avec le sce (R_n, V_n), on a

$$\mathbb{P}(R_{n+1}) = \mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1})\mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}_{V_n}(R_{n+1})\mathbb{P}(V_n) = (1-p)\mathbb{P}(R_n) + q\mathbb{P}(V_n)$$

$$\mathbb{P}(V_{n+1}) = \mathbb{P}_{R_n}(V_{n+1})\mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}_{V_n}(V_{n+1})\mathbb{P}(V_n) = p\mathbb{P}(R_n) + (1-q)\mathbb{P}(V_n)$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{r_{n+1}}{v_{n+1}} = A\binom{r_n}{v_n}$.

(b) On résout $\begin{cases} B + C = I_2 \\ A = B + (1-p-q)C \end{cases} \iff \begin{cases} B + C = I_2 \\ A - I_2 = (-p-q)C \end{cases} \iff \begin{cases} B = I_2 - C = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \\ C = \frac{1}{p+q}(I_2 - A) = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} \end{cases}$

(c) C est une combinaison linéaire de I_2 et A donc B aussi, donc elles commutent (on peut calculer $CB = BC = 0$).

La formule du binôme donne : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k}(1-p-q)^k C^k$.

On calcule $B^2 = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} q(q+p) & q(q+p) \\ p(q+p) & p(q+p) \end{pmatrix} = B$ et $C^2 = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p(q+p) & -q(q+p) \\ -p(q+p) & q(q+p) \end{pmatrix} = C$,

donc par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 1$ on a $B^k = B$ et $C^k = C$.

Pour $n \geqslant 1$ on a $A^n = B + (1-p-q)^n C$ (vrai aussi si $n = 0$).

(d) $-1 < 1-p-q < 1$ donc $A^n \longrightarrow_{n\to+\infty} B$ donc $U_n = \binom{r_n}{v_n} = A^n U_0 \longrightarrow_{n\to+\infty} BU_0 = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{p}{p+q}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{q}{p+q}$. Au bout d'un grand nombre d'appuis, la probabilité d'appuyer sur une diode rouge à l'instant n vaut environ $\frac{p}{p+q}$ et celle d'appuyer sur une diode verte à l'instant n vaut environ $\frac{q}{p+q}$.

590. RMS 2025 1332 Centrale PSI .... énoncé p. 92

(a) Soient X_0 et Y_0 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$. Déterminer la loi de $X_0 + Y_0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$.

(b) Montrer que $X + Y$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(c) Montrer que si $X + Y \sim X_0 + Y_0$, alors X et Y suivent la loi uniforme sur [1,6].

SOLUTION. —

(a) La série génératrice de $X_0 + Y_0$ vérifie :

$$\begin{aligned} G_{X_0+Y_0}(t) = G_{X_0}(t)G_{Y_0}(t) &= \left(\sum_{k=1}^{6} \frac{t^k}{6}\right)^2 = \frac{t^2}{36}\left(\sum_{k=0}^{5} t^k\right)^2 = \frac{t^2}{36}\left(\sum_{k=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} t^{k+j}\right) \\ &= \frac{t^2}{36}\sum_{n=0}^{10} \mathrm{Card}\{(k,j) \in [\![0\,;\,5]\!]^2 \mid k+j = n\} t^n \\ &= \frac{t^2}{36}(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 + 5t^6 + 4t^7 + 3t^8 + 2t^9 + t^{10}) \end{aligned}$$

Donc la loi de probabilité de $X_0 + Y_0$ est donnée par : pour $k \in [\![2\,;\,12]\!]$, $\mathbb{P}(X_0 + Y_0 = k) = \frac{6-|7-k|}{36}$

(b) La série génératrice de $X+Y$ vérifie $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ où $G_X(t) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k)t^k = tQ(t)$ (où $Q \in \mathbb{R}_5[X]$ a ses coefficients dans $[0,1]$ et vérifie $Q(1)=1$) et de même $G_Y(t) = tR(t)$ (où $R \in \mathbb{R}_5[X]$ a ses coefficients dans $[0,1]$ et vérifie $R(1)=1$).

On suppose par l'absurde que X suit la loi uniforme sur $[\![2\,;\,12]\!]$, alors $G_{X+Y}(t) = \sum_{k=2}^{12} \frac{t^k}{12} = \frac{t^2}{12}\frac{1-t^{11}}{1-t}$ sur $]-1,1[$.

On a alors pour $t \in]-1,1[$: $\frac{t^2}{12}\frac{1-t^{11}}{1-t} = t^2Q(t)R(t)$ donc $1-t^{11} = 12(1-t)Q(t)R(t)$.

Les racines de Q et R sont les racines 11èmes de l'unité différentes de 1 : ce sont des complexes non réels.

C'est absurde car ce sont des polynômes de degré 5 impairs donc il doit y avoir au moins une racine réelle.

Donc $X+Y$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $[\![2\,;\,12]\!]$.

(c) Si $X+Y \sim X_0+Y_0$, avec le même raisonnement qu'en 2, pour $t \in]-1,1[$,

$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = t^2Q(t)R(t) = \frac{t^2}{36}\left(\sum_{k=0}^{5} t^k\right)^2 = \frac{t^2}{36}\left(\frac{1-t^6}{1-t}\right)^2$

alors $36(1-t)^2Q(t)R(t) = (1-t^6)^2 = \left((t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)(t+1)(t-\bar\omega)(t-\bar\omega^2)\right)^2$ où $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

donc $36Q(t)R(t) = (t-\omega)^2\left(t-\omega^2\right)^2(t+1)^2(t-\bar\omega)^2\left(t-\bar\omega^2\right)^2$.

Comme Q et R sont des polynômes de degré 5 à coefficients réels : il y a au moins une racine réelle : -1 et les racines non réelles sont conjuguées 2 à 2.

Il y a deux possibilités :

- soit $Q = q\frac{1}{6}\left((t-\omega)\left(t-\omega^2\right)(t+1)(t-\bar\omega)\left(t-\bar\omega^2\right)\right) = \frac{q}{6}\frac{1-t^5}{1-t} = \frac{q}{6}\sum_{k=0}^{5} t^k$ mais avec $Q(1)=1$ on a $q=1$ et donc $Q = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} t^k$, et de même pour R : on reconnaît $X \sim Y \sim \mathscr{U}([\![1\,;\,6]\!])$.
- Soit $Q = q\,(t+1)\,(t-\omega)^2\,(t-\bar\omega)^2$ et $R = r\,(t+1)\left(t-\omega^2\right)^2\left(t-\bar\omega^2\right)^2$ (ou l'inverse).
  Donc $Q = q\,(t+1)\left(t^2-t+1\right)^2$ avec $Q(1)=1$ on trouve $q=\frac{1}{2}$ donc
  $Q = \frac{1}{2}(t+1)\left(t^2-t+1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(t^5-3t^4+5t^3-5t^2+3t-1\right)$ (qui n'est pas à coefficients positifs).
  Ce cas n'est pas possible

Donc X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1\,;\,6]\!]$.

591. RMS 2025 1333 Centrale PSI .... énoncé p. 93

On considère n urnes numérotées de 1 à n et b boules numérotées de 1 à b. On place les boules au hasard dans les urnes. Soit $k \in \{0,\dots,b\}$.

(a) Justifier qu'on peut modéliser le problème par l'univers Ω des fonctions de $\{1,\dots,b\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ muni de la probabilité uniforme. Calculer la probabilité $p_{n,b}$ de l'événement «l'urne 1 contient k boules».

(b) En modélisant le problème par une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, retrouver le résultat précédent.

(c) Soit une suite d'entiers $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $b_n \sim nc$. Montrer que $p_{n,b_n} \to e^{-c}\frac{c^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution. —

(a) Les différentes répartitions possibles sont supposées ici équiprobables. Or à toute répartition des boules, on peut associer une fonction $f : [\![1\,;\,b]\!] \to [\![1\,;\,n]\!]$, définie par $\forall i \in [\![1\,;\,b]\!]$, $f(i)$ est le numéro de l'urne dans laquelle on place la boule numéro i. Inversement, une telle fonction permet de retrouver la répartition associée.

On peut donc modéliser le problème par l'univers $\Omega = [\![1\,;\,n]\!]^{[\![1\,;\,b]\!]}$ muni de la probabilité uniforme.

Et si l'on note A l'événement «l'urne 1 contient k boules», alors Card $= \binom{b}{k}(n-1)^{b-k}$: il y a $\binom{b}{k}$ choix possibles pour les éléments d'image 1, $n-1$ choix possibles pour l'image de chacun des $b-k$ éléments restants.

Par équiprobabilité, il vient $p_{n,k} = \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{b}{k}(n-1)^{b-k}}{n^b} = \binom{b}{k}(1/n)^k(1-1/n)^{b-k}$.

(b) Pour tout $i \in [\![1\,;\,b]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la boule i est placée dans l'urne 1, et 0 sinon. Les X_i sont réputées indépendantes, et de paramètre $1/n$, donc $\sum_{i=1}^{b} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(b,1/n)$.

Et $p_{n,k} = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{b} X_i = k) = \binom{b}{k}(1/n)^k(1-1/n)^{b-k}$.

(c) $p_{n,b_n} = \binom{b_n}{k}(1/n)^k(1-1/n)^{b_n-k} = \frac{b_n(b_n-1)\dots(b_n-k+1)}{k!}(1/n)^k(1-1/n)^{b_n-k}$.

Et $b_n(b_n-1)\dots(b_n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k c^k$ donc $b_n(b_n-1)\dots(b_n-k+1)(1/n)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} c^k$.

Ensuite $(1-1/n)^{b_n-k} = e^{(b_n-k)\ln(1-1/n)}$, avec $\ln(1-1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n$ et $b_n - k \underset{n\to+\infty}{\sim} nc$ donc $(b_n-k)\ln(1-1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -c$ et donc $(1-1/n)^{b_n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-c}$.

Par produit de limites, on a bien $p_{n,b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-c}\frac{c^k}{k!}$.

592. RMS 2025 1334 Centrale PSI .... énoncé p. 93

Soit $n \geqslant 2$. Un secrétaire téléphone à n clients. On modélise par une variable aléatoire X le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre avec une probabilité $p \in]0,1[$ à chaque appel. On suppose que les appels sont indépendants entre eux.

(a) Déterminer la loi de X. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Le secrétaire appelle une seconde fois les $n - X$ clients restants. On note Z la variable modélisant le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre lors de cette seconde série d'appel.

(b) Déterminer la loi de Z.

Solution. —

(a) Notant, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'on parvient à joindre le client numéro i, on a $X = \sum_{i=1}^n X_i$ et donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

(b) $Z(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$.

Pour tout $k, i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=k, Z=i) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{X=k}(Z=i) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{n-k}{i}p^i(1-p)^{n-k-i}$ si $i \leqslant n-k$, 0 sinon.

On en déduit la loi marginale de Z en sommant. $\mathbb{P}(Z=i) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k, Z=i) = \sum_{k=0}^{n-i} \mathbb{P}(X=k, Z=i)$ soit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=i) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{n-k}{i}p^i(1-p)^{n-k-i}\\ &= \textstyle\binom{n}{i}p^i(1-p)^i\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-k}{i}p^k(1-p)^{2n-2k-2i}\\ &= \textstyle\binom{n}{i}p^i(1-p)^i(p+(1-p)^2)^{n-i}\end{aligned}$$

Et donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p(1-p))$.

N.B. On peut retrouver directement ceci en associant à chaque client une variable de Bernoulli égale à 1 s'il ne répond pas au premier appel mais répond au second, événement de probabilité $p(1-p)$.

593. RMS 2025 1335 Centrale PSI .... énoncé p. 93

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $\Psi(\lambda) = \ln(\mathrm{ch}(\lambda))$.

(a) Soit Z une variable aléatoire. Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Z \geqslant t) \leqslant e^{-\lambda t}\mathbb{E}(e^{\lambda Z})$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}$.

(c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(S_n \geqslant t\right)\right) \leqslant \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t, \lambda \geqslant 0\}$.

Solution. —

(a) L'événement $Z \geqslant t$ s'écrit aussi $e^{\lambda Z} \geqslant e^{\lambda t}$ donc par l'inégalité de Markov appliquée à $e^{\lambda Z}$, $\mathbb{P}(Z \geqslant t) \leqslant e^{-\lambda t}\mathbb{E}(e^{\lambda Z})$.

(b) Pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $-X_i$ a même loi que X_i donc $-S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n -X_i$ a même loi que S_n.

Et donc $\mathbb{P}(-S_n \geqslant 0) = \mathbb{P}(S_n \geqslant 0)$, soit $\mathbb{P}(S_n \leqslant 0) = \mathbb{P}(S_n \geqslant 0)$.

Or $\mathbb{P}(S_n \leqslant 0) + \mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant \mathbb{P}(S_n \leqslant 0 \cup S_n \geqslant 0) = 1$, et donc $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}$.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. L'événement $S_n \geqslant t$ s'écrit aussi $e^{\lambda n S_n} \geqslant e^{\lambda n t}$ donc par l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(S_n \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda n S_n})}{e^{\lambda n t}}$.

Or $e^{\lambda n S_n} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda X_i}$, donc par indépendance mutuelle des X_i donc des $e^{\lambda X_i}$, on a $\mathbb{E}(e^{\lambda n S_n}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{\lambda X_i}) = \operatorname{ch}^n(\lambda)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(S_n \geqslant t) \leqslant e^{n \ln \operatorname{ch}(\lambda) - n\lambda t}$ donc $\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(S_n \geqslant t) \leqslant \ln \operatorname{ch}(\lambda) - \lambda t = \Psi(\lambda) - \lambda t$.

Ceci pour tout $\lambda > 0$ donc $\frac{1}{n} \ln \left(\mathbb{P}\left(S_n \geqslant t\right)\right) \leqslant \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t, \lambda > 0\}$.

Enfin $\lambda \mapsto \Psi(\lambda) - \lambda t$ est continue donc $\inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t, \lambda > 0\} = \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t, \lambda \geqslant 0\}$.

594. RMS 2025 1336 Centrale PSI .... énoncé p. 93

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère $Z_i = e^{\lambda\left(X_i - \frac{1}{2}\right)}$. Calculer l'espérance de Z_i.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right)$.

(c) Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $f_t : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda t - \ln(\operatorname{ch}(\lambda/2))$. Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt\right) \leqslant e^{-nf_t(\lambda)}$.

(d) Pour $t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on pose $I(t) = (t - \frac{1}{2})\ln(1-2t) - (t - \frac{1}{2})\ln(2t+1)$. Montrer que $\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt\right) \leqslant e^{nI(t)}$.

(e) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution. —

(a) Le théorème de transfert assure que $\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{P}(X_i = 1)e^{\lambda(1-1/2)} + \mathbb{P}(X_i = 0)e^{\lambda(-1/2)} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda/2} + e^{-\lambda/2}\right) = \operatorname{ch}(\lambda/2)$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n Z_i\right)$.

Les X_i étant mutuellement indépendantes, il en va de même pour les Z_i donc $\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i) = \operatorname{ch}^n(\lambda/2)$.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle, l'événement $S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt$ s'écrit aussi $e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geqslant e^{\lambda n t}$, donc par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))\right)}{e^{\lambda n t}} = \frac{\operatorname{ch}^n(\lambda/2)}{e^{\lambda n t}} = e^{-nf_t(\lambda)}$$

(d) Question étrange. Pour $t \geqslant 0$, on a $I(t) = (t - 1/2)\ln\left(\frac{1-2t}{1+2t}\right) \geqslant 0$ donc $e^{nI(t)} \geqslant 1$ et la majoration est triviale.

Pour $t < 0$, on a bien $I(t) < 0$ mais alors la majoration proposée entraînerait $0 \leqslant \mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant 0\right) \leqslant \mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt\right) \leqslant e^{nI(t)}$ donc par encadrement $\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est faux.

(e) Pas grand chose à rajouter du coup...

595. RMS 2025 1337 Centrale PSI .... énoncé p. 93

On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante. Si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ; si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne. On note X_p la variable aléatoire qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du p-ième tirage, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner les lois de X_1 et X_2.

(b) Donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{p+1} = k), \mathbb{P}(X_p = k+1), \mathbb{P}(X_p = k)$.

(c) Justifier que la fonction génératrice G_p de X_p est un polynôme.

(d) On admet la relation $\forall t \in \mathbb{R}, G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n}G_p'(t)$. Donner une relation entre $\mathbb{E}(X_{p+1})$ et $\mathbb{E}(X_p)$. Calculer $\mathbb{E}(X_p)$ et sa limite lorsque p tend vers $+\infty$. Interpréter.

(e) Démontrer l'identité admise en d).

Solution. —

(a) $X_1(\Omega) = \{n-1, n\}$, avec $\mathbb{P}(X_1 = n) = 1/2$ (probabilité de piocher une boule rouge au premier tirage) et donc $\mathbb{P}(X_1 = n-1) = 1/2$.

Et $X_2(\Omega) = \{n-2, n-1, n\}$ avec $\mathbb{P}(X_2 = n) = 1/4$ (probabilité de piocher deux boules rouges successivement) et $\mathbb{P}(X_2 = n-2) = 1/2 \times (n+1)/2n$ (probabilité de piocher deux boules blanches successivement) donc $\mathbb{P}(X_2 = n-1) = 1 - 1/4 - (n+1)/4n$.

(b) $X_p(\Omega) \subset [\![0\,;\,n]\!]$ donc par la formule des probabilités totales, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_p = i)\mathbb{P}_{X_p=i}(X_{p+1} = k)$. Or la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{X_p=i}(X_{p+1} = k)$ est nulle sauf si $i = k$ ou $i = k+1$ (le nombre de boules blanche est soit inchangé, soit diminue de 1).

Et $\mathbb{P}_{X_p=k}(X_{p+1} = k) = \frac{2n-k}{2n}$ (probabilité de tirer une boule rouge) tandis que $\mathbb{P}_{X_p=k+1}(X_{p+1} = k) = \frac{k+1}{2n}$ (probabilité de tirer une boule blanche).

Donc $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$.

(c) Comme $X_p(\Omega) \subset [\![0\,;\,n]\!]$, on a $G_p : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_p = k)t^k$, polynomiale.

(d) Admettant la relation, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $G'_{p+1}(t) = G'_p(t) - \frac{1}{2n}G'_p(t) + \frac{1-t}{2n}G''_p(t)$.

Et donc $\mathbb{E}(X_{p+1}) = G'_{p+1}(1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)G'_p(1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\mathbb{E}(X_p)$.

La suite $(\mathbb{E}(X_p))$ est donc géométrique de raison $1 - \frac{1}{2n}$ et de premier terme $\mathbb{E}(X_0) = n$ donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_p) = n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p$.

En particulier, $\mathbb{E}(X_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. Ce qui est cohérent avec l'intuition que presque sûrement, on épuise les boules blanches ...

(e) La relation de b) donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
G_{p+1}(t) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\mathbb{P}(X_p = k) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)\right)t^k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_p = k)t^k - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_p = k)t^k + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbb{P}(X_p = k+1)t^k \\
&= \textstyle G_p(t) - \frac{1}{2n}tG'_p(t) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= \textstyle G_p(t) - \frac{1}{2n}tG'_p(t) + \frac{1}{2n}G'_p(t)
\end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.

596. RMS 2025 1338 Centrale PSI .... énoncé p. 94

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement s'il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = UV^T$

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que : $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, a_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

(b) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Solution. —

(a) Si $\mathrm{rg}(A) = 1 = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n)$ où les C_j désignent les colonnes de A, soit U une matrice colonne telle que $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

Pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, il existe alors un réel v_j tel que $C_j = v_jU$.

La matrice colonne $V = (v_1\ \dots\ v_n)^T$ vérifie alors $A = UV^T$, et bien sûr U et V sont non nulles car $A \neq 0$.

Réciproquement, si A s'écrit UV^T avec U et V non nulles, alors $A \neq 0$ et toutes les colonnes de A sont dans $\mathrm{Vect}(U)$ donc A est de rang 1.

(b) Si $\mathrm{rg}(A)=1$, soit U et V telles que $A=UV^T$ et soit $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n$ les coefficients de U et V.

Pour tout $i,j\in[\![1\,;\,n]\!]$, on a alors $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=a_{i,j}=u_iv_j$.

D'où les lois marginales de X et Y, données par $\forall i\in[\![1\,;\,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=1}^n u_iv_j=\alpha u_i$ en notant $\alpha=\sum_{j=1}^n v_j$, et $\forall j\in[\![1\,;\,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^n u_iv_j=\beta v_j$ en notant $\beta=\sum_{i=1}^n u_i$.

Or $1=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha\beta u_iv_j=\alpha\beta\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\alpha\beta$.

Finalement, pour tout $i,j\in[\![1\,;\,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)=\alpha\beta\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathbb{P}(X=i,Y=j)$ donc X et Y sont indépendantes.

Réciproquement, si X et Y sont indépendantes alors $A=UV^T$ en posant $U=(\mathbb{P}(X=1)\ \dots\ \mathbb{P}(X=n))^T$ et $V=(\mathbb{P}(Y=1)\ \dots\ \mathbb{P}(Y=n))^T$ donc $\mathrm{rg}(A)=1$.

597. RMS 2025 1339 Centrale PSI . . . . énoncé p. 94

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

(a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(M_n\leqslant k)=(\mathbb{P}(X_1\leqslant k))^n$.

On suppose l'existence d'un réel $\alpha>1$ tel que $\mathbb{E}(X_1^\alpha)<+\infty$. On pose $m_\alpha=\mathbb{E}(X_1^\alpha)$.

(b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)\geqslant 1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}$.

(c) Montrer que M_n est d'espérance finie. Ind. Justifier la convergence de la série de terme général $1-\left(1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)^n,k\in\mathbb{N}^*$.

(d) On suppose que $X_1\sim\mathcal{G}(\frac12)$.

i. Montrer que $\mathbb{E}(M_n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(1-(1-2^{-k})^n\right)$.

ii. Montrer que $\mathbb{E}(M_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln n}{\ln 2}$.

Solution. —

(a) Soit $k\in\mathbb{N}$. L'égalité d'événements $(M_n\leqslant k)=\cap_{i=1}^n(X_i\leqslant k)$, puis l'indépendance des X_i, et enfin leur équidistribution montrent que

$$\mathbb{P}(M_n\leqslant k)=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}(X_i\leqslant k)=(\mathbb{P}(X_1\leqslant k))^n.$$

(b) On travaille avec l'événement contraire :

$$\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)=1-P(X_1>k-1)=1-P(X_1\geqslant k),$$

la dernière égalité étant justifiée par le fait que X_1 est à valeurs entières. Par croissance stricte de la fonction $x\mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$, on a l'égalité d'événements $(X_1\geqslant k)=(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)$, et l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire positive et d'espérance finie X_1^α, donne $\mathbb{P}(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)\leqslant\frac{E(X_1^\alpha)}{k^\alpha}=\frac{m_\alpha}{k^\alpha}$. Il en résulte que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)\geqslant 1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}\cdot$$

(c) Comme M_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, le théorème d'antirépartition affirme qu'elle est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant1}\mathbb{P}(M_n\geqslant k)$ converge, et alors que $E(M_n)$ est la somme de cette série. Or

$$\mathbb{P}(M_n\geqslant k)=1-\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=1-[\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)]^n\leqslant 1-\left(1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)^n.$$

Un développement limité (à n fixé) quand $k\to+\infty$ fournit $1-(1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha})^n=1-(1-n\frac{m_\alpha}{k^\alpha}+\mathrm{o}(\frac{m_\alpha}{k^\alpha}))\sim\frac{c}{k^\alpha}$ où c est une constante positive et $\alpha>1$. Le majorant ci-dessus est donc le terme général d'une série convergente, donc M_n est d'espérance finie.

(d) i. Si $X_1\sim\mathcal{G}(\frac12)$, on a $P(X_1\leqslant k-1)=\sum_{i=1}^{k-1}(\frac12)^i=1-2^{k-1}$, et le raisonnement de la question précédente montre que

$$\mathbb{E}(M_n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-(1-2^{-(k-1)})^n\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-(1-2^{-k})^n\right).$$

ii. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f\colon t \in [0, +\infty[\mapsto 1 - (1 - 2^{-t})^n$. Il s'agit d'une fonction continue et décroissante. On a donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M_n \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or le changement de variable $t = \varphi(t) = -\frac{\ln x}{\ln 2}$ avec $\varphi\colon]0, 1[\to]0, +\infty[$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective (ou encore $x = 2^{-t}$), puis le changement de variable affine $u = 1 - x$, montrent que

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (1 - (1-x)^n)\frac{\mathrm{d}x}{x \ln 2} = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2}\\ &= \int_0^1 (1 + u + \cdots + u^{n-1})\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Il est bien connu que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$, et on en déduit que

$$\mathbb{E}(M_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln 2}.$$

598. RMS 2025 1340 Centrale PSI .... énoncé p. 94

(a) i. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n n! \leqslant (2n)!$. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

ii. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$.

(b) On se donne une variable aléatoire X centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$.

i. Montrer : $\forall (x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}, e^{tx} \leqslant \frac{1+x}{2}e^t + \frac{1-x}{2}e^{-t}$.

ii. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que e^{tX} admet une espérance et que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$.

(c) On considère maintenant une variable aléatoire X telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$. Montrer : $\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\lambda^2/2}$.

Solution. —

(a) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^n n! = \prod_{k=1}^n 2k \leqslant \prod_{k=1}^n 2k \times \prod_{k=1}^n (2k-1) = (2n)!$.
On en déduit, pour $t \in \mathbb{R}$, la majoration $\forall n \in \mathbb{N}$, , $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ et donc en sommant $\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}$.

ii. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Le théorème de transfert assure que $\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{P}(X = 1)e^t + \mathbb{P}(X = -1)e^{-t} = \mathrm{ch}(t)$ et donc $\mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}$.

(b) i. Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons $f : x \in [\,-1\,;1\,] \mapsto e^{tx} - \frac{1+x}{2}e^t - \frac{1-x}{2}e^{-t}$.
$f' : x \mapsto te^{tx} - \mathrm{sh}(t)$ et $f'' : x \mapsto t^2 e^{tx}$ donc f est convexe. Or $f(-1) = 0 = f(1)$ donc nécessairement f est négative sur $[\,-1\,;1\,]$. Autrement dit $\forall x \in [-1, 1]$, $e^{tx} \leqslant \frac{1+x}{2}e^t + \frac{1-x}{2}e^{-t}$.

ii. Soit $t \in \mathbb{R}$. X est bornée donc e^{tX} également, et donc e^{tX} admet une espérance. Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ alors le théorème de transfert donne $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tx_n}\mathbb{P}(X = x_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x_n}{2}e^t + \frac{1-x_n}{2}e^{-t}\right)\mathbb{P}(X = x_n)$ soit

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant \mathrm{ch}(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = x_n) + \mathrm{sh}(t)\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n) = \mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)\mathbb{E}(X) = \mathrm{ch}(t) \leqslant e^{t^2/2}$$

(c) $\mathbb{P}(|X| \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(X \geqslant \lambda) + \mathbb{P}(-X \geqslant \lambda)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(e^{tX} \geqslant e^{t\lambda}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{t\lambda}}$ par l'inégalité de Markov. Et donc $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant e^{t^2/2 - \lambda t}$. Ceci pour tout $t \in \mathbb{R}$, en particulier pour $t = \lambda$ donc $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\lambda^2/2}$.

De même $\mathbb{P}(-X \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\lambda^2/2}$ donc $\mathbb{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\lambda^2/2}$.

599. RMS 2025 1341 Centrale PSI .... énoncé p. 94

(a) Déterminer le rayon de convergence R de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Montrer que $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ et soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

(b) Déterminer la loi de $Y_k = \frac{1+X_k}{2}$ puis celle de $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

(c) Déterminer la loi de S_n.

Soit $T = \inf\{n \geqslant 1, S_n = 0\}$. On pose $p_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $q_n = \mathbb{P}(T = n)$. Soit $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n x^n$.

(d) Montrer que $\forall n \geqslant 1, p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k p_{n-k}$.

(e) En déduire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ puis que $\forall x \in]-1,1[, g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

(f) En déduire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

Solution. —

(a) Soit $x > 0$. $\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}}}{\binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)x^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$.

Le crière de d'Alembert assure que, si $x^2 < 1$ soit $x < 1$, la série converge absolument, et si $x^2 > 1$ soit $x > 1$, la série diverge grossièrement.

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$ vaut $R = 1$.

Et pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, on a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(1/2)(3/2)\dots((2n-1)/2)\frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n n!} \frac{x^{2n}}{n!} = f(x)$.

(b) $Y_k(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = 1/2$, donc $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$. Les X_k sont indépendantes donc les Y_k aussi, si bien que $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$.

(c) $Z_n = \frac{S_n+n}{2}$ donc $S_n = 2Z_n - n$.

Et donc $S_n(\Omega) = \{2k-n,\, k \in [\![0\,;n]\!]\}$, avec $\forall k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k}(1/2)^n$.

(d) Soit $n \geqslant 1$.

L'événement $S_n = 0$ entraîne $T \leqslant n$ donc s'écrit $\bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} T = k \cap S_n = 0$.

Par incompatibilité, il vient $p_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k \cap S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k \cap \sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0)$ par indépendance (l'événement $T = k$ ne dépend que de $X_1, \dots, X_k$, il est indépendant de l'événement $\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0$ grâce au lemme des coalitions).

Or $\sum_{i=k+1}^{n} X_i$ a même loi que S_{n-k} donc $\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0) = p_{n-k}$.

On a bien $p_n = \sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k}$.

(e) Avec la convention $q_0 = 0$, la relation précédente s'écrit $p_n = \sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}$.

Notons que $p_n = 0$ si n est impair et $p_{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ pour tout n, donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

Les séries entières définissant f et g sont de rayon de convergence au moins 1 (les suites de coefficients sont bornées), et par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a $\forall x \in \left]-1\,;1\right[,\ f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = f(x) - 1$.

Et donc $g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

(f) $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n$.

Comme $\sum q_n$ converge, la série de fonctions de terme général $x \mapsto q_n x^n$ converge normalement sur $[-1\,;1]$ donc sa somme g est continue sur $[-1\,;1]$ et en particulier en 1.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = g(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1$, autrement dit $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.