

Énoncés

Mines Ponts

Algèbre

199. RMS 2025 854 Mines Ponts PSI..... solution p. [209](#)
Soit

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Interpréter géométriquement A .
- (b) Donner l'image du plan P d'équation $x - y - z = 0$ par A .

200. RMS 2025 855 Mines Ponts PSI..... solution p. [210](#)
Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p de rang r dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Déterminer la trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\Psi(X) = PX - XP$.

201. RMS 2025 856 Mines Ponts PSI..... solution p. [210](#)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x + i + j - 2)$ n'est pas inversible.

202. RMS 2025 857 Mines Ponts PSI..... solution p. [211](#)
Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

203. RMS 2025 858 Mines Ponts PSI..... solution p. [211](#)
On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $D_0 = 1$.

- (a) Soit $M = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer M^{-1} .
- (b) Exprimer $n!$ en fonction des D_k pour $0 \leq k \leq n$.
- (c) En déduire une expression de D_n .

204. RMS 2025 859 Mines Ponts PSI..... solution p. [212](#)
Soit $r \geq 2$.

- (a) Montrer que l'équation $X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(b) Déterminer les solutions $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

205. RMS 2025 860 Mines Ponts PSI..... solution p. 212

Soient a_1, \dots, a_n des nombres complexes distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de terme général

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ a_j & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Soit $P: x \mapsto \det(A + xI_n)$.

- (a) Montrer que P est un polynôme unitaire de degré n .
- (b) Calculer $P(a_i)$.
- (c) Trouver l'expression de P .
- (d) Décomposer $\frac{P(X)}{(X-a_1)\dots(X-a_n)}$ en éléments simples.
- (e) Calculer $\det(A + I_n)$.

206. RMS 2025 861 Mines Ponts PSI..... solution p. 213

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists p \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i^p = 0$ et $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i A_j = A_j A_i$. Montrer que $\prod_{i=1}^n A_i = 0$.

207. RMS 2025 862 Mines Ponts PSI..... solution p. 213

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un pseudo-inverse s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA, B = BAB$ et $A = ABA$.

- (a) Montrer que, si A admet un pseudo-inverse, alors A et A^2 sont de même rang.
- (b) Justifier l'unicité sous réserve d'existence d'un pseudo-inverse.
- (c) Montrer que, si A et A^2 sont de même rang, alors $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires. Étudier la réciproque de la première question.

208. RMS 2025 863 Mines Ponts PSI..... solution p. 214

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe des complexes deux à deux distincts $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $A + \lambda_i B$ est nilpotente pour tout i .

- (a) Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille n est inférieur ou égal à n .
- (b) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (A + \lambda B)^n = 0$.
- (c) Montrer que A et B sont nilpotentes.

209. RMS 2025 864 Mines Ponts PSI..... solution p. 215

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

- (a) Montrer que A n'est pas inversible.
- (b) Montrer que $A = 0$. Ind. Écrire $A = PJ_r Q^{-1}$.

210. RMS 2025 865 Mines Ponts PSI..... solution p. 216

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que $X + 1 - P_n^2(X)$ soit divisible par X^{n+1} . Ind. Penser aux développements limités.
- (b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = I_n + N$.

211. RMS 2025 866 Mines Ponts PSI..... solution p. 217

Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, b_{i,i} > 0, \forall i \neq j, b_{i,j} \leq 0$ et $\forall i, \sum_{j=1}^n b_{i,j} > 0$.

- (a) Montrer que B est inversible. On prendra $X \in \text{Ker}(B)$ et on étudiera $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.
- (b) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ à coefficients ≥ 0 . Montrer que $Y = B^{-1}X$ est à coefficients ≥ 0 .
- (c) En déduire que B^{-1} est à coefficients ≥ 0 .

212. RMS 2025 867 Mines Ponts PSI..... solution p. 217

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Trouver l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de dimension d .

213. RMS 2025 868 Mines Ponts PSI..... solution p. 217

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

214. RMS 2025 869 Mines Ponts PSI..... solution p. 218

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer qu'il existe d tel que $A^3 + dA = 0$.
- (b) Déterminer d . Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer A^{2n} en fonction de d, n et A^2 .
- (c) Déterminer α et β tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$.

215. RMS 2025 870 Mines Ponts PSI..... solution p. 219

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer une matrice semblable à A , diagonale ou triangulaire.
- (b) Expliciter $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$.
- (c) Soit f_A l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 canoniquement associé à A . Quels sont les sous-espaces vectoriels f_A -stables de \mathbb{C}^3 ?
- (d) Peut-on retrouver C_A par des arguments de stabilité?

216. RMS 2025 871 Mines Ponts PSI..... solution p. 220

Soit $k \in \mathbb{C}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de k .

217. RMS 2025 872 Mines Ponts PSI..... solution p. 221

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

218. RMS 2025 873 Mines Ponts PSI..... solution p. 221

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit diagonalisable et $\text{Sp}(A^2) \subset]0, +\infty[$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & \dots & b & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \dots & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

219. RMS 2025 874 Mines Ponts PSI..... solution p. 222

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est un projecteur. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que f soit diagonalisable.

220. RMS 2025 875 Mines Ponts PSI..... solution p. 222

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto (X - a)P'$.

- (a) Montrer que u est linéaire.
- (b) Trouver les valeurs propres de u .
- (c) Trouver les P dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

221. RMS 2025 876 Mines Ponts PSI..... solution p. 223

Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f : P \in E \mapsto P - \alpha(X - \alpha)P'$.

- (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et donner sa matrice dans la base canonique.
- (b) i. Montrer que f est diagonalisable.
ii. À quelle condition sur α , l'endomorphisme f est-il inversible?
- (c) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N} : E = \text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k)$.

222. RMS 2025 877 Mines Ponts PSI..... solution p. 223

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

223. RMS 2025 878 Mines Ponts PSI..... solution p. 224

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Donner le spectre de A et ses espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (b) Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT = TM$. Quelle est sa structure ? sa dimension ?
- (d) Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

224. RMS 2025 879 Mines Ponts PSI..... solution p. 225

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -14 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X + 1)^2(X + 2)Q_n(X) + \alpha_n(X + 2) + \beta_n(X + 1)(X + 2) + \gamma_n(X + 1)^2$.
- (c) Déterminer A^n .

225. RMS 2025 880 Mines Ponts PSI..... solution p. [225](#)

Soit u l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C}, u(P)(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$.

- (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
- (b) Trouver les valeurs propres de u .

226. RMS 2025 881 Mines Ponts PSI..... solution p. [226](#)

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $M^n = I_2$. Prouver que $M^{12} = I_2$. Ind. Montrer que M est \mathbb{C} -diagonalisable et considérer sa trace.

227. RMS 2025 882 Mines Ponts PSI..... solution p. [226](#)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

- (a) On suppose $f^{n-1} \neq 0$ et f nilpotent. Montrer que f est cyclique.
- (b) On suppose que f admet n valeurs propres distinctes. Montrer que f est cyclique.
- (c) On suppose f diagonalisable. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit cyclique.

228. RMS 2025 883 Mines Ponts PSI..... solution p. [227](#)

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E . Soient $E = \text{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la dérivation. Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable.

229. RMS 2025 884 Mines Ponts PSI..... solution p. [227](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

230. RMS 2025 885 Mines Ponts PSI..... solution p. [227](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B .

- (a) Montrer que $B^2 = B$.
- (b) On suppose désormais que A est diagonalisable avec p valeurs propres. En considérant une division euclidienne, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.
- (c) Décrire B à l'aide des éléments propres de A .

231. RMS 2025 886 Mines Ponts PSI..... solution p. [228](#)

- (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$.
- (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

232. RMS 2025 887 Mines Ponts PSI..... solution p. [228](#)

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang r .

- (a) Démontrer le théorème du rang pour les endomorphismes de \mathbb{C}^n .

(b) Montrer qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. Montrer que A et B possèdent r valeurs propres communes en tenant compte des multiplicités.

(d) Que peut-on dire dans c) quand $r = n$?

233. RMS 2025 888 Mines Ponts PSI..... solution p. 229

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f_A(M) = AM$.

(a) Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer $P(f_A)$.

(b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

(c) Trouver le lien entre χ_A et χ_{f_A} .

(d) Donner le lien entre les éléments propres de A et ceux de f_A . Retrouver le résultat de la question b).

234. RMS 2025 889 Mines Ponts PSI..... solution p. 230

Soit E_N l'ensemble des suites à valeurs complexes N -périodiques.

(a) Montrer que E_N est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer sa dimension.

Soit $T : E_N \rightarrow E_N$ définie par $\forall u \in E_N, (T(u))_n = u_{n+1}$.

(b) Montrer que T est un endomorphisme de E_N .

(c) Déterminer les éléments propres de T de deux façons différentes, en revenant à la définition et matriciellement.

(d) L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

235. RMS 2025 890 Mines Ponts PSI..... solution p. 231

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^3 (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$.

Pour tout $i \in [0, 3]$, on note $L_i(t) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq 3 \\ k \neq i}} \frac{t-k}{i-k}$.

(a) Calculer $L_i(j)$ pour tous $i, j \in [0, 3]$. En déduire que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E .

(b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .

(c) Trouver une base orthonormée de E .

236. RMS 2025 891 Mines Ponts PSI..... solution p. 231

Soient $E = \mathbb{R}_4[X]$, F le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes pairs, G le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes impairs. Pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^4 (P(k) + (-1)^k P(-k))(Q(k) + (-1)^k Q(-k))$.

(a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .

(b) Montrer que $E = F \oplus G$.

(c) Déterminer une base orthonormée de E adaptée à $E = F \oplus G$.

237. RMS 2025 892 Mines Ponts PSI..... solution p. [232](#)

Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère une isométrie indirecte f . Montrer que f se décompose en une rotation d'axe Δ et une réflexion de plan Δ^\perp . Cette décomposition est-elle unique ? La rotation et la réflexion commutent-elles ?

238. RMS 2025 893 Mines Ponts PSI..... solution p. [233](#)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$.

- (a) Montrer que F est un espace vectoriel et donner sa dimension.
- (b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner $d(A, F)$ en fonction notamment de $\text{tr}(A)$.

239. RMS 2025 894 Mines Ponts PSI..... solution p. [233](#)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

- (a) Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- (b) On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire donné par : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Soit $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$. Déterminer F^\perp et $(F^\perp)^\perp$.
- (c) Pour E préhilbertien, donner une condition suffisante sur F pour que $F = (F^\perp)^\perp$.

240. RMS 2025 895 Mines Ponts PSI..... solution p. [233](#)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien. Pour x_1, \dots, x_p dans E , on note $G(x_1, \dots, x_p)$ la matrice de coefficient $G_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$.

- (a) Montrer que : G est inversible si et seulement si (x_1, \dots, x_p) est libre.
- (b) Montrer que $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

241. RMS 2025 896 Mines Ponts PSI..... solution p. [234](#)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et F une partie fermée, non vide et convexe de E . Pour $x \in E$ on pose $d(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$ et $\Gamma(x) = \{f \in F, \|x - f\| = d(x, F)\}$.

- (a) Caractériser l'ensemble des x tels que $d(x) = 0$.
- (b) Montrer que d est 1-lipschitzienne. En déduire que $\Gamma(x)$ est non vide.
- (c) En utilisant une identité relative à la norme, montrer que : $\forall (f, f') \in \Gamma(x)^2, f \neq f' \Rightarrow \|\frac{1}{2}(f + f') - x\|^2 < d(x)^2$.
- (d) Montrer que $\Gamma(x)$ est réduit à un seul élément, que l'on notera $p(x)$.
- (e) Montrer que $p(x)$ est caractérisé par : $\forall y \in F, \langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$.

242. RMS 2025 897 Mines Ponts PSI..... solution p. [235](#)

On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Déterminer sa nature et ses valeurs propres.}$$

243. RMS 2025 898 Mines Ponts PSI..... solution p. [235](#)

- (a) Que peut-on dire du spectre d'une matrice orthogonale ?
- (b) Que peut-on dire de la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$? Que décrit-elle ?

- 244. RMS 2025 899 Mines Ponts PSI**..... solution p. [235](#)
 Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.
 (a) Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que $\text{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.
 (b) Déterminer $\text{Ker}(u + \text{id})$ et $\text{Ker}(u - \text{id})$.
- 245. RMS 2025 900 Mines Ponts PSI**..... solution p. [236](#)
 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, α un réel et a un vecteur de E unitaire.
 On définit $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle x, a \rangle a$.
 (a) Montrer que f_α est un endomorphisme de E .
 (b) Soient α, β dans \mathbb{R} . Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$. Pour quels α, f_α est-il bijectif?
 (c) Trouver les valeurs et les vecteurs propres de f_α .
 (d) Pour quels α, f_α est-il une isométrie vectorielle?
 (e) Pour quels α, f_α est-il auto-adjoint?
- 246. RMS 2025 901 Mines Ponts PSI**..... solution p. [237](#)
 Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.
- 247. RMS 2025 902 Mines Ponts PSI**..... solution p. [237](#)
 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.
- 248. RMS 2025 903 Mines Ponts PSI**..... solution p. [237](#)
 Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.
 (a) Montrer que $A^4 - 2A^2 + A = 0$.
 (b) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A .
 (c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'expression des A possibles.
- 249. RMS 2025 904 Mines Ponts PSI**..... solution p. [238](#)
 On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$. On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $(u(P))(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt$
 (a) Montrer que u est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[X]$. Qu'en déduit-on?
 (b) Montrer que u est un isomorphisme.
 Soit (P_0, \dots, P_n) une base orthonormée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.
 (c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.
 (d) En déduire que $\text{tr}(u) = \frac{2^n}{n+1}$.
- 250. RMS 2025 905 Mines Ponts PSI**..... solution p. [239](#)
 Soit $S = (s_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $D = \text{diag}(s_{1,1}, \dots, s_{n,n})$. On suppose S et D semblables. Montrer que $S = D$. Ind. Considérer la trace de S^2 .
- 251. RMS 2025 906 Mines Ponts PSI**..... solution p. [239](#)
 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, $X^T A X > 0$.
 (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 (b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis montrer que $\det(A) \leq \det(B) \det(D)$.

Analyse

252. RMS 2025 907 Mines Ponts PSI..... solution p. 240

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

- (a) Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.
- (b) Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

253. RMS 2025 908 Mines Ponts PSI..... solution p. 241

Soient E un \mathbb{R} espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E .

- (a) Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1) . On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2) .
- (b) On suppose qu'une suite (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2) . Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
- (c) On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$. Montrer que, si $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont équivalentes.
- (d) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.
- (e) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

254. RMS 2025 909 Mines Ponts PSI..... solution p. 242

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$.

- (a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
- (b) Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\sum a_k X^k\| = \max |a_k|$, montrer que la suite (P_n) de terme général $P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$ est de Cauchy sans être convergente.
- (c) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- (d) Montrer que, si (u_n) est de Cauchy et possède une suite extraite convergente, alors (u_n) est convergente.
- (e) On admet le théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R} . Montrer que si E est de dimension finie, alors la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

255. RMS 2025 910 Mines Ponts PSI..... solution p. 243

Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+, f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$.

- (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
- (b) Montrer que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$ -lipschitzienne.
- (c) Montrer que toute fonction polynomiale P appartient à E et déterminer $K(P)$.
- (d) L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur E ?
- (e) Prouver que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \inf_{x \in [0, 1]} |f(x)| + K(f)$.
- (f) L'application $f \mapsto \frac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E \setminus \{0\}$?

256. RMS 2025 911 Mines Ponts PSI..... solution p. 244

Soit $f: (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto x^2 + y^2 + \frac{3}{xy}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

257. RMS 2025 912 Mines Ponts PSI..... solution p. 244

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = (1 + i\frac{\alpha}{n})^n$. Montrer que $z_n \rightarrow e^{i\alpha}$.
- (b) Diagonaliser A_n dans \mathbb{C} .
- (c) Déterminer $\lim A_n^n$.

258. RMS 2025 913 Mines Ponts PSI..... solution p. 245

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geq 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \dots + \sqrt{x_n}}}$.

- (a) Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque la suite (x_n) est constante.
- (b) Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque $x_n = ab^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
- (c) Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $(x_n^{1/2^n})$ est bornée.

259. RMS 2025 914 Mines Ponts PSI..... solution p. 246

Pour $n \geq 2$, on s'intéresse à l'équation $e^x - x^n = 0$.

- (a) Montrer que cette équation admet exactement deux solutions positives u_n et v_n , avec $u_n < v_n$.
- (b) i. Montrer que (u_n) tend vers une limite ℓ .
ii. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.
- (c) Montrer que la suite (v_n) diverge.

260. RMS 2025 915 Mines Ponts PSI..... solution p. 248

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}$ et $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \frac{-1}{\ln(n+3)}$.

- (a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.
- (b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$?
- (c) Montrer, pour tout entier $p \geq 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

261. RMS 2025 916 Mines Ponts PSI..... solution p. 249

On donne $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

- (a) On pose $u_k = \frac{(-1)^k}{k}$. Étudier la convergence et la somme de $\sum_{k \geq 1} u_k$.
- (b) On donne σ bijection de \mathbb{N}^* avec

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\sigma(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	...

Donner $\sigma(k)$.

- (c) Déterminer la somme de la série $\sum_{k \geq 1} u_{\sigma(k)}$.

262. RMS 2025 917 Mines Ponts PSI..... solution p. 250

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$.

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

(b) Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

263. RMS 2025 918 Mines Ponts PSI..... solution p. 250

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

(a) À quelle condition nécessaire la série $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ est-elle convergente? Cette condition est-elle suffisante? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.

(b) On suppose de plus que f est croissante à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}$. Déterminer le signe de u_n et la limite de la suite (u_n) .

(c) On suppose également que, pour tout k assez grand, $\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} \geq \frac{2}{f(k+1)}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

264. RMS 2025 919 Mines Ponts PSI..... solution p. 252

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f .

265. RMS 2025 920 Mines Ponts PSI..... solution p. 252

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f \circ f = 2f - \text{id}$.

(a) Montrer que f est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

(b) On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $(\frac{1}{n} f_n)$ admet une limite, que l'on précisera.

(c) Déterminer f .

266. RMS 2025 921 Mines Ponts PSI..... solution p. 253

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ où g est à valeurs dans $[0, 1]$ et f décroissante. On pose $c = \int_a^b g$. Montrer

que $\int_{b-c}^b f \leq \int_a^b fg \leq \int_a^{a+c} f$. Ind. On pourra introduire une fonction d'une variable bien choisie.

267. RMS 2025 922 Mines Ponts PSI..... solution p. 254

Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$.

268. RMS 2025 923 Mines Ponts PSI..... solution p. 254

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (te^{i\theta})^n}{1 - te^{i\theta}} d\theta$. La variable de l'intégrale est t , pas θ

(b) En déduire que $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} d\theta$. Même chose ici

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

(d) Déterminer de même $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

269. RMS 2025 924 Mines Ponts PSI..... solution p. 255

Calculer $\int_0^{+\infty} [x]e^{-x} dx$.

270. RMS 2025 925 Mines Ponts PSI..... solution p. 256

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} dt$.

- (a) Montrer que $I_n(x)$ est bien définie.
- (b) Calculer $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ et trouver une relation de récurrence.

271. RMS 2025 926 Mines Ponts PSI..... solution p. 257

- (a) Justifier que $I = \int_0^{+\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx$ converge.
- (b) Calculer explicitement I en admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

272. RMS 2025 927 Mines Ponts PSI..... solution p. 257

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$. Étudier l'intégrabilité de f sur \mathbb{R}_+ .

273. RMS 2025 928 Mines Ponts PSI..... solution p. 257

On définit f sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 2x^7 + x$.

- (a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ .
- (b) La fonction $F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin(2x^7 + x)$ est-elle intégrable en $+\infty$?
- (c) L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ est-elle convergente ?

274. RMS 2025 929 Mines Ponts PSI..... solution p. 259

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. On se propose de prouver l'existence d'un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

- (a) Étudier le cas particulier où $f = \sin$.
- (b) Traiter le cas général.

275. RMS 2025 930 Mines Ponts PSI..... solution p. 260

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

276. RMS 2025 931 Mines Ponts PSI..... solution p. 260

Mots-clés : inégalité de Wirtinger

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

- (a) Soient $I_1 = \int_0^1 f(x)f'(x) \cotan(\pi x) dx$ et $I_2 = \int_0^1 f^2(x) (1 + \cotan^2(\pi x)) dx$. Montrer que I_1 et I_2 sont convergentes et exprimer I_1 en fonction de I_2 .

(b) En déduire que $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f')^2$.

277. RMS 2025 932 Mines Ponts PSI..... solution p. 261

Soit la suite de fonctions définies par $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) .

(c) Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$ puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Est-ce cohérent avec les théorèmes du cours ?

278. RMS 2025 933 Mines Ponts PSI..... solution p. 262

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie sur \mathbb{R}_+^* par $\forall x > 0, f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$.

279. RMS 2025 934 Mines Ponts PSI..... solution p. 263

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.

(a) Trouver les domaines de définition/continuité/dérivabilité de f .

(b) Trouver la limite de f en $+\infty$ puis un équivalent.

280. RMS 2025 935 Mines Ponts PSI..... solution p. 264

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto e^{-n\alpha} e^{inx}$.

(a) Pour quelles valeurs de α , la série $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R} ?

On suppose cette condition remplie dans la suite. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

(b) Montrer que S est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$. **Il s'agit plutôt de calculer $S^{(k)}(0)$**

(c) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que S est développable en série entière au voisinage de 0 .

281. RMS 2025 936 Mines Ponts PSI..... solution p. 265

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0, R[$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2} = x \int_0^1 \frac{\ln(t)}{xt - 1} dt$.

(c) Que se passe-t-il pour $x = 1$?

282. RMS 2025 937 Mines Ponts PSI..... solution p. 266

Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de f .

(b) Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, déterminer sa dérivée.

(c) Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f .

(d) Que vaut $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}$?

283. RMS 2025 938 Mines Ponts PSI..... solution p. 267

Soient $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F: x \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t) dt$.

- (a) Déterminer le rayon de convergence de f et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
- (b) Montrer que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Que vaut F' ?
- (c) Montrer que F est développable en série entière et déterminer ce développement.

284. RMS 2025 939 Mines Ponts PSI..... solution p. 268

Mots-clés : chemins de Motzkin

On cherche à déterminer le cardinal m_n de l'ensemble M_n formé des n -uplets $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

(i) $\forall i, a_i \in \{-1, 0, 1\}$,

(ii) $\sum_{i=1}^n a_i = 0$,

(iii) $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^p a_i \geq 0$.

On pose $m_0 = 1$.

- (a) Calculer m_1, m_2 et m_3 .
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in M_n$ tel que $a_1 = 1$.
Montrer qu'il existe $r \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, (b_1, \dots, b_r) \in M_r, (c_1, \dots, c_{n-r-2}) \in M_{n-r-2}$ tels que

$$(a_1, \dots, a_n) = (1, b_1, \dots, b_r, -1, c_1, \dots, c_{n-r-2})$$

et justifier l'unicité de cette décomposition.

- (c) En déduire une formule de récurrence sur les m_1, \dots, m_n .
- (d) Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} m_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est > 0 et déterminer f .

285. RMS 2025 940 Mines Ponts PSI..... solution p. 270

Soit $g: x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

- (a) Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.
- (b) Donner un encadrement du rayon de convergence.

286. RMS 2025 941 Mines Ponts PSI..... solution p. 271

Mots-clés : fonction de Bessel

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

- (a) Trouver l'ensemble de définition de f .
- (b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

(c) Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$ pour $x \in]1, +\infty[$.

287. RMS 2025 942 Mines Ponts PSI..... solution p. [272](#)

On pose $f(x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

- (a) Calculer $f(x, 0)$ et $f(x, 1)$ lorsque cela est possible.
- (b) i. Donner le rayon de convergence de $x \mapsto f(x, s)$.
ii. Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto f(x, s)$, en discutant selon les valeurs de s .
- (c) Déterminer une relation entre $f(x, s)$ et $f(x, s - 1)$. En déduire $f(x, -1)$ et $f(x, -2)$.
- (d) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $f(x, -p)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

288. RMS 2025 943 Mines Ponts PSI..... solution p. [274](#)

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n+1}$.
- (b) Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$ et déterminer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.
- (c) Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
- (d) Calculer $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

289. RMS 2025 944 Mines Ponts PSI..... solution p. [275](#)

Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$. On pose $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et l'on note R le rayon de convergence de cette série entière.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq 1$. En déduire un encadrement de R .
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n + 3)a_{n+1} = 1 + (n + 1)a_n$.
- (c) En déduire que $\forall x \in]-R, R[$, $(2x - x^2)f'(x) + (1 - x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- (d) Trouver ainsi une expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
- (e) Trouver une autre expression de $f(x)$ en montrant que :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+t^2)x}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} dt$$

et en calculant cette intégrale.

290. RMS 2025 945 Mines Ponts PSI..... solution p. [277](#)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t} dt$ et $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt$ convergent et déterminer leur valeur.
- (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$ converge.
- (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{1 + (2n + 1)^2}$.

(d) Adapter les questions précédentes pour déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{ch}(t)} dt$.

291. RMS 2025 946 Mines Ponts PSI..... solution p. 278

Soient $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$ et $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- (a) Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \geq 1$.
- (b) Montrer que I est bien définie.
- (c) Déterminer la nature de $\sum u_n$. Ind. Effectuer un changement de variable.

292. RMS 2025 947 Mines Ponts PSI..... solution p. 279

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$. Limite de (I_n) ?

293. RMS 2025 948 Mines Ponts PSI..... solution p. 279

(a) Soient a et b deux réels > 0 . Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.

(b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n}$.

294. RMS 2025 949 Mines Ponts PSI..... solution p. 280

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

- (a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\arctan(u)| \leq |u|$.
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (c) Déterminer le développement en éléments simples de $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2(1+t^2)}$ pour $|x| \neq 1$.
- (d) Montrer que $f(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de f sur \mathbb{R} .
- (e) Déterminer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$.

295. RMS 2025 950 Mines Ponts PSI..... solution p. 281

Soit $f : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t+1)}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition D de f .
- (b) Montrer que f est continue sur D .
- (c) Montrer que la courbe représentative de f admet la droite $x = 1/2$ pour axe de symétrie.
- (d) Justifier l'existence d'une borne inférieure pour f ; la déterminer.
- (e) Déterminer un équivalent de f en 0 .

296. RMS 2025 951 Mines Ponts PSI..... solution p. 282

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt)e^{-t} dt$.

- (a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (b) On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) possède une limite et la déterminer.
- (c) Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

297. RMS 2025 952 Mines Ponts PSI..... solution p. 283

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x + e^t} dt$.

- (a) Montrer que f est définie au moins sur un intervalle de la forme $] -\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.
- (b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 .
- (c) Calculer ce développement et en déduire une expression $f(x)$.

298. RMS 2025 953 Mines Ponts PSI..... solution p. 284

Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner f' .
- (b) Soit $g : x \mapsto e^{x^2} f(x)$. Montrer que g est solution de $(E) : y' - 2xy = 1$ avec $y(0) = 0$.
- (c) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière et préciser le rayon.
- (d) La fonction g est-elle développable en série entière ?

299. RMS 2025 954 Mines Ponts PSI..... solution p. 284

Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- (a) Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 . Montrer de plus que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
- (b) Étudier la convexité de Γ et celle de $\ln \circ \Gamma$.
- (c) Pour tout $x > 0$, établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} (1 - t/n)^n dt = \Gamma(x)$.
- (d) Exprimer $\int_0^n t^{x-1} (1 - t/n)^n dt$ en fonction de $\int_0^1 u^{x-1} (1 - u)^n du$.
- (e) Montrer que la suite de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{n^n x!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ converge simplement vers Γ . Ind. Procéder par intégrations par parties successives.

300. RMS 2025 955 Mines Ponts PSI..... solution p. 285

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (b) Trouver une relation entre f et f' .
- (c) En déduire une expression simple de $f(x)$.

301. RMS 2025 956 Mines Ponts PSI..... solution p. 286

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition I de F .
Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et donner son sens de variation.
- (b) Déterminer les limites de F aux bornes de I .
- (c) Calculer $G(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$ pour $x > 0$.
- (d) Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$.
Ind. On pourra étudier $|F - G|$ et utiliser la relation de Chasles.

302. RMS 2025 957 Mines Ponts PSI..... solution p. 287

On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner l'expression de $f'(x)$.
- (c) Montrer que g est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (d) À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$.
- (e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$.
- (f) En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

303. RMS 2025 958 Mines Ponts PSI..... solution p. 288

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$. Soit $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que g se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

304. RMS 2025 959 Mines Ponts PSI..... solution p. 289

Soit (E) l'équation différentielle : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

- (a) Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
- (b) Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$.
- (c) Montrer qu'il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+ .

305. RMS 2025 960 Mines Ponts PSI..... solution p. 290

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}} dt$.

- (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et vérifie l'équation différentielle (E) : $2xy'' + y' - 2y = 0$.
- (c) Résoudre l'équation (E) en posant $y(x) = z(\sqrt{x})$.
- (d) Donner l'expression de $f(x)$.

306. RMS 2025 961 Mines Ponts PSI..... solution p. 291

On s'intéresse aux solutions $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

- (a) Montrer que $a_0 = 1/2, a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.

- (b) En déduire l'unicité de f .
- (c) Déterminer les a_n , le rayon de convergence de f puis exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

307. RMS 2025 962 Mines Ponts PSI..... solution p. 291

On note (E) l'équation différentielle $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

- (a) Déterminer les solutions de (E) non nulles développables en série entière. Préciser le rayon de convergence.
- (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur un intervalle raisonnable.
- (c) Les raccorder entre elles.

308. RMS 2025 963 Mines Ponts PSI..... solution p. 292

On note (E) l'équation différentielle $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2(1+x)$.

- (a) Trouver les solutions de l'équation homogène associée de la forme $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Trouver une solution particulière de (E) , d'abord sur $]0, +\infty[$, puis sur $] - \infty, 0[$.
Ind. On la cherchera sous la forme $x\alpha(x) + x^2\beta(x)$, où α et β sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $x\alpha'(x) + x^2\beta'(x) = 0$.
- (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

309. RMS 2025 964 Mines Ponts PSI..... solution p. 293

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_{a,b,c} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Soit $F = \{f_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

- (a) Montrer que F est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
- (b) Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = Mf(t)$.
- (c) La matrice M est-elle inversible ?
- (d) Quelles sont les valeurs propres de M ? Pouvaient-on s'y attendre ?

310. RMS 2025 965 Mines Ponts PSI..... solution p. 294

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
- (b) Résoudre $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

311. RMS 2025 966 Mines Ponts PSI..... solution p. 294

Soit $J : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$.

- (a) Montrer que J est bien définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que J est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.
- (c) Montrer que $x \cdot J''(x) + J'(x) + J(x) = 0$. **Correction : $xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.**
- (d) Soit $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = J(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et que $\Delta\varphi + \varphi = 0$.

312. RMS 2025 967 Mines Ponts PSI..... solution p. 295

On pose $f(x, y) = \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$. On note Ω l'ensemble de définition de f .

- (a) Représenter Ω et montrer que c'est un ouvert.
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .
- (c) Comparer $f(1/x, y)$ et $f(x, y)$. Donner une interprétation géométrique pour $x > 0$ et $y \in]0, 1[$.
- (d) Montrer que f vérifie : $2yf + (1 - x^2)\frac{\partial f}{\partial x} - (1 - y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

313. RMS 2025 968 Mines Ponts PSI..... solution p. 297

- (a) Résoudre $(1 - t^2)y'' - 2ty' = 0$ sur $I =]-1, 1[$.
- (b) Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur I à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $g(x, y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$. **Problème de définition, l'argument de f pouvant être ± 1 si $y = 0$ et $x = k\pi/2$... Il faudrait donc stricto sensu se limiter à l'étude de g sur $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(k\pi/2, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 ... ou alors considérer que f est définie sur $\bar{I} = [-1, 1]$ et parler de prolongement (sans doute plus simple pour modifier l'énoncé... mais qui aboutirait à la non existence de solutions non constantes). CC.**
Déterminer l'ensemble des fonctions f telles que g soit non constante et de laplacien nul, c'est-à-dire telles que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

314. RMS 2025 969 Mines Ponts PSI..... solution p. 299

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $\rho : x \mapsto \|x\|^2$.

- (a) Montrer que $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
- (b) Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = g(\|x\|^2)$. Déterminer les fonctions g vérifiant $\Delta f = 0$.

315. RMS 2025 970 Mines Ponts PSI..... solution p. 300

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Soient a, b, c des réels > 0 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $(x, y) \mapsto x^a y^b (1 - x - y)^c$. Montrer l'existence d'extrema locaux pour f et les déterminer.

Probabilités

316. RMS 2025 971 Mines Ponts PSI..... solution p. 300

On considère une classe de PSI constituée de N élèves, dont n provenant de PCSI et $N - n$ de MPSI. On envoie successivement au tableau des élèves choisis au hasard. Un élève peut passer plusieurs fois au tableau.

- (a) Quelle est la probabilité qu'au cours des n premiers passages, il n'y ait que des élèves de PCSI ?
- (b) Quelle est la probabilité qu'au cours des $n + 5$ premiers passages, il y ait n élèves de PCSI ?
- (c) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note X_i la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour faire passer i élèves de PCSI distincts au tableau. Déterminer la loi de X_i .

317. RMS 2025 972 Mines Ponts PSI..... solution p. 301

Mots-clés : Urne de Polya

On considère initialement une urne contenant une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute deux boules de la même couleur que celle tirée. On répète indéfiniment le processus.

- (a) Calculer la probabilité de ne tirer que des boules rouges lors des n premiers tirages ?
- (b) Calculer la probabilité de tirer indéfiniment uniquement des boules rouges ?

- (c) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au 42-ième tirage.
- (d) Le résultat de la question b) reste-t-il vrai si on rajoute 3 boules (au lieu de 2) ? 4 boules ?

318. RMS 2025 973 Mines Ponts PSI..... solution p. **302**

- (a) Calculer $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.
- (b) On dispose de p urnes contenant chacune p boules. Pour $i \in [1, p]$, l'urne i contient i boules noires et $p-i$ blanches. On choisit une des urnes aléatoirement et on en tire successivement des boules avec remise. On note $A_{n,p}$ l'évènement : on tire $2n$ boules et on a autant de boules noires que de boules blanches.
 - i. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n,p})$ sous forme d'une somme.
 - ii. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(A_{n,p})$ quand n tend vers $+\infty$.
 - iii. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(A_{n,p})$ quand p tend vers $+\infty$.

319. RMS 2025 974 Mines Ponts PSI..... solution p. **303**

On considère des lancers indépendants avec la probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile. On pose par convention $T_0 = 0$ et pour $r \in \mathbb{N}^*$, T_r est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour avoir r piles. On pose $Z_r = T_r - T_{r-1}$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Déterminer la loi de Z_r .
- (b) Déterminer la fonction génératrice de T_r .
- (c) Pour tout $x \in]0, 1[$, calculer $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$ et en déduire la loi de T_r . (le calcul de somme sert plutôt pour l'espérance)
- (d) Calculer $\mathbb{E}(T_r)$ de deux façons différentes.

320. RMS 2025 975 Mines Ponts PSI..... solution p. **304**

Soient $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(n \text{ divise } X)$.
- (b) Soit p un nombre premier et $v_p(k) = \max \{i \in \mathbb{N}, p^i \text{ divise } k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $v_p(X)$ puis son espérance.

321. RMS 2025 976 Mines Ponts PSI..... solution p. **304**

On effectue des lancers avec une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la deuxième fois. On note X le nombre de faces obtenues au cours de l'expérience.

- (a) Donner la loi de X .
- (b) Montrer que $\mathbb{E}(X) < +\infty$ et la calculer.
- (c) On prend une urne et, si $X = n$, on pose $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans l'urne. Donner la loi de Y où Y est le numéro de la boule tirée dans l'urne. Calculer ensuite l'espérance de Y ainsi que sa variance.

322. RMS 2025 977 Mines Ponts PSI..... solution p. **305**

- (a) Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$. Déterminer le rayon de convergence et donner une expression de S .
- (b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} de fonction génératrice $G_X = \lambda S$. Déterminer λ et la loi de X .

(c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

323. RMS 2025 978 Mines Ponts PSI..... solution p. 306

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k$.

- (a) Quelle est la valeur de a ?
- (b) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ si elles existent.

324. RMS 2025 979 Mines Ponts PSI..... solution p. 306

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.

On pose $A_k = (X_{2k-1} X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap_{k=1}^p A_k$. Soit $T = \min \{k \geq 2, X_{k-1} = X_k = 1\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 0$ et en déduire que $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}) = 1$.
- (b) Établir une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par $(\mathbb{P}(T = n))$. **Correction : d'ordre 3**
- (c) Calculer l'espérance de T .

325. RMS 2025 980 Mines Ponts PSI..... solution p. 307

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, où p et q sont éléments de $]0, 1[$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.

- (a) Donner la loi de U .
- (b) Calculer l'espérance de U .
- (c) Si $p = q$, montrer que $\mathbb{E}(U) > 1$.

326. RMS 2025 981 Mines Ponts PSI..... solution p. 307

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. On note U la matrice ligne $(X_1 \cdots X_n)$ et $M = U^T U$.

- (a) Déterminer les lois de $\text{rg}(M)$ et $\text{tr}(M)$.
- (b) Déterminer la probabilité que M soit une matrice de projecteur.
- (c) Dans cette question, on prend $n = 2$. On note V la matrice ligne $(1 \ 1)$ et $X = V M V^T$. Déterminer l'espérance et la variance de X .

327. RMS 2025 982 Mines Ponts PSI..... solution p. 308

Soient $a, b > 0$, X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(a)$, $Y \sim \mathcal{P}(b)$, $\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(Z = -1) = p$. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ YZ & X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

328. RMS 2025 983 Mines Ponts PSI..... solution p. 308

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On définit $(S_n)_{n \geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = S_{n-1} + X_n$.

- (a) Déterminer la loi de $\frac{S_n + n}{2}$. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
- (b) On pose $A_n = |S_n|$.
 - i. Déterminer $A_n(\Omega)$.
 - ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir : $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(A_n) + \mathbb{P}(S_n = 0)$.
Ind. Exprimer $\mathbb{E}(A_{n+1})$ et appliquer la formule des probabilités totales à X_{n+1} .
 - iii. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

Deuxième partie

Corrigés

Mines Ponts

Algèbre

199. RMS 2025 854 Mines Ponts PSI énoncé p. 32

Soit

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Interpréter géométriquement A .
- (b) Donner l'image du plan P d'équation $x - y - z = 0$ par A .

SOLUTION. —

- (a) On constate que

$$A^2 = I_3,$$

donc que A est la matrice d'une symétrie. On cherche ensuite les sous-espaces propres en résolvant $AX = X$ et $AX = -X$ où $X = (x \ y \ z)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} 7x - 4y = 5x \\ 6x - 7y = 5y \\ -5z = 5z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 6x - 12y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ AX = -X &\iff \begin{cases} 7x - 4y = -5x \\ 6x - 7y = -5y \\ -5z = -5z \end{cases} \iff \begin{cases} 12x - 4y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \iff 3x - y = 0. \end{aligned}$$

La matrice A est donc celle, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la symétrie par rapport à la droite engendrée par $(2, 1, 0)$ parallèlement au plan d'équation $3x - y = 0$.

- (b) La famille (u_1, u_2) est une base du plan P , où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$. Comme $Au_1 = \frac{1}{5}(3, -1, 0)$ et $Au_2 = \frac{1}{5}(7, 6, -5)$, l'image de P par A est le plan P' (on savait que c'était un plan car A est inversible) de base (v_1, v_2) où

$$v_1 = (3, -1, 0) \quad \text{et} \quad v_2 = (7, 6, -5).$$

Une équation de P' est donnée par

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & -5 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3(6z + 5y) + (7z + 5x) = 5x + 15y + 25z = 0,$$

ou encore $x + 3y + 5z = 0$.

200. RMS 2025 855 Mines Ponts PSI énoncé p. 32

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p de rang r dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Déterminer la trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\Psi(X) = PX - XP$.

SOLUTION. — RMS 2020 775 Mines Ponts PC

On va démontrer que

$$\text{tr}(\psi) = 0.$$

Si \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{B}' une base adaptée à $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ alors, en notant Q la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , on a

$$Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r.$$

Nous allons démontrer que Ψ est diagonalisable. Le calcul de sa trace en découlera.

Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a, en multipliant à gauche par Q^{-1} et à droite par Q :

$$\Psi(X) = \lambda X \iff PX - XP = \lambda X \iff J_r(Q^{-1}XQ) - (Q^{-1}XQ)J_r = \lambda(Q^{-1}XQ).$$

Si on découpe

$$Q^{-1}XQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

en blocs analogues à ceux de J_r il vient alors :

$$\begin{aligned} \Psi(X) = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \lambda A = 0 \\ (\lambda - 1)B = 0 \\ (\lambda + 1)C = 0 \\ \lambda D = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En discutant les valeurs de λ on trouve aisément que $\text{Sp}(\psi) = \{-1, 0, 1\}$ et que

$$\begin{aligned} E_0(\psi) &= \left\{ Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}), D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \right\} \\ E_1(\psi) &= \left\{ Q \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R}) \right\} \\ E_{-1}(\psi) &= \left\{ Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad C \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R}) \right\}. \end{aligned}$$

Comme Q est une matrice fixée il vient

$$\dim E_0(\psi) = r^2 + (n - r)^2, \quad \dim E_1(\psi) = r(n - r), \quad \dim E_{-1}(\psi) = r(n - r).$$

Enfin, $\dim E_0(\psi) + \dim E_1(\psi) + \dim E_{-1}(\psi) = r^2 + (n - r)^2 + 2r(n - r) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et avec une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices propres pour ψ on obtient :

$$\text{tr}(\psi) = 0 \times (r^2 + (n - r)^2) + 1 \times r(n - r) + (-1) \times r(n - r) = 0$$

201. RMS 2025 856 Mines Ponts PSI énoncé p. 32

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x + i + j - 2)$ n'est pas inversible.

SOLUTION. — RMS 2006 1111 Télécom Sud Paris PC

On note $(C_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ la famille des colonnes de A .

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension n . Une famille comportant $n + 1$ polynômes de degré au plus $n - 1$ est donc liée. En particulier, si l'on pose

$$\forall j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \quad Q_j(X) = P(X + j - 1),$$

la famille $(Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1})$ est liée. Il existe donc des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j Q_j = 0$.

En évaluant cette égalité en $x + i - 1$ pour i variant de 1 à $n + 1$, on obtient $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j P(x + i + j - 2) = 0$, c'est-à-dire que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j C_j = 0.$$

La famille des colonnes de A étant liée, la matrice A n'est pas inversible.

202. RMS 2025 857 Mines Ponts PSI énoncé p. 32

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

SOLUTION. — RMS 2013 965 ENSAM PSI, RMS 2017 771 Mines Ponts PC

Supposons qu'il existe une telle matrice B telle que $B^2 = A$. Puisque $A^3 = 0$, B est nilpotente donc ses valeurs propres sont toutes nulles et $B^3 = 0$ d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON. Comme $BB^2 = 0$, on a $\text{Im } B^2 \subset \text{Ker } B \subset \text{Ker } B^2$. Or $\text{rg } A = 2$ donc $\dim \text{Ker } A = 1$ et on ne peut avoir $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$. Une telle matrice B ne peut donc pas exister.

AUTRE MÉTHODE utilisant le théorème de trigonalisabilité (polynôme caractéristique scindé) : les valeurs propres de B étant toutes nulles, B est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors B^2 serait semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang ≤ 1 et donc ne peut être égale à A qui est de rang 2.

203. RMS 2025 858 Mines Ponts PSI énoncé p. 32

On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $D_0 = 1$.

- (a) Soit $M = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer M^{-1} .
- (b) Exprimer $n!$ en fonction des D_k pour $0 \leq k \leq n$.
- (c) En déduire une expression de D_n .

SOLUTION. — RMS 2014 1327 CCP PC, RMS 2018 894 Mines Ponts PC pour a), RMS 2016 782 Centrale PSI pour b)

- (a) M est la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X + 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la formule de binôme.
 f est inversible d'inverse $f^{-1} : P \mapsto P(X - 1)$ donc M est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base canonique, son terme général est donc, d'après la formule du binôme, $b_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{j}{i}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Le nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant exactement $n - k$ points fixes vaut $\binom{n}{k} D_k$, en effet $\binom{n}{k}$ représente le nombre de choix des k points non fixes, puis D_k le nombre de façons de les permuter sans qu'aucun ne soit fixe.
 Sommant sur k , on a ainsi dénombré toutes les permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, donc

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$

- (c) D'après ce qui précède, en notant D et E les colonnes de termes généraux respectifs D_k et $k!$, on a $E = M^\top D$ donc $D = (M^{-1})^\top E$. On en déduit que $D_n = \sum_{k=0}^n b_{kn} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \stackrel{k:=n-k}{=} n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

204. RMS 2025 859 Mines Ponts PSI énoncé p. 32

Soit $r \geq 2$.

(a) Montrer que l'équation $X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(b) Déterminer les solutions $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION. — RMS 2009 341 X ESPCI PC pour b)

(a) Si $X^r = A$, alors $X^{2r} = A^2 = 0$ donc X est nilpotente donc $\chi_X(Y) = Y^2$ donc $X^2 = 0$ d'après Cayley-Hamilton et donc $X^r = X^{r-2}X^2 = 0$ ce qui n'est pas.

(b) On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} . On ne parle dans cet exercice que de réduction sur le corps des nombres complexes. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que 1 est l'unique valeur propre de A , que $E_1(A) = \text{Vect}(E_1)$, donc que A n'est pas diagonalisable. Si V est un vecteur propre de X , associé à la valeur propre complexe λ , alors $AV = X^n V = \lambda^n V$, donc $\lambda \in \mathbb{U}_n$ et V est colinéaire à E_1 , donc E_1 est propre pour X , de valeur propre λ . La matrice X n'a qu'une seule valeur propre, sinon elle serait diagonalisable, et $A = X^n$ le serait aussi. Par suite, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + \alpha E_{1,2}.$$

Comme I_2 et $E_{1,2}$ commutent, on a $A = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}\alpha E_{1,2}$, ce qui implique que $n\lambda^{n-1}\alpha = 1$, donc que $\alpha = \frac{\lambda}{n}$, puisque $\lambda^n = 1$. La réciproque étant évidente, les solutions sont les n matrices

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{U}_n.$$

205. RMS 2025 860 Mines Ponts PSI énoncé p. 33

Soient a_1, \dots, a_n des nombres complexes distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de terme général

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ a_j & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Soit $P: x \mapsto \det(A + xI_n)$.

(a) Montrer que P est un polynôme unitaire de degré n .

(b) Calculer $P(a_i)$.

(c) Trouver l'expression de P .

(d) Décomposer $\frac{P(X)}{(X-a_1)\cdots(X-a_n)}$ en éléments simples.

(e) Calculer $\det(A + I_n)$.

SOLUTION. —

(a) Comme $P = \chi_{-A}$, le cours affirme qu'il est unitaire de degré n .

(b) Si l'on note $\mathcal{B} = (E_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, et $U = E_1 + \dots + E_n$ la colonne dont tous les éléments valent 1, on a

$$P(a_i) = \det(a_1 U + (a_i - a_1)E_1, \dots, a_{i-1}U + (a_i - a_{i-1})E_{i-1}, a_i E_i, a_{i+1}U + (a_i - a_{i+1})E_{i+1}, \dots, a_n U + (a_i - a_n)E_n),$$

où \det est le déterminant sur \mathcal{B} . Par multilinéarité et alternance, il ne reste que

$$\begin{aligned} P(a_i) &= \det((a_i - a_1)E_1, \dots, (a_i - a_{i-1})E_{i-1}, a_i E_i, (a_i - a_{i+1})E_{i+1}, \dots, (a_i - a_n)E_n) \\ &= a_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

(c) Comme P est unitaire de degré n , la division euclidienne de P par $N = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ s'écrit sous la forme

$$P = 1 \times N + R,$$

où $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. En évaluant cette relation en a_i , on obtient $P(a_i) = R(a_i)$. La majoration de degré $\deg(R) \leq n - 1$ et le caractère deux à deux distincts des a_i montrent que R est le polynôme d'interpolation de Lagrange valant $P(a_i)$ en a_i , donc

$$P = N + \sum_{i=1}^n P(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} = \prod_{i=1}^n (X - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j \neq i} (X - a_j).$$

(d) L'expression de P ci-dessus montre immédiatement que la décomposition de $\frac{P}{N}$ en éléments simples est

$$\frac{P(X)}{(X - a_1) \cdots (X - a_n)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{X - a_i}.$$

(e) On utilise l'expression de P :

$$\det(A + I_n) = P(1) = \prod_{i=1}^n (1 - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j \neq i} (1 - a_j).$$

206. RMS 2025 861 Mines Ponts PSI énoncé p. 33

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists p \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i^p = 0$ et $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i A_j = A_j A_i$. Montrer que $\prod_{i=1}^n A_i = 0$.

SOLUTION. — RMS 2012 304 X ESPCI PC, RMS 2019 414 X PSI

Par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on montre que

$$\text{rg}(A_1 \dots A_k) \leq n - k.$$

La propriété est claire au rang 1, en effet A_1 est nilpotente donc non inversible. Soit $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, supposons $\text{rg}(A_1 \dots A_k) \leq n - k$. Si ce rang est nul, il n'y a rien à prouver. Sinon $\text{Im}(A_1 \dots A_k)$ est stable par A_{k+1} grâce à l'hypothèse de commutation. Si l'on note f_{k+1} l'endomorphisme induit, toujours nilpotent car A_{k+1} l'est, on a $\text{Im}(f_{k+1}) \subsetneq \text{Im}(A_1 \dots A_k)$, c'est-à-dire $\text{Im}(A_{k+1} A_1 \dots A_k) \subsetneq \text{Im}(A_1 \dots A_k)$.

Comme les matrices commutent, il vient $\text{Im}(A_1 \dots A_k A_{k+1}) \subsetneq \text{Im}(A_1 \dots A_k)$ et en passant aux dimensions,

$$\text{rg}(A_1 \dots A_k A_{k+1}) < \text{rg}(A_1 \dots A_k) \leq n - k$$

par hypothèse de récurrence. Et donc $\text{rg}(A_1 \dots A_k A_{k+1}) \leq n - k - 1$, ce qui achève la récurrence.

En particulier pour $k = n$, on obtient $\text{rg}(A_1 \dots A_n) \leq 0$ donc

$$A_1 \dots A_n = 0_n.$$

207. RMS 2025 862 Mines Ponts PSI énoncé p. 33

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un pseudo-inverse s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA, B = BAB$ et $A = ABA$.

- (a) Montrer que, si A admet un pseudo-inverse, alors A et A^2 sont de même rang.
- (b) Justifier l'unicité sous réserve d'existence d'un pseudo-inverse.
- (c) Montrer que, si A et A^2 sont de même rang, alors $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires. Étudier la réciproque de la première question.

SOLUTION. —

- (a) Supposons que A admet un pseudo-inverse B . Alors $A = ABA = A^2 B$ donc $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(A^2)$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie. Donc $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^2)$, et *a fortiori* A et A^2 sont de même rang.

(b) Supposons que A admet un pseudo-inverse B . On a donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.

Via le théorème du rang, on en tire $\dim \text{Ker}(A) = \dim \text{Ker}(A^2)$, et comme $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^2)$, $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$.

Et donc $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont en somme directe, en effet si $X \in \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$, alors X s'écrit $X = AY$ et $AX = 0 = A^2Y$ donc $Y \in \text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$ et donc $X = AY = 0$. Comme $\dim \text{Ker}(A) + \text{rg}(A) = n$, on en déduit que $\text{Ker} A$ et $\text{Im} A$ sont supplémentaires.

Le théorème d'isomorphisme assure que A (vu comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) induit un automorphisme de $\text{Im}(A)$. Notant $p = \text{rg}(A)$, dans une base adaptée à la décomposition $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$. Et il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PA'P^{-1}$.

Soit alors $B' = P^{-1}BP$, que l'on écrit par blocs $B' = \begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix}$.

$AB = BA$ donc $A'B' = B'A'$, ce qui donne $\begin{pmatrix} DU & DV \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UD & 0 \\ WD & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $DV = 0$ donc $V = 0$ (D est inversible) et $WD = 0$ donc $W = 0$.

$BAB = B$ donc $B'A'B' = B$, ce qui donne $\begin{pmatrix} UDU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, en particulier $X = 0$.

Enfin $ABA = A$ donc $A'B'A' = A'$, ce qui donne $\begin{pmatrix} DUD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $DUD = D$ et donc $DU = I_p = UD$, soit $U = D^{-1}$.

Ainsi U, V, W et X sont entièrement déterminés donc B' aussi et B aussi, ce qui prouve l'unicité du pseudo-inverse.

(c) Supposons que A et A^2 sont de même rang. Alors $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires comme montré à la question précédente. Il existe donc $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $D \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$.

Il suffit de poser $B = P \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour obtenir un pseudo-inverse de A (on vérifie sans peine que $AB = BA$, $ABA = A$ et $BAB = B$).

208. RMS 2025 863 Mines Ponts PSI énoncé p. 33

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe des complexes deux à deux distincts $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $A + \lambda_i B$ est nilpotente pour tout i .

- (a) Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille n est inférieur ou égal à n .
- (b) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (A + \lambda B)^n = 0$.
- (c) Montrer que A et B sont nilpotentes.

SOLUTION. — RMS 2009 701 Mines Ponts PC, RMS 2013 964 ENSAM PSI, RMS 2014 359 X ESPCI PC, RMS 2014 1203 ENSAM PSI

Soient r_1, \dots, r_{n+1} des complexes distincts tels que $N_k = A + r_k B$ est nilpotente, pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$. Un exercice classique prouve que $N_k^n = 0$.

- Dans un premier temps, on suppose que A et B commutent, et on donne une solution purement algébrique. En développant les égalités $(A + r_k B)^n = 0$ par la formule du binôme, on obtient le système de $n + 1$ relations matricielles :

$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\}, \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} r_k^p A^{n-p} B^p = 0,$$

ce qui s'écrit formellement

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1}r_1 & \binom{n}{2}r_1^2 & \cdots & \binom{n}{n}r_1^n \\ 1 & \binom{n}{1}r_2 & \binom{n}{2}r_2^2 & \cdots & \binom{n}{n}r_2^n \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & \binom{n}{1}r_{n+1} & \binom{n}{2}r_{n+1}^2 & \cdots & \binom{n}{n}r_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^n \\ A^{n-1}B \\ \vdots \\ AB^{n-1} \\ B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice M de ce système a pour déterminant $\det M = \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \binom{n}{n} V(r_1, \dots, r_n, r_{n+1})$, où le déterminant de Vandermonde $V(r_1, \dots, r_n, r_{n+1})$ est non nul car les r_k sont distincts (autre exercice classique, n'exigeant pas d'ailleurs la précision de la formule exacte). On multiplie alors à gauche par M^{-1} et il vient

$$\begin{pmatrix} A^n \\ A^{n-1}B \\ \vdots \\ AB^{n-1} \\ B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne en particulier $A^n = B^n = 0$.

REMARQUE. — Pour ceux que ce calcul formel gêne, on écrit que l'on a les relations (L_k) , pour $k \in \{1, \dots, n+1\}$:

$$\sum_{p=1}^{n+1} m_{k,p} A^{n+1-p} B^{p-1} = 0.$$

On remarque que $M = (m_{k,p})$ est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, et on note $(m'_{k,p})$ son inverse. La combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n+1} m'_{1,k} L_k$ des lignes du système ci-dessus donne

$$\sum_{k=1}^{n+1} m'_{1,k} \left(\sum_{p=1}^{n+1} m_{k,p} A^{n+1-p} B^{p-1} \right) = 0,$$

soit $\sum_{p=1}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} m'_{1,k} m_{k,p} \right) A^{n+1-p} B^{p-1} = 0$. Comme $M^{-1}M = I_n$, on en déduit que $A^n = 0$.

De manière similaire on obtient $B^n = 0$.

- Dans un deuxième temps, on donne une solution analytique pour le cas général, où les matrices A et B ne sont pas supposées commuter. On part du système de $n+1$ relations matricielles :

$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\} \quad (A + r_k B)^n = 0.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, écrivons la matrice $(A + zB)^k$ sous la forme $(P_{k,i,j}(z))_{i,j}$. On prouve aisément par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, la fonction $z \mapsto P_{k,i,j}(z)$ est polynomiale en z de degré $\leq k$. En particulier, l'égalité $(A + zB)^n = (P_{n,i,j}(z))_{i,j}$ et l'hypothèse donnent, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ fixé :

$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\}, \quad P_{n,i,j}(r_k) = 0.$$

Le polynôme $P_{n,i,j}$ est de degré $\leq n$ et admet au moins $n+1$ racines distinctes r_1, \dots, r_{n+1} : il est nul. Cela étant vérifié pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, il vient : $\forall z \in \mathbb{C}, (A + zB)^n = 0$.

- Pour $z = 0$, on obtient $A^n = 0$. En divisant par $z \neq 0$, et en faisant tendre z vers $+\infty$, il vient $B^n = 0$.

- Voici une solution indépendante des précédentes.

On considère, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A + \lambda B$ et son polynôme caractéristique : $\chi_\lambda(x) = \det(xI_n - [A + \lambda B])$.

D'une part, $\chi_\lambda(x) = x^n + a_{n-1}(\lambda)x^{n-1} + \dots + a_0(\lambda)$ où les fonctions a_j sont polynomiales de degré $\leq n$ (par développement du déterminant). D'autre part, $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \chi_{r_i}(x) = x^n$ car $A + r_i B$ est nilpotente et donc les polynômes a_j admettent tous comme racines les r_i , au nombre de $n+1$. On en déduit qu'ils sont tous nuls et que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_\lambda(x) = x^n$.

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON (par exemple) permet alors de conclure que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, A + \lambda B$ est nilpotente. En particulier, pour $\lambda = 0$, A est nilpotente.

On a également $\forall p \in \mathbb{N}, B_p = \frac{1}{p}(A + pB)$ est nilpotente : $B_p^n = 0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} B_p = B$ donc par continuité de $M \mapsto M^n$, on a $B^n = 0$ et B est nilpotente.

209. RMS 2025 864 Mines Ponts PSI énoncé p. 33
Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

- (a) Montrer que A n'est pas inversible.
- (b) Montrer que $A = 0$. Ind. Écrire $A = PJ_r Q^{-1}$.

SOLUTION. — RMS 2012 1311 Petites Mines PC, RMS 2017 772 Mines Ponts PC, RMS 2010 1036 Navale PC, RMS 2013 623 Mines Ponts PC, RMS 2015 696 Mines Ponts PC

- (a) On choisit M dont la première colonne est l'opposé de la première colonne de A , et dont les autres sont nulles. Alors $\det M = \det(A + M) = 0$, puisque M possède au moins $n - 1$ colonnes nulles et que la première colonne de $A + M$ est nulle. En appliquant l'hypothèse, on en déduit que $\det A = 0$.
- (b) Sans l'indication ! On raisonne par contraposition. Supposons A ne soit pas la matrice nulle : elle possède au moins une colonne C_{j_0} non nulle. On complète alors la colonne $-C_{j_0}$ en une base $(X_1, \dots, X_{j_0-1}, -C_{j_0}, X_{j_0+1}, \dots, X_n)$ de \mathbb{R}^n . Ces colonnes forment les colonnes d'une matrice inversible M telle que $\det M \neq 0$ alors que $\det(A + M) = 0$ puisque la matrice $A + M$ a sa $j_0^{\text{ème}}$ colonne nulle : contradiction

210. RMS 2025 865 Mines Ponts PSI énoncé p. 33

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que $X + 1 - P_n^2(X)$ soit divisible par X^{n+1} . Ind. Penser aux développements limités.
- (b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = I_n + N$.

SOLUTION. — RMS 2015 398 X ESPCI PC
 Voir aussi les exercices ??, ?? et ??.

PREMIÈRE MÉTHODE. Si on note $P(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k$ la partie principale du développement limité en zéro de $\sqrt{1+x}$ on a : $\sqrt{1+x} = P(x) + o_0(x^{N-1})$ et, en élevant au carré :

$$1 + x = P^2(x) + o_0(x^{N-1}),$$

Il s'ensuit que le polynôme formel $P^2 - X - 1$ est divisible par X^N (pour que la fonction polynomiale associée soit négligeable devant $x \mapsto x^{N-1}$ en 0). En écrivant alors dans $\mathbb{R}[X]$, $P^2 - X - 1 = X^N Q$ et en posant $B = P(A)$ on a bien

$$B^2 - A - I_n = A^N Q(A) = 0.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. On part du développement en série entière de $\sqrt{1+t}$, valable sur $] -1, 1[$:

$$\sqrt{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (\text{peu importe, ici, la valeur des } a_k)$$

Par produit de Cauchy, il vient :

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad 1 + t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_\ell a_{k-\ell} \right) t^k.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit :

$$\sum_{\ell=0}^k a_\ell a_{k-\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Posons maintenant m tel que $A^m = 0$ puis

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^m a_k A^k.$$

En effet, puisque $A^k = 0$ pour tout $k \geq m$, la somme est faussement infinie et donc B est parfaitement définie. Les sommes étant faussement infinies, on peut intervertir et réorganiser les sommations si bien que

$$B^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_\ell a_{k-\ell} \right) A^k = I_n + A$$

d'après la formule démontrée ci-dessus sur la suite $(a_k)_{k \geq 0}$.

211. RMS 2025 866 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, b_{i,i} > 0, \forall i \neq j, b_{i,j} \leq 0$ et $\forall i, \sum_{j=1}^n b_{i,j} > 0$.

- (a) Montrer que B est inversible. On prendra $X \in \text{Ker}(B)$ et on étudiera $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.
- (b) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ à coefficients ≥ 0 . Montrer que $Y = B^{-1}X$ est à coefficients ≥ 0 .
- (c) En déduire que B^{-1} est à coefficients ≥ 0 .

SOLUTION. — Voir RMS 2013 272 ENS PSI.

- (a) Soit $X \in \text{Ker}(B)$ et i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.

La coordonnée numéro i_0 de BX est nulle, soit $b_{i_0, i_0} x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} b_{i_0, j} x_j = 0$, soit $b_{i_0, i_0} x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} b_{i_0, j} x_j$.

Passant à la valeur absolue, et par inégalité triangulaire, $b_{i_0, i_0} |x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} -b_{i_0, j} |x_j| \leq \sum_{j \neq i_0} -b_{i_0, j} |x_{i_0}|$, et donc $\sum_{j=1}^n b_{i_0, j} |x_{i_0}| \leq 0$.

Comme $\sum_{j=1}^n b_{i_0, j} > 0$, il vient $|x_{i_0}| \leq 0$ et donc $|x_{i_0}| = 0 = \max_i |x_i|$, soit $X = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(B) = \{0\}$, ce qui prouve que B est inversible.

- (b) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs et y_1, \dots, y_n les coefficients de $Y = B^{-1}X$.

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que y_i est minimal. $BY = X$ est à coefficients positifs, en particulier en position i , ce qui donne

$$0 \leq b_{i,i} y_i + \sum_{j \neq i} b_{i,j} y_j \leq b_{i,i} y_i + \sum_{j \neq i} b_{i,j} y_i = y_i \sum_{j=1}^n b_{i,j}$$

Et donc $y_i \geq 0$, ce qui prouve que tous les coefficients de Y sont positifs.

- (c) En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en notant E_j le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, à coefficients positifs donc, on a $B^{-1}E_j$ à coefficients positifs.

Or $B^{-1}E_j$ est la j -ème colonne de B^{-1} , autrement dit toutes les colonnes de B^{-1} sont à coefficients positifs, donc B^{-1} est à coefficients positifs.

212. RMS 2025 867 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Trouver l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de dimension d .

SOLUTION. — RMS 2020 388 X ESPCI PC

Montrons par récurrence descendante sur $j \in \{1, \dots, d\}$ la propriété (\mathcal{P}_j) : « Tout sous-espace de dimension j est stable par u ».

Initialisation. La propriété (\mathcal{P}_d) est vraie par hypothèse.

Hérédité. Supposons que (\mathcal{P}_j) est vraie pour un certain $j \in \{2, \dots, d\}$ et montrons (\mathcal{P}_{j-1}) . Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $j-1$ muni d'une base (e_1, \dots, e_{j-1}) , complétée en une base $e = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$ de E . Comme $j+1 \leq n$, on a deux vecteurs (au moins) de e qui ne sont pas dans F . Les sous-espaces vectoriels $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j)$ et $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1})$ étant de dimension j , ils sont stables par u , et comme $F = G \cap H$, le sous-espace F est aussi stable par u .

La propriété (\mathcal{P}_1) dit alors que toute droite est stable par u .

Or tout endomorphisme stabilisant les droites est une homothétie (classique).

Conclusion : ce sont les homothéties.

213. RMS 2025 868 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

SOLUTION. — RMS 2018 887 Mines Ponts PC, RMS 2019 817 Mines Ponts PC

On propose trois démarches.

- Une preuve par récurrence sur n . Si $n = 1$ alors $A = (a)$ et $B = (0)$ puis $A + B = A$ donc $\det(A + B) = \det(a)$.
Soit $n \geq 2$ tel que le résultat est vrai pour l'entier $n - 1$. Montrons qu'il est encore vrai pour des matrices de format $n \times n$. On reprend alors les notations et hypothèses de l'énoncé.

Soient f et g canoniquement associés à A et B respectivement. χ_f est scindé (le corps de base est \mathbb{C}) donc f possède une valeur propre et comme f et g commutent, $E(f, \lambda)$ est stable par g . L'endomorphisme induit possède aussi une valeur propre et donc il y a dans $E(f, \lambda)$ un vecteur propre e'_1 pour g qui l'est, aussi pour f . En complétant ce vecteur en une base e' de \mathbb{C}^n et en notant P la matrice de passage de la base canonique e à e' on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A', B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

On retrouve aisément les propriétés : $A'B' = B'A'$ et B' nilpotente et $\mu = 0$. L'hypothèse de récurrence donne alors $\det(A' + B') = \det(A')$ et enfin

$$\det(A + B) = \det [P^{-1}(A + B)P] = \det \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' + B' \end{pmatrix} = \lambda \det(A' + B') = \lambda \det(A') = \det A.$$

- Une preuve par cotrigonalisation. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de matrices par blocs la propriété :
(\mathcal{P}_n) : deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent sont simultanément trigonalisables.

Appliqué à A et B , ce résultat donne $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puisque B étant nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Alors

$$P^{-1}(A + B)P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & *' & \cdots & *' \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & *' \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(A + B) = \det[P^{-1}(A + B)P] = \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det A$.

- Une preuve par densité.
 - Si on suppose que A est inversible, $\det(A + B) = \det A \times \det(A^{-1}B + I_n)$ et comme $A^{-1}B$ est encore nilpotente (A^{-1} et B commutent), $A^{-1}B$ est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) à une matrice triangulaire de diagonale nulle, donc $\det(A^{-1}B + I_n) = 1$ puis $\det(A + B) = \det A$.
 - Si A n'est pas inversible alors $A_k = A + \frac{1}{k}I_n$ l'est pour n assez grand (classique), et commute avec B donc $\forall k \geq k_0, \det(A_k + B) = \det A_k$. La continuité du déterminant donne le résultat.

214. RMS 2025 869 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer qu'il existe d tel que $A^3 + dA = 0$.
- Déterminer d . Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer A^{2n} en fonction de d, n et A^2 .
- Déterminer α et β tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$.

(a) On reconnaît dans A la matrice (dans la base canonique) de l'application

$$f: x \mapsto u \wedge x,$$

avec $u = (a, b, c)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $f^2(x) = u \wedge (u \wedge x) = \langle u | x \rangle u - \langle u | u \rangle x$ donc $f^3(x) = u \wedge (\langle u | x \rangle u - \langle u | u \rangle x) = -\|u\|^2 u \wedge x = -(a^2 + b^2 + c^2)f(x)$. Autrement dit $f^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)f$, et matriciellement

$$A^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)A.$$

D'où le résultat voulu avec $\theta = a^2 + b^2 + c^2$. (On peut bien entendu aussi calculer A^3 à la main...)

(b) Multipliant par A l'égalité précédente, il vient $A^4 = -\theta A^2$. Une récurrence élémentaire donne

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2n} &= (-\theta)^{n-1} A^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{2n+1} &= (-\theta)^n A. \end{aligned}$$

(c) On rappelle qu'en dimension 3 on a $\|MN\|_\infty \leq 3\|M\|_\infty\|N\|_\infty$ pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En particulier, une récurrence élémentaire donne $\|A^k\|_\infty \leq 3^{k-1}\|A\|_\infty^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Or, pour tout $i, j \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on a $[S_n]_{i,j} = \sum_{k=0}^n \frac{[A^k]_{i,j}}{k!}$, n -ième somme partielle de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{[A^k]_{i,j}}{k!}$. Et pour tout $k \geq 1$, on a $|\frac{[A^k]_{i,j}}{k!}| \leq \frac{\|A^k\|_\infty}{k!} \leq \frac{3^{k-1}\|A\|_\infty^k}{k!}$, terme général d'une série numérique convergente (de somme $\frac{e^{3\|A\|_\infty}}{3}$) donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum_{k \geq 0} \frac{[A^k]_{i,j}}{k!}$ converge absolument, donc converge.

Ceci prouve que la suite de terme général $[S_n]_{i,j}$ converge, autrement dit que (S_n) converge (coordonnée par coordonnée).

N.B. On peut aussi utiliser une norme d'algèbre, *i.e.* vérifiant $\|MN\| \leq \|M\|\|N\|$.

En particulier

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \sum_{k=1}^n \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^n \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-\theta)^{k-1}}{(2k)!} A^2 + \sum_{k=0}^n \frac{(-\theta)^k}{(2k+1)!} A \right)$$

Et l'on peut calculer les sommes des deux séries numériques. Comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-\theta)^k}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sqrt{\theta}^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} \\ \sum_{k=1}^n \frac{(-\theta)^{k-1}}{(2k)!} &= -\frac{1}{\theta} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-\theta)^k}{(2k)!} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\cos \sqrt{\theta} - 1}{\theta} = \frac{1 - \cos \sqrt{\theta}}{\theta}, \end{aligned}$$

il vient

$$S_\infty = I_3 + \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} A + \frac{1 - \cos \sqrt{\theta}}{\theta} A^2$$

N.B. On a $\theta = \|u\|^2$ et on pose $v = \frac{u}{\|u\|}$. L'endomorphisme associé $\text{id} + \alpha f + \beta f^2$ est donc

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + \frac{\sin \|u\|}{\|u\|} u \wedge x + \frac{1 - \cos \|u\|}{\|u\|^2} (\langle x | u \rangle u - \|u\|^2 x) = \cos \|u\| x + (1 - \cos \|u\|) \langle x | v \rangle v + (\sin \|u\|) v \wedge x.$$

C'est la rotation d'axe dirigé par $v = \frac{u}{\|u\|}$ et d'angle $\|u\|$.

215. RMS 2025 870 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer une matrice semblable à A , diagonale ou triangulaire.
- (b) Expliciter $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$.
- (c) Soit f_A l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 canoniquement associé à A . Quels sont les sous-espaces vectoriels f_A -stables de \mathbb{C}^3 ?
- (d) Peut-on retrouver C_A par des arguments de stabilité?

SOLUTION. —

- (a) Notons que $A = JJ^\top$, où J est la matrice colonne $J = (1 \ j \ j^2)^\top$. A est donc de rang 1, et $A^2 = JJ^\top JJ^\top = 0$ puisque $J^\top J = 0$. Ainsi A est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.

$U = (1 \ 1 \ 1)^\top$ est élément de $\text{Ker}(A)$ tout comme J et (J, U) est libre, donc forme une base de $\text{Ker}(A)$. Enfin $E_1 = (1 \ 0 \ 0)^\top \notin \text{Ker}(A)$ donc (E_1, J, U) est libre, et donc forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

L'endomorphisme canoniquement associé à A admet dans cette base pour matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, semblable à A .

- (b) Si P est la matrice de passage de la base canonique vers la base (E_1, J, U) , de sorte que $A = PA'P^{-1}$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $AM = MA$ si et seulement si $A'N = NA'$, où $N = P^{-1}MP$.

Posant les deux produits, on obtient que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ commute avec A' si et seulement si $b = c = h = 0$ et $a = e$.

Ainsi C_A est l'ensemble des matrices de la forme $P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $a, d, f, g, i \in \mathbb{C}$.

- (c) $\{0\}$ et \mathbb{C}^3 sont bien sûr stables.

Les droites stables sont les droites engendrées par un vecteur propre, or ici $\text{Sp}(f_A) = \{0\}$, les droites stables sont donc les droites incluses dans le noyau $\text{Vect}(U, J)$ de f_A .

Enfin $\text{Ker}(f_A) = \text{Vect}(U, J)$ est un plan stable. Un autre plan stable contient nécessairement un vecteur X hors de $\text{Ker}(f_A)$, et $f_A(X) = AX$ multiple non nul de J car $\text{Im}(f_A) = \text{Vect}(J)$. Réciproquement, tout plan de la forme $\text{Vect}(X, J)$ avec X non colinéaire à J contient $\text{Im}(f_A)$ donc est stable par f_A .

- (d) Si $M \in C_A$ est si g est l'endomorphisme canoniquement associé, alors $\text{Ker}(f_A) = \text{Vect}(U, J)$ et $\text{Im}(f_A) = \text{Vect}(J)$

sont stables par g , ce qui donne pour g une matrice dans la base (E_1, J, U) de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$. Il reste tout

de même à prouver que $a = e$.

Pour cela, il suffit d'exploiter la relation $g \circ f_A(E_1) = f_A \circ g(E_1)$ qui donne $eJ = aJ$ donc $e = a$.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, alors $g \circ f_A(E_1) = f_A \circ g(E_1) = aJ$, $g \circ f_A(J) = f_A \circ g(J) = 0$ et $g \circ f_A(U) = f_A \circ g(U) = 0$ donc $g \circ f_A = f_A \circ g$ et $MA = AM$.

216. RMS 2025 871 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soit $k \in \mathbb{C}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de k .

SOLUTION. —

Bien sûr si k est réel, alors A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

A est de rang 2 donc $\dim \text{Ker}(A) = 4 - 2 = 2$

Notons (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. $E_1 - E_3$ et $E_1 - E_4$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Ker}(A)$ donc en forment une base.

E_2 et $E_1 + E_3 + E_4$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}(A)$ donc en forment une base. Et $AE_2 = kE_2 + (E_1 + E_3 + E_4)$, $A(E_1 + E_3 + E_4) = 3E_2$.

La famille $(E_1 - E_3, E_1 - E_4, E_2, E_1 + E_3 + E_4)$ est libre (de déterminant non nul) donc forme une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$, dans

laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à a est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, semblable à A .

Donc A est diagonalisable si et seulement si A' l'est, soit $B = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est (une matrice diagonale par blocs est diagonalisable si et seulement si ses blocs diagonaux le sont).

Or $\chi_B = X^2 - kX - 3$, de discriminant $\Delta = k^2 + 12$.

Ainsi, si $k^2 + 12 \neq 0$, χ_B est scindé à racines simples donc B est diagonalisable et A aussi. Si $k^2 + 12 = 0$, B a une seule valeur propre et n'est pas scalaire donc ne peut être diagonalisable, et A non plus.

217. RMS 2025 872 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

SOLUTION. —

Si f est diagonalisable, alors $\text{Im}(f) = \bigoplus_{\lambda \neq 0} E_\lambda(f)$, et $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f) = E_0(f) \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} E_\lambda(f) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

$\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires donc en somme directe.

Réciproquement, supposons $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en somme directe, donc supplémentaires grâce au théorème du rang.

Grâce au théorème d'isomorphisme, f induit alors un automorphisme g de $\text{Im}(f)$.

f^2 est diagonalisable, soit $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ un polynôme annulateur de f^2 scindé à racines simples. Notons qu'au plus un des λ_i est nul.

- Si 0 n'est pas racine de P alors $P(X^2) = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$ en notant, pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, α_i une racine carrée complexe de λ_i .

$P(X^2)$ est donc scindé à racines simples, annulateur de f donc f est diagonalisable.

- Si 0 est racine de P , on peut supposer $\lambda_1 = 0$ quitte à renuméroter. Alors $P(X^2) = X^2 \prod_{i=2}^p (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$ en notant, pour $i \in \llbracket 2; p \rrbracket$, α_i une racine carrée complexe de λ_i . Soit $Q = \prod_{i=2}^p (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$.

$P(X^2)$ est annulateur de f^2 donc de g^2 , autrement dit $g^2 \circ Q(g) = 0$. Comme g est un automorphisme, on peut composer par g^{-1} (deux fois) pour obtenir $Q(g) = 0$.

Q est scindé à racines simples donc g est diagonalisable, autrement dit $\text{Im}(f)$ possède une base constituée de vecteurs propres de f . C'est aussi trivialement le cas de $\text{Ker}(f)$. Comme $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires, on obtient en concaténant une base de \mathbb{C}^n formée de vecteurs propres de f , autrement dit f est diagonalisable.

218. RMS 2025 873 Mines Ponts PSI énoncé p. 34

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit diagonalisable et $\text{Sp}(A^2) \subset]0, +\infty[$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & \dots & b & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \dots & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

SOLUTION. —

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit diagonalisable et $\text{Sp}(A^2) \subset]0, +\infty[$. Notons $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de A^2 , strictement positives.

Le polynôme $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ est alors annulateur de A^2 donc $P(X^2) = \prod_{i=1}^p (X - \sqrt{\lambda_i})(X + \sqrt{\lambda_i})$ est annulateur de A , scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

(b) Notant J_n la matrice Attila de taille n , on a $A = bJ_n + (a - b)I_n$.

Or $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$, donc $A = P \text{diag}(a + (n - 1)b, a - b, \dots, a - b) P$

De même, en notant U la matrice $\begin{pmatrix} (0) & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & (0) \end{pmatrix}$, on a $B = bJ_n + (a - b)U$.

$U^2 = I_n$ est diagonalisable à valeurs propres strictement positives donc U est diagonalisable. U commute avec J_n et donc $B^2 = b^2 J_n^2 + 2b(a - b)J_n U + (a - b)^2 U^2 = b^2 J_n^2 + 2b(a - b)J_n + (a - b)^2 I_n = A^2$ est diagonalisable, à valeurs propres $(a + (n - 1)b)^2$ et $(a - b)^2$ positives, strictement sauf si $a = b$ (auquel cas B est trivialement diagonalisable) ou $a = -(n - 1)b$. Si $a \neq -(n - 1)b$, la première question assure que B est diagonalisable.

Précisément, si n est pair, une base de vecteurs propres de U est $(E_1 + E_n, E_1 - E_n, E_2 + E_{n-1}, E_2 - E_{n-1}, \dots, E_{n/2} + E_{n/2+1}, E_{n/2} - E_{n/2+1})$, associés aux valeurs propres $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1$. (Ici E_1, \dots, E_n désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

On obtient une base de vecteurs propres de B en considérant les vecteurs

- $E_1 + \dots + E_n$ qui est dans $E_n(J_n) \cap E_1(U) \subset E_{a+(n-1)b}(B)$.
- $E_1 + E_n - E_2 - E_{n-1}, E_1 + E_n - E_3 - E_{n-2}, \dots, E_1 + E_n - E_{n/2} - E_{n/2+1}$, qui sont dans $E_0(J_n) \cap E_1(U) \subset E_{a-b}(B)$.
- $E_1 - E_n, E_2 - E_{n-1}, \dots, E_{n/2} - E_{n/2+1}$ qui sont dans $E_0(J_n) \cap E_{-1}(U) \subset E_{b-a}(B)$.

On a trouvé n vecteurs propres linéairement indépendants, donc B est diagonalisable, de valeurs propres $a + (n - 1)b$ (multiplicité 1), $a - b$ (multiplicité $n/2 - 1$) et $b - a$ (multiplicité $n/2$).

Le cas n impair se traite de la même façon en remplaçant le dernier vecteur propre associé à la valeur propre $a - b$ par $E_1 + E_n - 2E_{(n+1)/2}$.

219. RMS 2025 874 Mines Ponts PSI énoncé p. 35

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est un projecteur. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que f soit diagonalisable.

SOLUTION. —

Si f est diagonalisable, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ donc par le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Ker}(f^2)$, et comme $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$, il vient $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Réciproquement, supposons $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$, et donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ via le théorème du rang, donc $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ puisque $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

f^2 est un projecteur donc $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. Le théorème d'isomorphisme assure que f induit un automorphisme g de $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Et comme f^2 est un projecteur, on a $\forall x \in \text{Im}(f^2), f^2(x) = x = g^2(x)$. Donc $g^2 = \text{id}$, si bien que g est une symétrie, diagonalisable donc.

Finalement, $\text{Im}(f)$ possède une base de vecteurs propres de g donc de f . On la concatène avec une base de $\text{Ker}(f)$ et l'on obtient une base de E formée de vecteurs propres de f , donc f est diagonalisable.

220. RMS 2025 875 Mines Ponts PSI énoncé p. 35

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto (X - a)P'$.

- Montrer que u est linéaire.
- Trouver les valeurs propres de u .
- Trouver les P dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

SOLUTION. — RMS 2014 1198 TPE PSI

(a) Soit λ une valeur propre et P vecteur propre associé, on note $n = \deg P : P = \alpha_n X^n + \dots$ avec $\alpha_n \neq 0$.
 $(X - a)P' = nP \iff n\alpha_n X^n + \dots = \lambda\alpha_n X^n + \dots$ ce qui implique que $\lambda = n$. On en déduit que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{N}$.
Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $u((X - a)^n) = n(X - a)^n$ donc $(X - a)^n$ est propre pour la valeur propre n . Or on sait que $((X - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, on a donc une base constituée de vecteurs propres de u .

On en déduit que $\text{Sp}(u) = \mathbb{N}$ et que $\text{Ker}(u - n \text{id}) = \text{Vect}((X - a)^n)$.

(b) On complète ce qui précède : une cl de ces vecteurs propres est un vecteur propre \iff cette cl est elle-même un vecteur propre.

Soit P divisible par P' , $n = \deg P$. Le quotient s'écrit $Q = \frac{1}{n}(X - a)$. On utilise alors (a) : $u(P) = (X - a)P' = nQP' = nP$ donc $P \in \text{Ker}(u - n \text{id}) = \text{Vect}((X - a)^n)$.

Les polynômes divisibles par leur dérivé sont donc les $\lambda(X - a)^n$ où $\lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$.

221. RMS 2025 876 Mines Ponts PSI énoncé p. 35

Soient $E = \mathbb{C}_n[X], \alpha \in \mathbb{C}$ et $f : P \in E \mapsto P - \alpha(X - \alpha)P'$.

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et donner sa matrice dans la base canonique.

(b) i. Montrer que f est diagonalisable.
ii. À quelle condition sur α , l'endomorphisme f est-il inversible ?

(c) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N} : E = \text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k)$.

SOLUTION. —

(a) La linéarité de f découle de la linéarité de la dérivation. Et pour tout $P \in E$, $f(P)$ est bien sûr un polynôme et $\deg(P) \leq n, \deg(X - \alpha)P' \leq n$ donc $\deg f(P) \leq n$, si bien que $f(P) \in E$. Donc $f \in \mathcal{L}(E)$.

$f(1) = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(X^k) = (1 - \alpha k)X^k + \alpha^2 k X^{k-1}$, d'où la matrice de f dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 2\alpha^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n\alpha^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 - n\alpha \end{pmatrix}$$

(b) i. La matrice de f est triangulaire, on lit donc les valeurs propres de f sur sa diagonale. Si $\alpha \neq 0$, f admet $n + 1$ valeurs propres distinctes $1, 1 - \alpha, \dots, 1 - n\alpha$ et $\dim E = n + 1$ donc f est diagonalisable. Si $\alpha = 0$, $f = \text{id}$ est diagonalisable.

ii. $\det(f) = \prod_{k=0}^n (1 - k\alpha)$ donc f est inversible si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, 1 - k\alpha \neq 0$ soit $\alpha \notin \{1/k, k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$.

(c) f est diagonalisable donc pour tout $k \in \mathbb{N}, f^k$ l'est aussi, et donc $E = \text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k)$.

222. RMS 2025 877 Mines Ponts PSI énoncé p. 35

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}(A) = 2, \text{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

SOLUTION. — RMS 2008 973 CCP PSI, RMS 2014 1196 TPE PSI, RMS 2017 803 Mines Ponts PC, RMS 2018 1314 TPE PSI

Comme $\text{rg}(A) = 2$, zéro est valeur propre de A d'ordre au moins $n - 2$, le sous-espace propre correspondant (le noyau) étant de dimension $n - 2$ d'après la formule du rang.

Il reste (au plus) deux (autres) valeurs propres à découvrir, notées λ et μ . Pour cela, on utilise la trace : $\text{tr} A = (n - 2)0 + \lambda + \mu = 0$ par hypothèse. On en déduit que les deux dernières valeurs propres sont opposées.

Si elles étaient nulles, alors zéro serait la seule valeur propre de A : comme A est trigonalisable sur \mathbb{C} , elle serait semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc serait nilpotente d'ordre au plus n selon un calcul bien connu, donc A^n serait nulle, ce qui n'est pas le cas. On peut aussi invoquer le théorème de Cayley-Hamilton pour dire que $\text{Sp}(A) = \{0\}$ implique $\chi_A = X^n$, donc $A^n = 0$.

Par suite, A possède, outre zéro, deux valeurs propres non nulles et opposées, donc distinctes. Elles sont donc simples,

puisque zéro est déjà d'ordre au moins $n - 2$. Par suite, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut $n - 2 + 1 + 1 = n$, donc A est diagonalisable.

223. RMS 2025 878 Mines Ponts PSI énoncé p. 35

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Donner le spectre de A et ses espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT = TM$. Quelle est sa structure ? sa dimension ?

(d) Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

SOLUTION. —

(a) Un calcul sans piège donne $\chi_A = X(X - 1)^2$ donc $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

$C_2 - 2C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) = E_0(A)$. Comme 0 est valeur propre simple, $E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Et $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1, contient $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc

$E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1$ donc A n'est pas diagonalisable.

(b) $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifie $AU_1 = 0$, et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $AU_2 = U_2$.

Reste à trouver $U_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AU_3 = -3U_1 + 4U_2 + U_3$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On obtient le

système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \end{cases}$, soit de manière équivalente $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. La famille (U_1, U_2, U_3) est une base (son déterminant vaut 1) et par construction, l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice T dans la base (U_1, U_2, U_3) . Donc A est semblable à T , de la forme PTP^{-1} avec $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$MT = TM$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & b & -3a + 4b + c \\ 0 & e & -3d + 4e + f \\ 0 & h & -3g + 4h + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3g & -3h & -3i \\ d + 4g & e + 4h & f + 4i \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

L'égalité des premières colonnes donne $d = g = 0$. Les deuxièmes colonnes donnent $b = h = 0$. Enfin les troisièmes colonnes donnent $i = e$ et $c = 3a - 3e$.

Le commutant C_T de T est donc l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 3a - 3e \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, avec $a, e, f \in \mathbb{R}$. C'est donc

un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de dimension 3.

(d) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$.

$MA = AM$ si et seulement si $MPTP^{-1} = PTP^{-1}M$ soit $P^{-1}MPT = TP^{-1}MP$ ou encore $NT = TN$.

Le commutant C_A de A s'écrit donc $\{PNP^{-1}, N \in C_T\}$. Comme $N \mapsto PNP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de dimension 3.

224. RMS 2025 879 Mines Ponts PSI énoncé p. 35

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -14 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X+1)^2(X+2)Q_n(X) + \alpha_n(X+2) + \beta_n(X+1)(X+2) + \gamma_n(X+1)^2$.

(c) Déterminer A^n .

SOLUTION. —

(a) Un calcul sans piège donne $\chi_A = (X+1)^2(X+2)$ donc $\text{Sp}(A) = \{-1, -2\}$.

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -14 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc par le théorème du rang $\dim E_{-1}(A) = 1 < 2 = m_{-1}$, donc A n'est pas diagonalisable.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de division euclidienne assure qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ tel que $X^n = \chi_A Q_n + R_n$.

La famille $(X+2, (X+1)(X+2), (X+1)^2)$ est libre (si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha(X+2) + \beta(X+1)(X+2) + \gamma(X+1)^2 = 0$ alors en évaluant en -1 il vient $\alpha = 0$, en évaluant en -2 il vient $\gamma = 0$, et donc $\beta = 0$), et de cardinal 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Le polynôme R_n s'écrit donc de manière unique $R_n = \alpha_n(X+2) + \beta_n(X+1)(X+2) + \gamma_n(X+1)^2$, et donc $X^n = (X+1)^2(X+2)Q_n(X) + \alpha_n(X+2) + \beta_n(X+1)(X+2) + \gamma_n(X+1)^2$, avec $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ uniques.

Précisément la relation évaluée en -2 donne $\gamma_n = (-2)^n$, évaluée en -1 elle donne $(-1)^n = \alpha_n$, enfin en dérivant puis en évaluant en -1 on obtient $n(-1)^{n-1} = \alpha_n + \beta_n$ donc $\beta_n = (n+1)(-1)^{n-1}$.

(c) Il suffit d'évaluer en A la relation $X^n = (X+1)^2(X+2)Q_n(X) + (-1)^n(X+2) + (n+1)(-1)^{n-1}(X+1)(X+2) + (-2)^n(X+1)^2$ pour obtenir, comme $\chi_A(A) = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = (-1)^n(A+2I_3) + (n+1)(-1)^{n-1}(A+I_3)(A+2I_3) + (-2)^n(A+I_3)^2$.

Le calcul explicite de tout ceci est laissé aux lectrices et lecteurs scrupuleuses/eux.

225. RMS 2025 880 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soit u l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C}, u(P)(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

(b) Trouver les valeurs propres de u .

SOLUTION. —

(a) D'abord u est bien définie. En effet pour tout polynôme P , la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$ est de rayon de convergence infini (pour tout $r \geq 0$, on a par croissances comparées $P(n)2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{2^n r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc en faisant le produit $\frac{P(n)r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et donc $\left(\frac{P(n)r^n}{n!}\right)$ est bornée).

La linéarité de u ne pose pas de problème, reste à justifier que u est bien à valeur dans $\mathbb{C}[X]$.

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, H_k le polynôme $X(X-1)\dots(X-k+1)$. ($H_0 = 1, H_1 = X$ en particulier).

Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_k(n)}{n!} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{n+k} = e^z z^k$ donc $u(H_k)(z) = z^k$. Et donc $u(H_k) = X_k \in \mathbb{C}[X]$.

Comme $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{C}[X]$ (c'est une famille étagée en degré), par linéarité u envoie tout polynôme sur un polynôme.

- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u et P un vecteur propre associé. Notons $p = \deg(P)$, de sorte que P s'écrit $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k H_k$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{C}$ et $\alpha_p \in \mathbb{C}^*$ ((H_0, \dots, H_p) est une base de $\mathbb{C}_p[X]$, et $\alpha_p \neq 0$ sinon $\deg(P) < p$).

Alors $u(P) = \sum_{k=0}^p \alpha_k u(H_k) = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$, et $\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda \alpha_k H_k$.

L'égalité $u(P) = \lambda P$ entraîne l'égalité des coefficients dominants, donc $\lambda \alpha_p = \alpha_p$ et donc $\lambda = 1$.

Ainsi 1 est l'unique valeur propre possible, et 1 est bien valeur propre puisque par exemple $u(1) = u(H_0) = 1$ (et $u(X) = u(H_1) = X$).

226. RMS 2025 881 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $M^n = I_2$. Prouver que $M^{12} = I_2$. Ind. Montrer que M est \mathbb{C} -diagonalisable et considérer sa trace.

SOLUTION. — RMS 2023 690 Mines-Ponts PSI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = I_2$. Le polynôme $P = X^n - 1$ est annulateur de M , scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont des racines n -èmes de l'unité.

De plus M est réelle, donc si elle admet une valeur propre non réelle λ alors elle admet aussi $\bar{\lambda}$ pour valeur propre.

Les seules racines de l'unité réelles possibles sont 1 et -1 , donc soit M est semblable à une matrice de la forme $D = \text{diag}(\pm 1, \pm 1)$, auquel cas M^2 est semblable à $D^2 = I_2$ donc $M^2 = I_2$ et donc $M^{12} = I_2$, soit M est semblable à une matrice de la forme $D = \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$, avec λ une racine de l'unité non réelle.

Dans ce cas, on a $\text{tr}(M) = \text{tr}(D) = \lambda + \bar{\lambda} = 2\Re(\lambda) \in]-2; 2[$. Comme $\text{tr}(M)$ est un entier, il reste trois possibilités :

- Si $\text{tr}(M) = -1 = 2\Re(\lambda)$, alors $\lambda = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$ et donc $\{\lambda, \bar{\lambda}\} = \left\{ e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right\}$.

Dans ce cas M^3 est semblable à $D^3 = I_2$ donc $M^3 = I_2$ donc $M^{12} = I_2$.

- Si $\text{tr}(M) = 0 = 2\Re(\lambda)$, alors $\lambda = \pm i$ et donc $\{\lambda, \bar{\lambda}\} = \{i, -i\}$.

Dans ce cas M^4 est semblable à $D^4 = I_2$ donc $M^4 = I_2$ donc $M^{12} = I_2$.

- Si $\text{tr}(M) = 1 = 2\Re(\lambda)$, alors $\lambda = e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$ et donc $\{\lambda, \bar{\lambda}\} = \left\{ e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}$.

Dans ce cas M^6 est semblable à $D^6 = I_2$ donc $M^6 = I_2$ donc $M^{12} = I_2$.

227. RMS 2025 882 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

- On suppose $f^{n-1} \neq 0$ et f nilpotent. Montrer que f est cyclique.
- On suppose que f admet n valeurs propres distinctes. Montrer que f est cyclique.
- On suppose f diagonalisable. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit cyclique.

SOLUTION. — RMS 2019 1014 Centrale PSI

- Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Si les λ_k sont non tous nuls, on note $p = \min\{k, \lambda_k \neq 0\}$ et en composant par u^{n-1-p} , la somme devient $a_p u^{n-1}(x) = 0_E$ ce qui n'est pas possible donc la famille est libre et x est un vecteur cyclique.

- (b) On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres de u et (e_1, \dots, e_n) une base de vecteurs propres. Pour $x = \sum_{k=1}^n e_k$, on a $\forall p \in \mathbb{N}, u^p(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^p e_k$ donc le déterminant de $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ dans la base (e_1, \dots, e_n) est le déterminant de VANDERMONDE $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, qui est non nul car les α_k sont deux à deux distincts.
- (c) Réciproquement, on suppose u diagonalisable et qu'il existe un vecteur x cyclique pour u . La matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une matrice compagnon dont on sait que les sous-espaces propres sont des droites (les $n-1$ premières colonnes de $A - \lambda I_n$ sont échelonnées, donc $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) \leq 1$). Puisque u est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites, les valeurs propres de u sont deux à deux distinctes.

228. RMS 2025 883 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E . Soient $E = \text{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la dérivation. Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable.

SOLUTION. —

D'abord, E est de dimension 3 car la famille $(1, \cos, \sin)$ est libre. En effet si α, β, γ sont tels que $\alpha 1 + \beta \cos + \gamma \sin = 0$, alors en dérivant $-\beta \sin + \gamma \cos = 0$, ce qui évalué en 0 donne $\gamma = 0$, et évalué en $\pi/2$ donne $\beta = 0$. Reste $\alpha 1 = 0$ donc $\alpha = 0$. Le vecteur $x_0 = 1 + \cos + \sin$ fonctionne. En effet $u(x_0) = -\sin + \cos$ et $u^2(x_0) = -\cos - \sin$, donc

$$\det_{(1, \cos, \sin)} (x_0, u(x_0), u^2(x_0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Autrement dit $(x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ est une base de E donc u est cyclique.

Enfin $u^3(x_0) = \sin - \cos = -u(x_0)$, la matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\chi_u = X(X^2 + 1)$. Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc u ne peut être diagonalisable.

229. RMS 2025 884 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

SOLUTION. — RMS 2016 902 TPE PSI, RMS 2017 1260 TPE PSI, RMS 2019 716 Mines Ponts PSI, RMS 2019 1158 ENSAM PSI

Comme $A(A^2 - I) = (A^2 - I)A = I$, la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = A^2 - I$.

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $\lambda^3 = \lambda + 1$; on étudie la fonction $f(t) = t^3 - t - 1$, croissante sur $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, de plus

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}-9}{9} < 0.$$

Alors f admet une seule racine réelle, elle se trouve sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ (notons-la α) et deux racines complexes conjuguées non réelles β et $\bar{\beta}$.

Le polynôme caractéristique de A est de la forme $(X - \alpha)^m(X - \beta)^p(X - \bar{\beta})^p$ (β et $\bar{\beta}$ ont la même multiplicité car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et donc le déterminant étant le produit des valeurs propres,

$$\det A = \alpha^m \beta^p \bar{\beta}^p = \alpha^m |\beta|^{2p} > 0.$$

230. RMS 2025 885 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B .

- (a) Montrer que $B^2 = B$.
- (b) On suppose désormais que A est diagonalisable avec p valeurs propres. En considérant une division euclidienne, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.
- (c) Décrire B à l'aide des éléments propres de A .

SOLUTION. —

(a) Par hypothèse $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$.

L'application $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto MN$ est bilinéaire, définie sur des espaces de dimension finie, donc continue. Donc $A^{2k} = A^k \times A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B^2$.

Or (A^{2k}) est une suite extraite de (A^k) donc converge vers la même limite B . Par unicité de la limite $B^2 = B$.

(b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A , et $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$, polynôme annulateur de A .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par P s'écrit $X^k = PQ_k + R_k$ avec $R_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Évalué en A , cette égalité devient $A^k = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A)$, donc $A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

N.B. $\mathbb{R}_{p-1}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc $\mathbb{R}_{p-1}[A]$ est fermé et donc $B \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

(c) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Or $A^k X \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} BX$ par continuité de l'application $M \mapsto MX$ (linéaire, en dimension finie).

Si $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ est tel que la i -ème coordonnée x_i de X est non nulle (un tel i existe car $X \neq 0$), alors en particulier la suite $(\lambda^k x_i)$ converge donc (λ^k) aussi, si bien que $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

- Si $|\lambda| < 1$ alors $\lambda^k X \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc par unicité de la limite $BX = 0$.

Ainsi $\bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda(A) \subset \text{Ker } B$.

- Si $\lambda = 1$ alors $\lambda^k X \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} X$ donc par unicité de la limite $BX = X$.

Donc $E_1(A) \subset E_1(B) = \text{Im } B$ (on rappelle que B est un projecteur).

Enfin A est diagonalisable donc $\bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda(A)$ et $E_1(A)$ sont supplémentaires, et B est un projecteur donc $\text{Ker } B$ et $\text{Im } B$ sont supplémentaires.

Les deux inclusions sont donc des égalités, autrement dit B est le projecteur sur $E_1(A)$ et selon $\bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda(A)$.

231. RMS 2025 886 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

- (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$.
 (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

SOLUTION. —

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Le théorème de d'Alembert-Gauss assure que P possède une racine λ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$.

(b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2, que l'on écrit $Q = aX^2 + bX + c = a(X^2 + \beta X + \gamma)$ avec $\beta = b/a$ et $\gamma = c/a$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$ vérifie $\chi_M = X^2 + \beta X + \gamma$. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\chi_M(M) = 0 = M^2 + \beta M + \gamma I_2$. En multipliant par a , on a bien $Q(M) = 0$.

232. RMS 2025 887 Mines Ponts PSI énoncé p. 36

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang r .

(a) Démontrer le théorème du rang pour les endomorphismes de \mathbb{C}^n .

(b) Montrer qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = PJ_r Q$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. Montrer que A et B possèdent r valeurs propres communes en tenant compte des multiplicités.
- (d) Que peut-on dire dans c) quand $r = n$?

SOLUTION. —

- (a) Soit u un endomorphisme de \mathbb{C}^n . Soit G un supplémentaire de $\text{Ker } u$ et $v : x \in G \mapsto u(x)$.
 v est linéaire en tant que restriction de u , injective car $\text{Ker } v = \text{Ker } u \cap G = \{0\}$, à valeur dans $\text{Im } u$.
 Enfin v est surjective, en effet tout vecteur $y \in \text{Im } u$ s'écrit $y = u(x)$, avec $x \in \mathbb{C}^n = G \oplus \text{Ker } u$. Mais alors x s'écrit $x = a + b$ avec $a \in G$ et $b \in \text{Ker } u$, de sorte que $y = u(a) + u(b) = v(a)$.
 Ainsi v est un isomorphisme de G sur $\text{Im } u$ donc $\text{rg } u = \dim G = n - \dim \text{Ker } u$.
- (b) Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à C , de rang r . Soit (e_1, \dots, e_r) une base d'un supplémentaire de $\text{Ker } u$, (e_{r+1}, \dots, e_n) une base de $\text{Ker } u$. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de \mathbb{C}^n .
 D'après l'argument de la question précédente, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$, que l'on complète en une base $\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$ de \mathbb{C}^n .
 Alors $\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$ par construction.
 Enfin si Can désigne la base canonique, on a $C = \text{Mat}_{\text{Can}}(u) = P_{\text{Can}, \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}, \text{Can}} = P J_r Q$ où $P = P_{\text{Can}, \mathcal{C}}, Q = P_{\mathcal{B}, \text{Can}}$ sont deux matrices inversibles.
- (c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ soit $AP J_r Q = P J_r Q B$, ce qui s'écrit aussi $P^{-1} A P J_r = J_r Q B Q^{-1}$.
 Soit $A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ W_1 & Z_1 \end{pmatrix}$ et $B' = Q B Q^{-1} = \begin{pmatrix} U_2 & V_2 \\ W_2 & Z_2 \end{pmatrix}$.
 L'égalité $A' J_r = J_r B'$ devient $\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ W_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 & V_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, $U_1 = U_2 = U, V_1 = 0$ et $W_2 = 0$.
 Donc $A' = \begin{pmatrix} U & 0 \\ W_1 & Z_1 \end{pmatrix}$, de sorte que $\chi_A = \chi_{A'} = \chi_U \chi_{Z_1}$. Et $B' = \begin{pmatrix} U & V_2 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}$ donc $\chi_B = \chi_{B'} = \chi_U \chi_{Z_2}$.
 Les r racines de χ_U (comptées avec multiplicités) sont donc des racines communes de χ_A et χ_B donc des valeurs propres communes de A et B .
- (d) Si $r = n$ alors C est inversible donc $A = C B C^{-1}$ est semblable à B donc a même polynôme caractéristique donc même spectre... (Dans le raisonnement précédent, $J_r = I_n$ donc $A' = B'$).

233. RMS 2025 888 Mines Ponts PSI énoncé p. 37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f_A(M) = AM$.

- (a) Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer $P(f_A)$.
- (b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.
- (c) Trouver le lien entre χ_A et χ_{f_A} .
- (d) Donner le lien entre les éléments propres de A et ceux de f_A . Retrouver le résultat de la question b).

SOLUTION. — RMS 2022 685 Mines-Ponts PSI, RMS 2017 800 Mines Ponts PC

- (a) On constate d'abord que f est linéaire en A (i.e. $f_{\lambda A + \mu B} = \lambda f_A + \mu f_B$) puis, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $f_{A^k} = (f_A)^k$. On en déduit alors que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(f_A) = f_{P(A)}$.
- (b) On constate que $f_A = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$ si, et seulement si, $A = 0_n$ (appliquer f_A à I_n). Alors, d'après le résultat de la question précédente, $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A si, et seulement si, c'est un polynôme annulateur de f_A . Or on sait qu'un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Le résultat s'en déduit.

(c) Soit $\varphi : M = (C_1 \dots, C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{K})$.

φ est clairement un isomorphisme et $\forall M = (C_1 \dots, C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\varphi \circ f_A(M) = \begin{pmatrix} AC_1 \\ \vdots \\ AC_n \end{pmatrix} = \text{diag}(A, \dots, A) \varphi(M)$.

Donc $\varphi \circ f_A \circ \varphi^{-1}$ a pour matrice $\text{diag}(A, \dots, A)$ dans la base canonique. Le polynôme caractéristique de f_A est le même que celui de $\varphi \circ f_A \circ \varphi^{-1}$, soit $\chi_{f_A} = (\chi_A)^n$.

En particulier A et f_A ont donc même spectre.

(d) De plus, en découpant une matrice M en colonnes on voit que l'application

$$\Delta : M = (C_1 \dots C_n) \in E_\lambda(f_A) \mapsto (C_1, \dots, C_n) \in E_\lambda(A)^n$$

est un isomorphisme.

On peut donc en déduire que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad \dim E_\lambda(f_A) = n \dim E_\lambda(A)$$

Si les valeurs propres deux à deux distinctes communes à A et à Φ sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, on a donc $\sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}(\Phi) = n \sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}(A)$ et

$$\Phi \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}(\Phi) = n^2 \iff \sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}(A) = n \iff A \text{ est diagonalisable.}$$

234. RMS 2025 889 Mines Ponts PSI énoncé p. 37

Soit E_N l'ensemble des suites à valeurs complexes N -périodiques.

- (a) Montrer que E_N est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer sa dimension.
Soit $T : E_N \rightarrow E_N$ définie par $\forall u \in E_N, (T(u))_n = u_{n+1}$.
- (b) Montrer que T est un endomorphisme de E_N .
- (c) Déterminer les éléments propres de T de deux façons différentes, en revenant à la définition et matriciellement.
- (d) L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

SOLUTION. —

- (a) E_N est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Soit $\varphi : u \in E_N \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$.
 φ est linéaire, bijective. En effet pour tout $(x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, les conditions $\forall i \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket, u_i = x_i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+N} = u_n$ définissent par récurrence l'unique suite $u \in E_N$ qui vérifie $\varphi(u) = (x_0, \dots, x_{N-1})$.
Ainsi E_N est isomorphe à \mathbb{C}^N donc de dimension N .
- (b) T est clairement linéaire, à valeur dans E_N en effet si $u \in E_N$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1+N} = u_{n+1}$ soit $(T(u))_{n+N} = (T(u))_n$.
- (c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T et u un vecteur propre associé.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, (T(u))_n = \lambda u_n$ soit $u_{n+1} = \lambda u_n$. u est donc géométrique de raison λ donc de la forme $(u_0 \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \neq 0$ puisque u est non nulle.
 u est N -périodique donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \lambda^{n+N} = u_0 \lambda^n$, ce qui équivaut à $\lambda^N = 1$ (condition nécessaire en prenant le cas $n = 0$, clairement suffisante).
Ainsi $\text{Sp}(T) \subset \mathbb{U}_N$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{U}_N$, toute suite $u \in E_N$ est vecteur propre associé si et seulement si elle est géométrique de raison λ , donc $\lambda \in \text{Sp}(T)$ et $E_\lambda(T) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Matriciellement, soit e_0, \dots, e_{N-1} les éléments de E_N images réciproques par φ des éléments de la base canonique de \mathbb{C}^N , qui donc forme une base de E_N .

On a alors $T(e_0) = e_{N-1}, T(e_1) = e_0, \dots, T(e_{N-1}) = e_{N-2}$ donc $\text{Mat}_{(e_0, \dots, e_{N-1})}(T) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Un calcul sans piège donne alors $\chi_T = X^N - 1$ donc $\text{Sp}(T) = \mathbb{U}_N$.

Et pour tout $\lambda \in \mathbb{U}_N$, on a $E_\lambda(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{N-1} \end{pmatrix}^\top$ donc $E_\lambda(T) = \text{Vect} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k e_k$, or $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k e_k$ est par construction l'unique suite $u \in E_N$ telle que $(u_0, \dots, u_{N-1}) = (1, \lambda, \dots, \lambda^{N-1})$, c'est-à-dire la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(d) T admet N valeurs propres distinctes, or E_N est de dimension N , donc T est diagonalisable.

235. RMS 2025 890 Mines Ponts PSI énoncé p. 37

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^3 (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$.

Pour tout $i \in [0, 3]$, on note $L_i(t) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq 3 \\ k \neq i}} \frac{t-k}{i-k}$.

- (a) Calculer $L_i(j)$ pour tous $i, j \in [0, 3]$. En déduire que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E .
- (b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
- (c) Trouver une base orthonormée de E .

SOLUTION. —

(a) Soit $i \neq j \in [0; 3]$. $L_i(j) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq 3 \\ k \neq i}} \frac{j-k}{i-k} = 0$ (l'un des termes du produit est nul), et $L_i(i) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq 3 \\ k \neq i}} \frac{i-k}{i-k} = 1$ (tous les termes du produit valent 1). Autrement dit $L_i(j) = \delta_{i,j}$.

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ tels que $\sum_{i=0}^3 \alpha_i L_i = 0$. Évalué en $j \in [0; 3]$, il vient $\sum_{i=0}^3 \alpha_i \delta_{i,j} = 0 = \alpha_j$. Donc la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) est libre et de cardinal 4 donc est une base de E .

(b) Φ est clairement bilinéaire, symétrique et positive.

Soit enfin $P \in E$ tel que $\Phi(P, P) = 0 = \sum_{k=0}^3 (P(k) + P(1))^2$. Une somme de réels positifs est nul si et seulement si tous sont nuls donc $\forall k \in [0; 3], (P(k) + P(1))^2 = 0 = P(k) + P(1)$.

En particulier $2P(1) = 0$ donc $P(1) = 0$ et donc $\forall k \in [0; 3], P(k) = 0$. P admet donc 4 racines distinctes et $\deg(P) \leq 3$ donc P est le polynôme nul.

Ceci achève de prouver que Φ est un produit scalaire sur E .

(c) (L_0, L_2, L_3) est orthonormée, en effet pour $i, j \in \{0, 2, 3\}$ on a $\Phi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^3 (L_i(k) + L_i(1))(L_j(k) + L_j(1)) = \sum_{k=0}^3 L_i(k)L_j(k) = \sum_{k=0}^3 \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}$.

Il suffit donc pour conclure d'orthonormaliser (L_0, L_2, L_3, L_1) en (L_0, L_2, L_3, P_1) , avec

$$P_1 = \frac{L_1 - \Phi(L_1, L_0)L_0 - \Phi(L_1, L_2)L_2 - \Phi(L_1, L_3)L_3}{\|L_1 - \Phi(L_1, L_0)L_0 - \Phi(L_1, L_2)L_2 - \Phi(L_1, L_3)L_3\|}$$

Or $\Phi(L_1, L_0) = \Phi(L_1, L_2) = \Phi(L_1, L_3) = 1$, et $\|L_1 - L_0 - L_2 - L_3\|^2 = \Phi(L_1 - L_0 - L_2 - L_3, L_1 - L_0 - L_2 - L_3) = (-1)^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 7$, donc $P_1 = \frac{L_1 - L_0 - L_2 - L_3}{\sqrt{7}}$.

236. RMS 2025 891 Mines Ponts PSI énoncé p. 37

Soient $E = \mathbb{R}_4[X], F$ le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes pairs, G le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes impairs. Pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^4 (P(k) + (-1)^k P(-k))(Q(k) + (-1)^k Q(-k))$.

- (a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
- (b) Montrer que $E = F \oplus G$.
- (c) Déterminer une base orthonormée de E adaptée à $E = F \oplus G$.

SOLUTION. —

Notons que $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4)$ et $G = \text{Vect}(X, X^3)$ sont bien sûr supplémentaires dans E .

- (a) Φ est clairement bilinéaire, symétrique et positive.

Soit enfin $P \in E$ tel que $\Phi(P, P) = 0 = \sum_{k=0}^4 (P(k) + (-1)^k P(-k))^2$. Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous sont nuls donc $\forall k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, (P(k) + (-1)^k P(-k))^2 = 0 = P(k) + (-1)^k P(-k)$.

On peut écrire $P = A + B$ avec A pair et B impair (uniques).

Alors $2P(0) = 2A(0) = 0, P(2) + P(-2) = 2A(2) = 0$ et $P(4) + P(-4) = 2A(4) = 0$. A est pair donc on a aussi $A(-2) = 0 = A(-4)$.

Ainsi A , de degré au plus 4, possède 5 racines distinctes $-4, -2, 0, 2$ et 4 donc A est le polynôme nul.

Et $P(1) - P(-1) = 2B(1) = 0, P(3) - P(-3) = 2B(3) = 0$. B est impair donc on a aussi $B(-1) = B(-3) = 0$. Ainsi B , de degré au plus 3, possède 4 racines distinctes $-3, -1, 1$ et 3 donc B est le polynôme nul. Et donc $P = A + B = 0$.

Ceci achève de prouver que Φ est un produit scalaire.

- (b) On a déjà $E = F \oplus G$, reste à prouver que $F \perp G$.

Soit donc $A \in F, B \in G$. $\Phi(A, B) = \sum_{k=0}^4 (A(k) + (-1)^k A(-k)) (B(k) + (-1)^k B(-k))$.

Or pour tout entier k pair, $B(k) + (-1)^k B(-k) = B(k) + B(-k) = 0$ donc $(A(k) + (-1)^k A(-k)) (B(k) + (-1)^k B(-k)) = 0$.

Et pour tout k impair, $A(k) + (-1)^k A(-k) = A(k) - A(-k) = 0$ donc $(A(k) + (-1)^k A(-k)) (B(k) + (-1)^k B(-k)) = 0$.

Ainsi $\Phi(A, B) = 0$ en tant que somme de termes tous nuls, ce qui prouve que $F \perp G$.

- (c) Il suffit de trouver une base orthonormée de F et une de G et de les concaténer pour conclure.

Or pour $P, Q \in F$, on a $\Phi(P, Q) = 4P(0)Q(0) + 4P(2)Q(2) + 4P(4)Q(4)$.

Pour qu'une famille (P_1, P_2, P_3) d'éléments de F soit orthonormée (donc une base orthonormée de F), il suffit de réaliser les conditions $P_1(0) = 1/2, P_1(2) = P_1(4) = 0, P_2(2) = 1/2, P_2(0) = P_2(4) = 0$ et $P_3(4) = 1/2, P_3(0) = P_3(2) = 0$.

Les polynômes $P_1 = \frac{1}{2} \frac{(X^2-4)(X^2-16)}{(-4)(-16)}, P_2 = \frac{1}{2} \frac{X^2(X^2-16)}{4(4-16)}$ et $P_3 = \frac{1}{2} \frac{X^2(X^2-4)}{16(16-4)}$ conviennent.

Et pour $P, Q \in G$, on a $\Phi(P, Q) = 4P(1)Q(1) + 4P(3)Q(3)$. On cherche de même $P_4, P_5 \in G$ tels que $P_4(1) = 1/2, P_4(3) = 0, P_5(1) = 0$ et $P_5(3) = 1/2$, et on aura alors une base orthonormée (P_4, P_5) de G .

Les polynômes $P_4 = \frac{1}{2} \frac{X(X^2-9)}{(1-9)}$ et $P_5 = \frac{1}{2} \frac{X(X^2-1)}{3(9-1)}$ conviennent.

La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ obtenue est bien une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

237. RMS 2025 892 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère une isométrie indirecte f . Montrer que f se décompose en une rotation d'axe Δ et une réflexion de plan Δ^\perp . Cette décomposition est-elle unique? La rotation et la réflexion commutent-elles?

SOLUTION. — On suppose $f \neq -\text{id}$.

$-f$ est une isométrie directe de E , et $-f \neq \text{id}$ donc $-f$ est une rotation d'axe Δ , orienté par un vecteur u unitaire et d'angle $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$.

Dans une base orthonormée directe \mathcal{B} de premier vecteur u , $-f$ a donc pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, et donc f

pour matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & -\sin \theta' \\ 0 & \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & -\sin \theta' \\ 0 & \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & -\sin \theta' \\ 0 & \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix}$$

en notant $\theta' = \theta + \pi$.

Autrement dit f s'écrit comme la composée commutative de la rotation d'axe Δ dirigé par u et d'angle θ' (non congru à π modulo 2π) avec la réflexion par rapport à Δ^\perp .

Unicité : Si $f = r \circ \delta$ avec r une rotation d'axe Δ dirigé par u et d'angle θ' (non congru à π modulo 2π) et δ la réflexion par rapport à Δ^\perp alors on a dans une base orthonormée directe \mathcal{B} de premier vecteur u la matrice précédente pour f . Et donc $\Delta = \text{Vect}(u)$ est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1 , ce qui caractérise Δ et donc δ . Et $r = f \circ \delta$ est alors uniquement déterminée.

N.B. Si $f = -\text{id}$, n'importe quelle droite vectorielle Δ convient, en prenant r le 1/2-tour d'axe Δ et δ la réflexion par rapport à Δ^\perp on a bien $f = -\text{id} = r \circ \delta = \delta \circ r$.

238. RMS 2025 893 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$.

- (a) Montrer que F est un espace vectoriel et donner sa dimension.
- (b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner $d(A, F)$ en fonction notamment de $\text{tr}(A)$.

SOLUTION. —

- (a) $F = \text{Ker}(\text{tr})$ et la trace est une forme linéaire non nulle : $\dim F = n^2 - 1$.
- (b) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr} M = \langle M, I_n \rangle$ donc $F = \text{Vect}(I_n)^\perp$ et donc $F^\perp = \text{Vect}(I_n)$.
 $d(A, F) = \|p_{F^\perp}(A)\| = \frac{1}{\|I_n\|} \langle A, I_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{tr}(A)$.

239. RMS 2025 894 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

- (a) Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- (b) On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire donné par : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Soit $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.
 Déterminer F^\perp et $(F^\perp)^\perp$.
- (c) Pour E préhilbertien, donner une condition suffisante sur F pour que $F = (F^\perp)^\perp$.

SOLUTION. —

- (a) Soit $x \in F$. Par définition de F^\perp , on a $\forall y \in F^\perp, \langle x, y \rangle = 0$ donc $x \in (F^\perp)^\perp$.
- (b) Soit $Q \in F^\perp$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $(X - 1)^2 P \in F$ donc $\langle (X - 1)^2 P, Q \rangle = 0 = \int_0^1 (t - 1)^2 P(t)Q(t) dt$.
 C'est en particulier le cas pour $P = Q$ donc $\int_0^1 (t - 1)^2 Q(t)^2 dt = 0$. La fonction $t \mapsto (t - 1)^2 Q(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc identiquement nulle. En particulier $\forall t \in]0; 1]$, $Q(t) = 0$.
 Q admet une infinité de racine de est le polynôme nul. Ainsi $F^\perp \subset \{0\}$ et donc $F^\perp = \{0\}$. On en déduit que $(F^\perp)^\perp = E$.
- (c) Une condition suffisante est par exemple " F est de dimension finie".
 En effet si tel est le cas F possède une base orthonormée (e_1, \dots, e_d) et le théorème de projection orthogonale assure que $F \oplus F^\perp = E$. F^\perp admet donc un supplémentaire orthogonal, qui vaut F , et donc $F = (F^\perp)^\perp$.

240. RMS 2025 895 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien. Pour x_1, \dots, x_p dans E , on note $G(x_1, \dots, x_p)$ la matrice de coefficient $G_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$.

- (a) Montrer que : G est inversible si et seulement si (x_1, \dots, x_p) est libre.
- (b) Montrer que $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

SOLUTION. — RMS 2014 734 Mines Ponts PC

Notons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée par le n -uplet des vecteurs (x_1, \dots, x_n) relativement à la base canonique de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors, on a

$$(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} = A^\top A.$$

Il s'agit alors de prouver que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top A)$. Grâce au théorème du rang, il suffit de prouver que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$ pour avoir le résultat. Il est clair que $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^\top A)$.

Soit $X \in \text{Ker}(A^\top A)$. On a alors $A^\top AX = 0$ d'où $X^\top A^\top AX = 0$. Or $X^\top A^\top AX = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2$. D'où, par séparation de la norme euclidienne, on a $AX = 0$, d'où $X \in \text{Ker}(A)$, et enfin $\text{Ker}(A^\top A) \subset \text{Ker}(A)$.

Le résultat s'en déduit.

241. RMS 2025 896 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F une partie fermée, non vide et convexe de E . Pour $x \in E$ on pose $d(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$

et $\Gamma(x) = \{f \in F, \|x - f\| = d(x, F)\}$.

- (a) Caractériser l'ensemble des x tels que $d(x) = 0$.
- (b) Montrer que d est 1-lipschitzienne. En déduire que $\Gamma(x)$ est non vide.
- (c) En utilisant une identité relative à la norme, montrer que : $\forall (f, f') \in \Gamma(x)^2, f \neq f' \Rightarrow \|\frac{1}{2}(f + f') - x\|^2 < d(x)^2$.
- (d) Montrer que $\Gamma(x)$ est réduit à un seul élément, que l'on notera $p(x)$.
- (e) Montrer que $p(x)$ est caractérisé par : $\forall y \in F, \langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$.

SOLUTION. —

- (a) Si $x \in F$ alors bien sûr $d(x) = 0$. Réciproquement si $d(x) = 0$, alors par définition de la borne inférieure il existe une suite (f_n) à valeur dans F telle que $\|x - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, autrement dit telle que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Comme F est fermé, on en déduit que $x \in F$.

- (b) Soit $x, y \in E$ et $f \in F$. On a $d(x) \leq \|x - f\| \leq \|x - y\| + \|y - f\|$ par inégalité triangulaire, et donc $\|y - f\| \geq d(x) - \|x - y\|$. Ceci pour tout $f \in F$ donc en passant à la borne inférieure, $d(y) \geq d(x) - \|x - y\|$. Autrement dit $d(x) - d(y) \leq \|x - y\|$.

De la même façon, on a $d(y) - d(x) \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, et donc $|d(x) - d(y)| \leq \|x - y\|$, ce qui prouve que d est 1-lipschitzienne.

On montre de même que $u : f \mapsto \|x - f\|$ est 1-lipschitzienne, donc continue. Et pour tout $f \in E$, on a $u(f) \geq \|f\| - \|x\|$, ce qui assure par comparaison que $u(f) \xrightarrow{\|f\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

On fixe $f_0 \in F$. Il existe $A > 0$ tel que $\forall f \in E, \|f\| > A \Rightarrow u(f) > f(f_0)$ par définition de la limite.

Mais alors $F \cap \overline{B(0, A)}$ est fermé borné (non vide car contenant f_0), le théorème des bornes atteintes assure que u admet un minimum m sur $F \cap \overline{B(0, A)}$. Par construction pour $f \in F \setminus \overline{B(0, A)}$ on a $u(f) > u(f_0) \geq m$ donc m est le minimum de u sur F tout entier.

Autrement dit $\inf_{f \in F} \|x - f\|$ est un minimum, c'est-à-dire qu'il existe un élément dans $\Gamma(x)$.

- (c) Supposons trouvés $f \neq f' \in \Gamma(x)$.
Alors $\|\frac{1}{2}(f + f') - x\|^2 = \|\frac{1}{2}(f - x) + \frac{1}{2}(f' - x)\|^2 = 2\|\frac{1}{2}(f - x)\|^2 + 2\|\frac{1}{2}(f' - x)\|^2 - \|\frac{1}{2}(f - x) - \frac{1}{2}(f' - x)\|^2$ via l'identité du parallélogramme.
Et donc $\|\frac{1}{2}(f + f') - x\|^2 = \frac{2}{4}d(x)^2 + \frac{2}{4}d(x)^2 - \frac{1}{4}\|f - f'\|^2 = d(x)^2 - \frac{1}{4}\|f - f'\|^2 < d(x)^2$.
- (d) Il vient alors $\|\frac{1}{2}(f + f') - x\| < d(x)$, c'est absurde puisque $\frac{1}{2}(f + f') \in F$ par convexité de F . Donc $\Gamma(x)$ ne peut contenir deux éléments distincts, or il est non vide, donc il est réduit à un seul élément $p(x)$.
- (e) Soit $y \in F$. Pour tout $t \in [0; 1]$, $(1 - t)p(x) + ty \in F$ par convexité de F .
Donc la fonction $h : t \in [0; 1] \mapsto \|(1 - t)p(x) + ty - x\|^2$ est bien définie, et admet un minimum en 0 par définition de $p(x)$.
Or $h : t \mapsto \|p(x) - x\|^2 + 2t\langle p(x) - x, y - p(x) \rangle + t^2\|y - p(x)\|^2$ est dérivable en 0, donc $f'(0) = 2\langle p(x) - x, y - p(x) \rangle \geq 0$.
Et donc $\langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$.

Inversement, soit $z \in F$ tel que $\forall y \in F, \langle x - z, y - z \rangle \leq 0$.

En particulier pour $y = p(x)$ on obtient $\langle x - z, p(x) - z \rangle \leq 0$ (1)

Comme $\langle x - z, p(x) - z \rangle = \langle x - p(x), p(x) - z \rangle + \langle p(x) - z, p(x) - z \rangle = \langle x - p(x), p(x) - z \rangle + \|p(x) - z\|^2$, nécessairement $\langle x - p(x), p(x) - z \rangle \leq 0$.

Or on sait que $\forall y \in F, \langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$, donc en particulier $\langle x - p(x), z - p(x) \rangle \leq 0$ soit $\langle x - p(x), p(x) - z \rangle \geq 0$, et donc $\langle x - p(x), p(x) - z \rangle = 0$ (2)

(1) moins (2) donne $\langle p(x) - z, p(x) - z \rangle \leq 0$ soit $\|p(x) - z\|^2 \leq 0$, et donc $z = p(x)$ par séparation de la norme.

242. RMS 2025 897 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Déterminer sa nature et ses valeurs propres.}$$

SOLUTION. — Rotation d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle $-\frac{\pi}{3}$. 1 est l'unique valeur propre de u .

243. RMS 2025 898 Mines Ponts PSI énoncé p. 38

(a) Que peut-on dire du spectre d'une matrice orthogonale ?

(b) Que peut-on dire de la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$? Que décrit-elle ?

SOLUTION. —

(a) Il est inclus dans $\{-1, 1\}$.

(b) A est orthogonale, indirecte, symétrique. C'est donc une matrice de réflexion, par rapport au plan $E_{-1}(A)$ d'équation $3x - 2y + z = 0$.

244. RMS 2025 899 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

(a) Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que $\text{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.

(b) Déterminer $\text{Ker}(u + \text{id})$ et $\text{Ker}(u - \text{id})$.

SOLUTION. — RMS 2016 761 Centrale PSI, RMS 2017 696 Mines Ponts PSI, RMS 2018 806 Mines Ponts PSI, RMS 2019 732 Mines Ponts PSI en remplaçant $p - q$ par $p + q$

(a) Les projecteurs p et q sont autoadjoints donc u également, car $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Le théorème spectral assure que u est diagonalisable.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda \|x\|^2 = \langle u(x), x \rangle = \langle p(x), x \rangle - \langle q(x), x \rangle = \|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2$$

donc

$$\lambda = \frac{\|p(x)\|^2}{\|x\|^2} - \frac{\|q(x)\|^2}{\|x\|^2} \in [-1, 1].$$

En effet, comme p et q sont des projecteurs orthogonaux, on a l'inégalité de Bessel $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\|q(x)\| \leq \|x\|$.

(b) $u + \text{id} = p + (\text{id} - q)$ avec $\text{id} - q$ projecteur orthogonal de sep inversés de ceux de q . On va démontrer que

$$\text{Ker}(u + \text{id}) = \text{Ker } p \cap \text{Ker}(\text{id} - q) = \text{Ker } p \cap \text{Im } q$$

L'inclusion $\text{Ker } p \cap \text{Ker}(\text{id} - q) \subset \text{Ker}(u + \text{id})$ est claire. Réciproquement si $x \in \text{Ker}(u + \text{id})$, alors $0 = \langle (u + \text{id})(x), x \rangle = \|p(x)\|^2 + \|(\text{id} - q)(x)\|^2$ donc $p(x) = (\text{id} - q)(x) = 0$, ce qui prouve que $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker}(\text{id} - q)$.

D'autre part, $-(u - \text{id}) = -u + \text{id} = q + (\text{id} - p)$ donc, d'après ce qui précède,

$$\text{Ker}(u - \text{id}) = \text{Ker}(-(u - \text{id})) = \text{Ker } q \cap \text{Ker}(\text{id} - p) = \text{Ker } q \cap \text{Im } p$$

245. RMS 2025 900 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, α un réel et a un vecteur de E unitaire.

On définit $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle x, a \rangle a$.

- (a) Montrer que f_α est un endomorphisme de E .
- (b) Soient α, β dans \mathbb{R} . Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$. Pour quels α , f_α est-il bijectif ?
- (c) Trouver les valeurs et les vecteurs propres de f_α .
- (d) Pour quels α , f_α est-il une isométrie vectorielle ?
- (e) Pour quels α , f_α est-il auto-adjoint ?

SOLUTION. — RMS 2015 882 Centrale PC, RMS 2017 1095 Centrale PC, RMS 2019 835 Mines Ponts PC

On suppose que $n = \dim E \geq 2$ dans tout l'exercice (si $n = 1$, l'endomorphisme f_α s'identifie à $x \mapsto (1 + \alpha)x$ via l'isométrie entre E et \mathbb{R} consistant à envoyer a sur 1, et les réponses sont immédiates : $\alpha \neq -1$ pour la première question, tout vecteur non nul est propre pour la valeur propre $1 + \alpha$ pour la deuxième, $\alpha = -2$ pour la troisième, et enfin tout endomorphisme est symétrique pour la dernière).

- (a) Trivial
- (b) Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha \circ f_\beta(x) &= f_\beta(x) + \alpha \langle a, f_\beta(x) \rangle a = x + \beta \langle a, x \rangle a + \alpha \langle a, x + \beta \langle a, x \rangle a \rangle a = x + \beta \langle a, x \rangle a + \alpha \langle a, x \rangle a + \alpha \beta \langle a, x \rangle \langle a, a \rangle a \\ &= x + \beta \langle a, x \rangle a + \alpha \langle a, x \rangle a + \alpha \beta \langle a, x \rangle a = x + (\alpha + \beta + \alpha \beta) \langle a, x \rangle a. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha + \beta + \alpha \beta}.$$

Si $\alpha = -1$, on reconnaît dans l'expression de f_{-1} que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan orthogonal à a , qui n'est pas bijectif (de noyau $\text{Vect}(a)$).

Sinon, le calcul ci-dessus montre que $f_\alpha \circ f_{-\alpha/(1+\alpha)} = \text{id}_E$, donc que f_α admet un inverse à droite, donc un inverse (car E est de dimension finie, puisqu'il est euclidien).

- (c) Si $\alpha = 0$, alors $f_\alpha = f_0 = \text{id}_E$. Les réponses sont claires : $\text{Sp}(f_0) = \{1\}$ et $E_1(f_0) = E$
Sinon, on pose $H = a^\perp$, et on constate que $f_\alpha(x) = x \iff x \in H$, donc que 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$ et que $E_1(f_\alpha) = H$. De plus, $f_\alpha(a) = (1 + \alpha)a$. Comme $a \notin H$, on en déduit que

$$\text{Sp}(f_\alpha) = \{1, 1 + \alpha\}, \quad E_1(f_\alpha) = H = a^\perp \quad E_{1+\alpha}(f_\alpha) = \text{Vect}(a).$$

- (d) Soient x et y deux vecteurs de E . Alors

$$\begin{aligned} \langle f_\alpha(x), f_\alpha(y) \rangle &= \langle x + \alpha \langle a, x \rangle a, y + \alpha \langle a, y \rangle a \rangle = \langle x, y \rangle + 2\alpha \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle + \alpha^2 \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle \|a\|^2 \\ &= \langle x, y \rangle + \alpha(2 + \alpha) \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle. \end{aligned}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On sait que $u \in \text{O}(E) \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (c'est une des définitions possibles). On en déduit que $f_\alpha \in \text{O}(E) \iff \forall (x, y) \in E^2, \alpha(2 + \alpha) \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle = 0$. En appliquant cette condition avec $x = y = a$, on obtient la condition nécessaire

$$\alpha(\alpha + 2) = 0,$$

et il est clair que cette condition est aussi suffisante. On conclut que f_α est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si $\alpha = 0$ (auquel cas, $f_\alpha = f_0 = \text{id}_E$) ou $\alpha = -2$ (et on reconnaît dans f_{-2} la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan a^\perp).

- (e) L'endomorphisme $p_a : x \in E \mapsto \langle a, x \rangle a$ est le projecteur orthogonal sur la droite $\text{Vect}(a)$: le cours affirme que c'est un endomorphisme symétrique. Alors $f_\alpha = \text{id}_E + \alpha p_a$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques : c'est donc un endomorphisme symétrique, toujours d'après le cours, et ceci quelle que soit la valeur de α .

246. RMS 2025 901 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.

SOLUTION. — Je n'ai pas cherché les occurrences passées de cet exercice, dont il serait surprenant qu'elles n'existent pas...
CC

Notons A la matrice de u dans une base orthonormée. On reformule le problème de la façon suivante : il faut prouver l'existence d'une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B := P^\top A P$ est telle que le produit $B^\top B$ est diagonal. En effet, P correspond à la matrice de passage de la base orthonormée initiale à la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ recherchée, B est la matrice de u dans \mathcal{B} et la condition d'orthogonalité de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ se résume en disant que les colonnes de B sont orthogonales deux à deux. Or le produit scalaire de deux colonnes B_i et B_j de B est exactement $B_i^\top B_j$, donc le terme général de $B^\top B$: l'orthogonalité de $u(\mathcal{B})$ équivaut donc la diagonalité de $B^\top B$.

Une fois cette reformulation établie, c'est classique : il suffit de constater que $A^\top A$ est symétrique, donc est orthodiagonalisable d'après le théorème spectral. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $D := P^\top A^\top A P$ est diagonale. On vérifie alors que cette matrice P répond à la question, en constatant que $B^\top B = (P^\top A P)^\top (P^\top A P) = P^\top A^\top A P = D$.

247. RMS 2025 902 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^\top M M^\top = I_n$.

SOLUTION. — RMS 2011 1079 CCP PSI, RMS 2013 648 Mines Ponts PC, RMS 2014 1225 CCP PSI, RMS 2016 919 ENSEA PSI, RMS 2018 1327 CCP PSI, RMS 2019 733 Mines Ponts PSI, RMS 2020 827 Mines Ponts PC

La relation $M M^\top M = I_n$ entraîne (en transposant) que $M^\top M M^\top = I_n$. Or, en multipliant l'hypothèse de départ par M^\top à gauche, on obtient $M^\top M M^\top M = M^\top$, donc $I_n M = M = M^\top$, c'est-à-dire que M est symétrique réelle, donc diagonalisable sur \mathbb{R} .

Comme $M M^\top M = M^3 = I_n$, le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de M , donc sa seule valeur propre réelle vaut 1. La matrice M est donc semblable à I_n , donc égale à I_n :

$$M = I_n.$$

248. RMS 2025 903 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^\top = I_n$.

- (a) Montrer que $A^4 - 2A^2 + A = 0$.
- (b) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A .
- (c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'expression des A possibles.

SOLUTION. — Voir RMS 2023 806 Mines-Ponts PC

- (a) La relation peut se réécrire $A^2 = I_n - A^\top$. Par conséquent,

$$A^4 = (I_n - A^\top)^2 = I_n + (A^2)^\top - 2A^\top = I_n + (I_n - A^\top)^\top - 2A^\top = 2(I_n - A^\top) - A = A^2 - A.$$

Le polynôme $Q = X^4 - 2X^2 + X$ est donc annulateur de A .

Comme $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on obtient que $X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 - X - 1)$ est également annulateur de A .

- (b) Soit X tel que $AX = X$ alors $(A^2 - I_n)X = (1^2 - 1)X = 0$ donc $A^\top X = 0$. Mais comme A est inversible, A^\top l'est aussi et donc $X = 0$: 1 n'est donc pas valeur propre de A .

- (c) On obtient donc que $X^2 - X - 1$ est annulateur de A et ce polynôme est scindé sur \mathbb{R} à racines simples donc A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

On déduit de plus que $A^2 - I_n = A$ donc $A^\top = A$ et A est symétrique : elle est donc orthogonalement diagonalisable : $A = P D P^\top$ où P est orthogonale et D diagonale de diagonale constituée de $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Réciproquement, ces matrices ainsi décrites conviennent bien.

249. RMS 2025 904 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$. On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $(u(P))(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt$

- (a) Montrer que u est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[X]$. Qu'en déduit-on ?
- (b) Montrer que u est un isomorphisme.

Soit (P_0, \dots, P_n) une base orthonormée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

- (c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.
- (d) En déduire que $\text{tr}(u) = \frac{2^n}{n+1}$.

SOLUTION. —

- (a) u est clairement linéaire, à valeur dans $\mathbb{R}_n[X]$. En effet si $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u(P)(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} t^k \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_0^1 t^{k+i} dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1}$$

Et donc $u(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1} X^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus pour $Q = \sum_{j=0}^n \beta_j X^j$, on a alors

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1} \sum_{j=0}^n \beta_j t^{n-k+j} dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1} \sum_{j=0}^n \frac{\beta_j}{n-k+j+1}$$

Le changement d'indice $\ell = n-k$ donne $\langle u(P), Q \rangle = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{n-\ell} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{n-\ell+i+1} \sum_{j=0}^n \frac{\beta_j}{\ell+j+1}$ soit comme $\binom{n}{n-\ell} = \binom{n}{\ell}$, $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$.

Ainsi u est auto-adjoint, donc orthogonalement diagonalisable d'après le théorème spectral.

N.B. On peut aussi utiliser le théorème de Fubini (hors programme mais démontrable sur le carré avec les outils du programme) pour écrire

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n P(t) dt \right) Q(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n P(t) Q(x) dx \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n P(t) Q(x) dx \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n Q(x) dx \right) P(t) dt \\ &= \langle P, u(Q) \rangle \end{aligned}$$

- (b) Soit $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$ un élément de $\text{Ker } u$. On a donc $u(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1} X^{n-k} = 0$. Les coefficients du polynôme nul sont nuls donc $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1} = 0 = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{k+i+1}$.

Autrement dit $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\sum_{i=0}^n \alpha_i \int_0^1 t^{k+i} dt = 0 = \int_0^1 t^k P(t) dt = \langle X^k, P \rangle$.

Donc $P \in \mathbb{R}_n[X]^\perp = \{0\}$.

On a montré que u est injectif, donc comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, que u est un automorphisme.

- (c) Soit $y \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P = (X+y)^n$ s'écrit dans la base orthonormée (P_0, \dots, P_n) :

$$P = \sum_{k=0}^n \langle P, P_k \rangle P_k = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (t+y)^n P_k(t) dt P_k = \sum_{k=0}^n u(P_k)(y) P_k$$

Comme $u(P_k) = \lambda_k P_k$, il vient $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(y) P_k$ soit, évalué en $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.

- (d) En particulier pour $y = x$, il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2x)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x)^2$.

En intégrant de 0 à 1,

$$\frac{2^n}{n+1} = \int_0^1 (2x)^n dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_0^1 P_k(x)^2 dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k \|P_k\|^2$$

Les polynômes P_k étant unitaires, $\frac{2^n}{n+1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k = \text{tr}(u)$.

250. RMS 2025 905 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Soit $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $D = \text{diag}(s_{1,1}, \dots, s_{n,n})$. On suppose S et D semblables. Montrer que $S = D$. Ind. Considérer la trace de S^2 .

SOLUTION. — S et D étant semblables, $S = P^{-1}DP$ où $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. $\text{tr}(S^2) = \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n s_{ii}^2$.

D'autre part, $\text{tr}(S^2) = \text{tr}(S^T S) = \langle S|S \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n s_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} s_{ij}^2$. On en déduit que $\sum_{i \neq j} s_{ij}^2 = 0$ et puisque tous les termes de la somme sont ≥ 0 , $\forall i \neq j$, $s_{ij} = 0$ ce qui signifie que S est diagonale et donc que $S = D$.

251. RMS 2025 906 Mines Ponts PSI énoncé p. 39

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, $X^T A X > 0$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis montrer que $\det(A) \leq \det(B) \det(D)$.

SOLUTION. —

(a) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. En effet pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et tout vecteur propre associé X , on a $0 < X^T A X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$ et donc $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. A est symétrique réelle, le théorème spectral assure que A est orthogonalement diagonalisable.

Soit donc $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres, strictement positives, et (X_1, \dots, X_n) une base orthonormée de vecteurs propres associés.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a alors $X = \sum_{k=1}^n \langle X, X_k \rangle X_k$ et donc $A X = \sum_{k=1}^n \langle X, X_k \rangle \lambda_k X_k$. Enfin $X^T A X = \langle X, A X \rangle = \sum_{k=1}^n \langle X, X_k \rangle^2 \lambda_k \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^n \langle X, X_k \rangle^2 = \lambda_1 \|X\|^2 > 0$.

(b) Soit p la taille de B . B est symétrique, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a $X^T B X = Y^T A Y$, où $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, donc $X^T B X > 0$. Ceci prouve que $B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

Donc B est diagonalisable et ses valeurs propres $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_p$ sont strictement positives, donc $\det(B) = \prod_{i=1}^p \mu_i > 0$.

$B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ donc B s'écrit $B = P \Delta P^T$ avec P orthogonale et $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ diagonale. On peut définir $B^{-1/2} = P \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, \dots, 1/\sqrt{\mu_p}) P^T$, de sorte que $B^{-1/2} B B^{-1/2} = I_p$, et $B^{-1/2}$ est encore symétrique (clair) définie positive, car de valeurs propres strictement positives.

De même $D \in \mathcal{S}_{n-p}^{++}(\mathbb{R})$, donc $\det D > 0$ et il existe $D^{-1/2}$ symétrique définie positive telle que $D^{-1/2} D D^{-1/2} = I_{n-p}$.

Notant $Q = \begin{pmatrix} B^{-1/2} & 0 \\ 0 & D^{-1/2} \end{pmatrix}$, on a donc Q symétrique et $Q^T A Q = \begin{pmatrix} I_p & B^{-1/2} C D^{-1/2} \\ D^{-1/2} C^T B^{-1/2} & I_{n-p} \end{pmatrix}$. Notons pour simplifier $A' = Q^T A Q$ et $C' = B^{-1/2} C D^{-1/2}$, de sorte que $A' = \begin{pmatrix} I_p & C' \\ (C')^T & I_{n-p} \end{pmatrix}$.

Par multiplicativité du déterminant, $\det(Q)^2 \det(A) = \det(A') = \frac{\det(A)}{\det(B) \det(D)}$, en effet $\det(Q) = \det(B^{-1/2}) \det(D^{-1/2}) = \det(B)^{-1/2} \det(D)^{-1/2}$.

Reste à prouver que $\det(A') \leq 1$ pour conclure.

L'opération sur les lignes (de blocs) $L_2 \leftarrow L_2 - (C')^T L_1$, licite car équivalente à multiplier à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -(C')^T & I_{n-p} \end{pmatrix}$, de déterminant 1 donne $\det(A') = \det \begin{pmatrix} I_p & C' \\ 0 & I_{n-p} - (C')^T C' \end{pmatrix}$ et donc $\det(A') = \det(I_{n-p} - (C')^T C')$.

La matrice $I_{n-p} - (C')^T C'$ est symétrique réelle donc diagonalisable, son déterminant est le produit de ses valeurs propres, nous allons prouver que ses valeurs propres sont dans $]0; 1]$ et donc que $\det(A') \leq 1$.

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(I_{n-p} - (C')^T C')$ et tout vecteur propre associé Y , on a $\lambda \|Y\|^2 = Y^T (I_{n-p} - (C')^T C') Y = \|Y\|^2 - \|C' Y\|^2$.

Or $A' = Q^T A Q$ est symétrique et comme Q est inversible ($B^{-1/2}$ et $D^{-1/2}$ le sont), on a $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, $X^T A' X = (QX)^T A(QX) > 0$ car $QX \neq 0$. Autrement dit $A' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Et pour toute matrice colonne Z non nulle écrit par blocs $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on a $Z^T A' Z = X^T X + X^T C' Y + Y^T (C')^T X + Y^T Y = \|X\|^2 + 2\langle X, C' Y \rangle + \|Y\|^2 > 0$, en particulier $-2\langle X, C' Y \rangle < \|X\|^2 + \|Y\|^2$.

Changeant X en $-X$, on a aussi $2\langle X, C' Y \rangle < \|X\|^2 + \|Y\|^2$ donc $2|\langle X, C' Y \rangle| < \|X\|^2 + \|Y\|^2$.

En particulier pour $X = C' Y$ on obtient $2\|C' Y\|^2 < \|C' Y\|^2 + \|Y\|^2$ soit $\|C' Y\|^2 < \|Y\|^2$. Ceci prouve donc que $0 < \lambda \|Y\|^2 = \|Y\|^2 - \|C' Y\|^2 \leq \|Y\|^2$ donc que $0 < \lambda \leq 1$.

On a bien $\frac{\det(A)}{\det(B)\det(D)} = \det(A') = \det(I_{n-p} - (C')^T C') = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(I_{n-p} - (C')^T C')} \lambda^{m_\lambda} \leq 1$ en tant que produit de termes dans $]0; 1]$ et donc $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.

Analyse

252. RMS 2025 907 Mines Ponts PSI énoncé p. 40

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

- (a) Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.
- (b) Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

SOLUTION. — Voir RMS 2009 1032 Centrale PC.

- (a) Pour tout $(\lambda, f, h) \in \mathbb{R} \times E \times E$, on a $N_\varphi(\lambda f) = \|\lambda f\varphi\|_\infty = |\lambda| \|f\varphi\|_\infty = |\lambda| N_\varphi(f)$ et $N_\varphi(f + h) = \|(f + h)\varphi\|_\infty = \|f\varphi + h\varphi\|_\infty \leq \|f\varphi\|_\infty + \|h\varphi\|_\infty = N_\varphi(f) + N_\varphi(h)$. La fonction N_φ est donc positivement homogène et satisfait l'inégalité triangulaire.

On montre ensuite que N_φ est définie positive si et seulement si l'ensemble des zéros de φ est d'intérieur vide ce qui équivaut à : $\{x \in [0, 1], \varphi(x) \neq 0\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Condition suffisante. Supposons que $Z' = \{x \in [0, 1], \varphi(x) \neq 0\}$ soit dense dans $[0, 1]$ et que $f \in E$ vérifie $N_\varphi(f) = 0$. Alors $\varphi(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in Z'$ dans un premier temps. dans un second temps, soit $x \in [0, 1]$ tel que $\varphi(x) = 0$. Comme Z' est dense dans $[0, 1]$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Z' qui converge vers x . Comme f est continue, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, et comme $f(x_n) = 0$ puisque $x_n \in Z'$, on conclut que $f(x) = 0$ aussi. Finalement f est identiquement nulle, ce qui montre que N_φ est définie positive.

Condition nécessaire. On raisonne par contraposition. Supposons que $\varphi^{-1}(\{0\})$ soit d'intérieur non vide, donc qu'il existe a et b tels que $0 \leq a < b \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit f_0 la fonction affine par morceaux sur $[0, 1]$ (donc continue), adaptée à la subdivision $(0, a, \frac{a+b}{2}, b, 1)$, définie par $f_0(0) = f_0(a) = f_0(\frac{a+b}{2}) = f_0(b) = f_0(1) = 0$ et $f_0(\frac{a+b}{2}) = 1$. Elle est non identiquement nulle, telle que φf_0 est identiquement nulle, donc telle que $N_\varphi(f_0) = 0$, ce qui montre que N_φ n'est pas définie positive.

- (b) On suppose ici que φ satisfait la condition de la question ?? pour que N_φ soit une norme. On remarque que $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty \leq \beta \|f\|_\infty$ pour toute $f \in E$, avec $\beta = \|\varphi\|_\infty > 0$. On montre alors que N_φ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si φ ne s'annule jamais sur $[0, 1]$ (il suffit de tester l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq N_\varphi$).

Condition suffisante. Si φ ne s'annule jamais sur $[0, 1]$, il en est de même de la fonction continue $|\varphi|$. Cette dernière étant définie sur le segment $[0, 1]$, elle admet un minimum $\alpha = |\varphi(x_0)| > 0$ pour un certain $x_0 \in [0, 1]$. Alors, pour tout $f \in E$, on a $\forall x \in [0, 1], |\varphi(x)f(x)| \geq \alpha |f(x)|$, donc $N_\varphi(f) \geq \alpha \|f\|_\infty$, ce qui montre que N_φ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Condition nécessaire. Si φ s'annule en x_0 sur $[0, 1]$, on considère la fonction affine par morceaux f_n sur $[0, 1]$ (donc continue), adaptée à la subdivision $(0, x_0 - \frac{1}{n}, x_0, x_0 + \frac{1}{n}, 1)$, définie par $f_n(0) = f_n(x_0 - \frac{1}{n}) = f_n(x_0 + \frac{1}{n}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(x_0) = 1$: il faut supposer que n est suffisamment grand pour que $0 \leq x_0 - \frac{1}{n}$ et $x_0 + \frac{1}{n} \leq 1$, et il faut adapter cette définition aux cas où $x_0 \in \{0, 1\}$. Par construction, $\|f_n\|_\infty = 1$, et

$$N_\varphi(f_n) = \sup_{x \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]} |\varphi(x)f_n(x)| \leq \sup_{x \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]} |\varphi(x)|.$$

Comme φ est continue avec $\varphi(x_0) = 0$, on a $\sup_{x \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]} |\varphi(x)|$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Il est alors impossible qu'il existe α tel que $0 < \alpha \leq N_\varphi(f_n)/\|f_n\|_\infty = N_\varphi(f_n)$, puisque le majorant tend vers zéro. On conclut que N_φ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

253. RMS 2025 908 Mines Ponts PSI énoncé p. 40

Soient E un \mathbb{R} espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E .

- (a) Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1) . On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2) .
- (b) On suppose qu'une suite (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2) . Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
- (c) On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$. Montrer que, si $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont équivalentes.
- (d) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.
- (e) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

SOLUTION. — Ressemble à RMS 2011 949 Centrale PC, même énoncé que RMS 2023 704 Mines Ponts PSI et RMS 2024 949 Mines Ponts PSI.

- (a) C'est du cours. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, on dispose de constantes α et β dans \mathbb{R}_+^* telles que

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1.$$

On suppose que (u_n) converge vers ℓ dans (E, N_1) . Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $N_2(u_n - \ell) \leq \beta N_1(u_n - \ell)$, on a $N_2(u_n - \ell) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc (u_n) converge aussi dans (E, N_2) , et vers la même limite.

- (b) On raisonne par contraposition en suppose que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. Par exemple, on suppose qu'il n'existe pas de constante $\beta > 0$ telle que $N_2 \leq \beta N_1$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $N_2(x_n) > n^2 N_1(x_n)$, ce qui implique que $x_n \neq 0$.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{x_n}{n N_1(x_n)}.$$

Alors $N_1(u_n) = \frac{1}{n}$, ce qui prouve que (u_n) tend vers zéro dans (E, N_1) , mais $N_2(u_n) > n$, ce qui prouve que (u_n) est non bornée, donc divergente, dans (E, N_2) . On a trouvé une suite qui converge pour une des normes mais pas pour l'autre, et cela achève la preuve par contraposition.

- (c) Si $a, b \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} |P(a)| &\leq |P(a) - P(b)| + |P(b)| \\ &= \left| \int_a^b P'(t) dt \right| + |P(b)| \\ &\leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |P'(t)| dt + |P(b)| \\ &\leq \int_0^1 |P'(t)| dt + |P(b)|, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant justifiée par le fait que $a, b \in [0, 1]$. On en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_a(P) \leq |P(b)| + 2 \int_0^1 |P'(t)| dt \leq 2N_b(P).$$

En échangeant les rôles de a et b , on montre que $N_b \leq 2N_a$, et finalement que N_a et N_b sont équivalentes.

- (d) On cherche d'abord les a pour lesquels (P_n) est bornée pour N_a :

$$N_a(P_n) = \left| \frac{a^n}{2^n} \right| + \int_0^1 \frac{|nt^{n-1}|}{2^n} dt = \left(\frac{|a|}{2} \right)^n + \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi :

- si $|a| > 2$, alors $N_a(P_n) \rightarrow +\infty$, et (P_n) diverge pour N_a ;
- si $|a| < 2$, alors $N_a(P_n) \rightarrow 0$, et donc $P_n \rightarrow 0_E$ pour N_a ;
- si $a = 2$, alors $N_2(P_n - 1) = |P_n(2) - 1| + \int_0^1 |P'_n| = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, et donc $P_n \rightarrow 1$ pour N_2 ;
- si $a = -2$, alors

$$\begin{aligned} N_{-2}(P_{n+1} - P_n) &= |P_{n+1}(-2) - P_n(-2)| + \int_0^1 |P'_{n+1} - P'_n| \\ &= |(-1)^{n+1} - (-1)^n| + \frac{n}{2^{n+1}} \int_0^1 \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) t^n - 2t^{n+1} \right| dt \\ &\rightarrow 2 \neq 0, \end{aligned}$$

donc (P_n) diverge pour N_{-2} .

- (e) Soit $b > 1$ et $a \in [0, b[$. On s'inspire de ce qui précède en substituant b à 2, en posant $Q_n := \frac{X^n}{b^n}$: on prouve *mutatis mutandis* que (Q_n) converge vers 1 pour N_b et vers 0_E pour N_a , ce qui prouve, d'après la remarque de la fin de la question 1, que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

254. RMS 2025 909 Mines Ponts PSI énoncé p. 40

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$.

- Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
- Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\sum a_k X^k\| = \max |a_k|$, montrer que la suite (P_n) de terme général $P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$ est de Cauchy sans être convergente.
- Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- Montrer que, si (u_n) est de Cauchy et possède une suite extraite convergente, alors (u_n) est convergente.
- On admet le théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R} . Montrer que si E est de dimension finie, alors la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

SOLUTION. —

- (a) On suppose que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \in E$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On dispose d'un entier N à partir duquel $\|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si n et m sont des entiers plus grands que N , alors par inégalité triangulaire

$$\|u_n - u_m\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que toute suite convergente est de Cauchy.

- (b) On suppose $1 \leq m < n$, le cas $m = n$ étant banal. Alors

$$\|P_n - P_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{X^k}{k} \right\| = \frac{1}{m+1}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'on pose $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, alors le calcul ci-dessus montre que pour tous $m, n \geq N$, on a bien $\|P_n - P_m\| \leq \varepsilon$. La suite (P_n) est donc de Cauchy.

Si $Q = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme fixé de $\mathbb{R}[X]$, on a pour tout $n > d$

$$\|P_n - Q\| \geq \left| \frac{1}{d+1} - 0 \right| = \frac{1}{d+1},$$

donc (P_n) ne peut pas converger vers Q . Par conséquent, (P_n) est de Cauchy sans être convergente.

- (c) Soit (u_n) une suite de Cauchy. On applique la définition avec $\varepsilon = 1$ et pour m valant l'entier N . Alors pour tout entier $n \geq N$, on a $\|u_n - u_N\| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq 1 + \|u_N\|.$$

On lit ci-dessus que (u_n) est bornée à partir du rang N , donc bornée.

- (d) On note $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) et convergente, de limite ℓ . On rappelle que la fonction φ est strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même, et qu'en particulier, $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On dispose aussi de $N' \in \mathbb{N}$ tel que, si $m, n \geq N'$, alors $\|u_n - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N'' = \max(N, N')$. Pour tout $n \geq N''$, on a $m = \varphi(n) \geq n \geq N'' \geq N$ et N' , donc

$$\|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite (u_n) est donc convergente.

- (e) Soit d la dimension de E (supposée strictement positive). Le sens réciproque a été démontré dans la première question.

On fixe une suite (u_n) de Cauchy, et une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E . Pour $1 \leq k \leq d$, on note $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de composantes de la suite (u_n) dans la base \mathcal{B} . On sait que (u_n) converge [de limite ℓ] si et seulement si les d suites réelles $(u_{n,k})_n$ convergent [de limite ℓ_k], et alors que $\ell = \sum_{k=1}^d \ell_k e_k$.

Par la question (c), la suite (u_n) est bornée, donc les d suites $(u_{n,k})_n$ le sont aussi. Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire de la première une suite $(u_{\varphi_1(n),1})$ convergente.

De même, comme $(u_{\varphi_1(n),2})$ est bornée, on peut en extraire une suite $(u_{(\varphi_1 \circ \varphi_2)(n),2})$ convergente. On poursuit ainsi jusqu'à $(u_{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_d)(n),d})$ convergente.

On pose alors $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_d$, et les d suites $(u_{\psi(n),k})$ sont convergentes donc $(u_{\psi(n)})$ converge.

La question (d) montre alors que (u_n) converge.

255. RMS 2025 910 Mines Ponts PSI énoncé p. 40

Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+, f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$.

- (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
- (b) Montrer que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$ -lipschitzienne.
- (c) Montrer que toute fonction polynomiale P appartient à E et déterminer $K(P)$.
- (d) L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur E ?
- (e) Prouver que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \inf_{x \in [0,1]} |f(x)| + K(f)$.
- (f) L'application $f \mapsto \frac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E \setminus \{0\}$?

SOLUTION. —

- (a) La fonction nulle est lipschitzienne, donc E est non vide.

Si $f, g \in E$, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $h = \alpha f + \beta g$, si k et ℓ désignent des rapports de Lipschitz de f et g respectivement, alors on a

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |h(x) - h(y)| &= |\alpha(f(x) - f(y)) + \beta(g(x) - g(y))| \\ &\leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)| \\ &\leq k|\alpha| |x - y| + \ell|\beta| |x - y| \\ &= m|x - y|, \end{aligned}$$

où l'on a posé $m = k|\alpha| + \ell|\beta|$. la fonction h est donc lipschitzienne, donc E est stable par combinaison linéaire.

Finalement, E est un sous-espace vectoriel de $[0, 1]^{\mathbb{R}}$, donc est un espace vectoriel.

(b) On sait que la borne inférieure d'une partie A de \mathbb{R} est la limite d'une suite d'éléments de A . On choisit alors une suite (k_n) de rapports de Lipschitz de f qui converge vers $K(f)$.

On fixe $(x, y) \in [0, 1]^2$. Pour tout entier n , on a $|f(x) - f(y)| \leq k_n|x - y|$. En faisant tendre n vers $+\infty$, à x, y fixés, on obtient, par passage à la limite des inégalités larges :

$$|f(x) - f(y)| \leq K(f)|x - y|.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a démontré que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$ -lipschitzienne.

(c) En fait, toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ appartient à E , car elle est $\|f'\|_\infty$ -lipschitzienne : c'est l'inégalité des accroissements finis.

(d) Non, l'application $f \mapsto K(f)$ n'est pas une norme sur E car $K(f) = 0$ si et seulement si f est constante (et non pas si et seulement si f est la fonction nulle).

(e) Le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction continue $|f|$ sur le segment $[0, 1]$ donne l'existence de $x_0 \in [0, 1]$ tel que $|f(x_0)| = \inf_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a alors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x_0) + f(x) - f(x_0)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \\ &\leq \inf_{x \in [0, 1]} |f(x)| + K(f)|x - x_0| \\ &\leq \inf_{x \in [0, 1]} |f(x)| + K(f). \end{aligned}$$

Comme le membre de droite ne dépend plus de x , on en déduit que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \inf_{x \in [0, 1]} |f(x)| + K(f).$$

(f) L'application en question est évidemment minorée par zéro, et on va démontrer qu'elle n'est pas majorée, donc pas bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n: x \in [0, 1] \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}.$$

Il s'agit d'une application de classe \mathcal{C}^1 , donc lipschitzienne, et $K(f_n) \leq \|f'_n\|_\infty = \frac{\sqrt{n}}{2}$ d'après la question (c). En fait on a égalité, car si k est un rapport de Lipschitz de f , il faut que $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \leq k$ pour tout $x \in]0, 1]$, et en faisant tendre x vers zéro, on obtient $|f'(0)| \leq k$, c'est-à-dire $\|f'_n\|_\infty \leq k$. On a donc

$$K(f_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Or il est clair que $\|f_n\| = f_n(1) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, donc

$$\frac{K(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

256. RMS 2025 911 Mines Ponts PSI énoncé p. 41

Soit $f: (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto x^2 + y^2 + \frac{3}{xy}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

SOLUTION. — Non, car $f(x, x) = 2x^2 + \frac{3}{x^2} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.

257. RMS 2025 912 Mines Ponts PSI énoncé p. 41

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = (1 + i\frac{\alpha}{n})^n$. Montrer que $z_n \rightarrow e^{i\alpha}$.

(b) Diagonaliser A_n dans \mathbb{C} .

(c) Déterminer $\lim A_n^n$.

SOLUTION. — Voir RMS 2012 319 X ESPCI PC.

- (a) Pour n assez grand, $\operatorname{Re}(1 + i\frac{\alpha}{n}) > 0$, donc un de ses arguments est $\arctan(\frac{\alpha}{n})$. On a donc la forme trigonométrique suivante :

$$1 + i\frac{\alpha}{n} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \exp\left(i \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right).$$

Il en résulte que $(1 + i\frac{\alpha}{n})^n = (1 + \frac{\alpha^2}{n^2})^{n/2} e^{in \arctan(\alpha/n)} = \exp(\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}) + in \arctan(\frac{\alpha}{n})) = \exp(\frac{\alpha^2}{2n} + i\alpha + o(1))$, qui tend bien vers $e^{i\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$.

- (b) Le polynôme caractéristique de A_n vaut $(X - 1)^2 + \frac{a^2}{n^2}$, donc les valeurs propres complexes de A_n sont simples et valent $1 \pm i\frac{a}{n}$, donc A_n est diagonalisable dans \mathbb{C} . On résout $AX = (1 + \varepsilon i\frac{a}{n})X$, avec $X = (x \ y)^\top \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned} AX = \left(1 + \varepsilon i\frac{a}{n}\right) X &\iff x + \frac{a}{n}y = \left(1 + \varepsilon i\frac{a}{n}\right)x \\ &\iff y = \varepsilon ix. \end{aligned}$$

Les deux droites propres de A_n sont donc indépendantes de n . Si l'on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C}),$$

alors

$$P^{-1}A_nP = \operatorname{diag}\left(1 + i\frac{a}{n}, 1 - i\frac{a}{n}\right) \quad \text{donc} \quad A_n^n = P \operatorname{diag}\left(\left(1 + i\frac{a}{n}\right)^n, \left(1 - i\frac{a}{n}\right)^n\right) P^{-1}.$$

- (c) D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \lim A_n^n &= P \operatorname{diag}(e^{ia}, e^{-ia}) P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ia} & e^{-ia} \\ ie^{ia} & -ie^{-ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La limite cherchée est donc la matrice de la rotation d'angle $-a$ dans le plan euclidien orienté usuel.

258. RMS 2025 913 Mines Ponts PSI énoncé p. 41

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geq 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

- (a) Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque la suite (x_n) est constante.
 (b) Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque $x_n = ab^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
 (c) Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $(x_n^{1/2^n})$ est bornée.

SOLUTION. — C'est RMS 2009 374 ESPCI PC

La première question fait appel à l'étude des suites récurrentes $y_{n+1} = f(y_n)$: on ne rappelle pas explicitement tous les théorèmes utilisés.

- (a) Dans ce cas, $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$ pour tout n . Soit $f : x \mapsto \sqrt{a + x}$, définie et continue sur $I = [0, +\infty[$. On pose $\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$: c'est l'unique point fixe de f sur I . Il est facile de vérifier les faits suivants :

- Les deux intervalles $I_1 = [0, \ell]$ et $I_2 = [\ell, +\infty[$ sont stables par f .
- Sur I_1 , la fonction f vérifie $f(x) \geq x$, et sur I_2 , la fonction f vérifie $f(x) \leq x$.

Ceci entraîne que, si $y_1 \in I_1$, la suite (y_n) est croissante, majorée par ℓ , et convergente vers ℓ , et que, si $y_1 \in I_2$, la suite (y_n) est décroissante, minorée par ℓ , et convergente vers ℓ .

On peut préciser que c'est toujours le premier cas qui se produit, car $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ pour tout a .

- (b) On note (z_n) la suite de la question précédente, définie par $z_1 = \sqrt{a}$ et $z_{n+1} = \sqrt{a + z_n}$, et (y_n) la suite associée à (x_n) , où $x_n = ab^{2^n}$. On pose en outre, pour $1 \leq p \leq n$:

$$y_{n,p} = \sqrt{x_p + \sqrt{x_{p+1} + \sqrt{\cdots + \sqrt{x_n}}}}$$

On fixe ensuite $n \in \mathbb{N}^*$, et on montre par récurrence descendante sur p que $y_{n,p} = b^{2^{p-1}} z_{n-p+1}$. Pour $p = n$, on a $y_{n,n} = \sqrt{x_n} = \sqrt{ab^{2^n}} = b^{2^{n-1}} \sqrt{a} = b^{2^{n-1}} z_1$: la propriété est vérifiée. Si $y_{n,p} = b^{2^{p-1}} z_{n-p+1}$ avec $2 \leq p \leq n$, alors

$$y_{n,p-1} = \sqrt{x_{p-1} + y_{n,p}} = \sqrt{ab^{2^{p-1}} + b^{2^{p-1}} z_{n-p+1}} = b^{2^{p-2}} \sqrt{a + z_{n-p+1}} = b^{2^{p-2}} z_{n-p+2} = b^{2^{p-2}} z_{n-(p-1)+1}.$$

C'est bien la propriété au rang $p-1$, et on déduit de ce calcul que $y_n = y_{n,1} = bz_n$, donc que (y_n) converge, et que sa limite vaut $b\ell$, avec les notations de la question précédente.

- (c) Commençons par établir le lemme suivant : si (x_n) et (x'_n) sont deux suites positives, si (y_n) et (y'_n) sont les suites de racines emboîtées qui leur sont associées, et si $x_n \leq x'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $y_n \leq y'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer cela, on reprend les notations de la question précédente, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on prouve par récurrence descendante sur p que $y_{n,p} \leq y'_{n,p}$.

Si $p = n$, il s'agit d'établir que $\sqrt{x_n} \leq \sqrt{x'_n}$, ce qui est vrai puisque $x_n \leq x'_n$. Supposons que $y_{n,p} \leq y'_{n,p}$. Alors, comme $x_{p-1} \leq x'_{p-1}$, on a $x_{p-1} + y_{n,p} \leq x'_{p-1} + y'_{n,p}$, donc

$$y_{n,p-1} = \sqrt{x_{p-1} + y_{n,p}} \leq \sqrt{x'_{p-1} + y'_{n,p}} = y'_{n,p-1}.$$

On en déduit (pour $p = 1$) que $y_{n,1} = y_n \leq y'_{n,1} = y'_n$, ce qui établit le lemme.

Par conséquent, la suite (y_n) est croissante : il suffit d'appliquer le lemme à la suite (x'_n) définie par $x'_n = x_n + \sqrt{x_{n+1}}$ et $x'_k = x_k$ pour tout $k \neq n$. Alors on a en particulier $y_n \leq y'_n$, ce qui s'écrit

$$y_n \leq y'_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n+1}}}}}}$$

On peut alors prouver l'équivalence demandée.

⇒ On suppose que (y_n) converge. Soit $M > 0$; montrons par récurrence sur n la propriété suivante :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_k \leq M) \Rightarrow x_n \leq M^{2^n}. \quad (\mathcal{P}_n)$$

Pour $n = 1$, la majoration $y_1 = \sqrt{x_1} \leq M$ entraîne en effet $x_1 \leq M^2 = M^{2^1}$. Supposons que (\mathcal{P}_{n-1}) soit vraie, et que $y_k \leq M$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Définissons la suite (x'_n) par $x'_{n-1} = x_{n-1} + \sqrt{x_n}$ et $x'_k = x_k$ pour tout $k \neq n-1$. Alors $y'_k = y_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et $y'_{n-1} = y_n$: on a donc $y'_k \leq M$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et l'hypothèse (\mathcal{P}_{n-1}) affirme que $x'_{n-1} \leq M^{2^{n-1}}$. Or $x_n = (x'_{n-1} - x_{n-1})^2$, ce qui entraîne que

$$x_n \leq (x'_{n-1})^2 \leq (M^{2^{n-1}})^2 = M^{2^n},$$

ce qui établit la propriété (\mathcal{P}_n) . Comme la suite (y_n) converge, elle est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $y_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $x_n \leq M^{2^n}$, puis que la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée (par M).

⇐ On suppose que la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par M . Alors $x_n \leq x'_n = M^{2^n}$. La question (b) montre que la suite (y'_n) converge, donc est majorée. Le lemme établi ci-dessus montre que (y_n) est elle aussi majorée. Comme elle est croissante (conséquence du lemme), elle converge.

259. RMS 2025 914 Mines Ponts PSI énoncé p. 41

Pour $n \geq 2$, on s'intéresse à l'équation $e^x - x^n = 0$.

- (a) Montrer que cette équation admet exactement deux solutions positives u_n et v_n , avec $u_n < v_n$.
 (b) i. Montrer que (u_n) tend vers une limite ℓ .

ii. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

(c) Montrer que la suite (v_n) diverge.

SOLUTION. — Voir RMS 2009 979 Centrale PSI et RMS 2016 Mines Ponts PSI, dont les énoncés étaient plus longs : ils demandaient un équivalent puis un développement asymptotique de (v_n) , qu'on a laissés ici.

On note que x doit être strictement positif pour être solution de l'équation, qui est donc équivalente à $x = \ln(x^n) = n \ln x$, où encore à

$$f(x) := \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}.$$

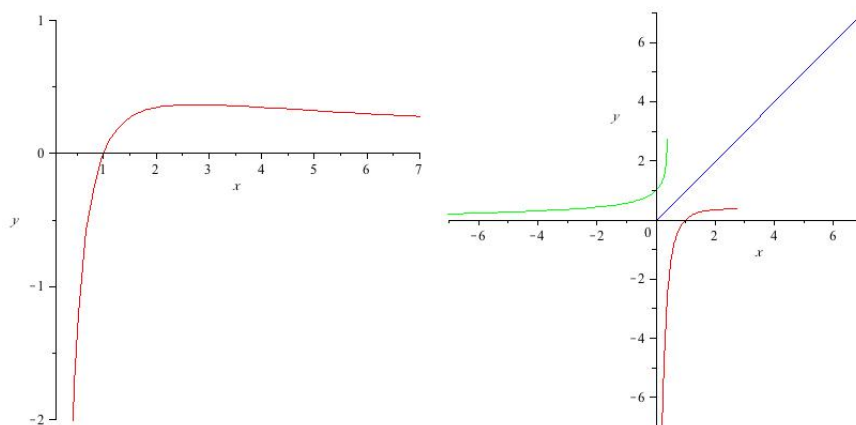
(a) Une étude rapide de f , avec $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, donne le tableau de variation suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 0 \nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow 0

Cette étude prouve que, si $n \geq 3$, de sorte que $\frac{1}{n} < \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède deux solutions u_n et v_n vérifiant l'encadrement :

$$1 < u_n < e < v_n.$$

Voici les graphes de f et de g et de sa réciproque (voir la question suivante) :



(b) On note g la restriction de f à l'intervalle $]0, e[$. Comme g est continue (respectivement de classe \mathcal{C}^1 avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, e[$) et strictement croissante, elle réalise une bijection sur son image, qui est $]-\infty, \frac{1}{e}[$, et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (respectivement de classe \mathcal{C}^1). Par suite

$$u_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} g^{-1}(0) = 1 = \ell.$$

Plus précisément, $u_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = g^{-1}(0) + \frac{[g^{-1}]'(0)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $[g^{-1}]'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = 1$, on obtient

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) Comme $f(n) = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ et $f(n^2) = \frac{2 \ln n}{n^2} < \frac{1}{n}$, on peut affirmer que

$$n < v_n < n^2,$$

ce qui prouve pour commencer que

$$\lim v_n = +\infty.$$

On écrit ensuite la relation $f(v_n) = \frac{1}{n}$ sous la forme $v_n = n \ln v_n$, et on itère cette relation, ce qui donne $v_n = n \ln(n \ln v_n) = n \ln n + n \ln \ln v_n$. Comme $v_n < n^2$, on a $0 < n \ln(\ln v_n) < n \ln(2 \ln n)$, qui est négligeable devant $n \ln n$. On vient donc de trouver un équivalent de v_n :

$$v_n \sim n \ln n.$$

Pour aller plus loin, on itère de nouveau la relation de définition de v_n sous la forme $v_n = n \ln n + n \ln(\ln(n \ln v_n)) = n \ln n + n \ln(\ln n + \ln \ln v_n)$. De $v_n \sim n \ln n$, on déduit que $\ln \ln v_n \sim \ln \ln n$, puis que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} v_n &= n \ln n + n \ln \left(\ln n \left[1 + \frac{\ln \ln v_n}{\ln n} \right] \right) \\ &= n \ln n + n \ln \ln n + \ln \left[1 + \frac{\ln \ln v_n}{\ln n} \right] \\ &= n \ln n + n \ln \ln n + o(n \ln \ln n). \end{aligned}$$

260. RMS 2025 915 Mines Ponts PSI énoncé p. 41

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}$ et $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \frac{-1}{\ln(n+3)}$.

- (a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.
- (b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$?
- (c) Montrer, pour tout entier $p \geq 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

SOLUTION. — C'est RMS 2009 982 Centrale PSI.

- (a) On va, de plus, calculer la somme. Il s'agit de démontrer que la suite (S_n) des sommes partielles converge. Pour cela, il suffit de montrer que les trois suites de termes généraux S_{3n-1} , S_{3n} et S_{3n+1} convergent vers la même limite. De plus, comme $S_{3n} = S_{3n-1} + u_{3n}$ et $S_{3n+1} = S_{3n-1} + u_{3n} + u_{3n+1}$ et comme la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers zéro, il suffit de démontrer que $(S_{3n-1})_{n \geq 0}$ converge ; sa limite sera alors la somme de la série. Or, en regroupant trois par trois les termes ci-dessous, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{3n-1} = \sum_{k=0}^{3n-1} u_k = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{3i} + u_{3i+1} + u_{3i+2}) = \sum_{i=0}^{n-1} 0 = 0.$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et que sa somme est nulle.

- (b) La série de terme général a_n^2 n'est pas nécessairement convergente, comme le montre l'exemple de $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (la convergence de $\sum a_n$ est obtenue en appliquant le théorème spécial des séries alternées), pour lequel $a_n^2 = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente.

REMARQUE. — Si on suppose de plus que $a_n \geq 0$ pour tout n assez grand, la réponse devient positive. En effet, si $\sum a_n$ converge, alors (a_n) converge vers zéro, donc $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ pour n assez grand, ce qui entraîne que $\sum a_n^2$ converge.

- (c) On reprend les idées de la question (a), cette fois pour minorer S_{3n-1} , en minorant $2^p - 2$ par 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{3n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2^p}{[\ln(i+3)]^p} + \frac{(-1)^p}{[\ln(i+3)]^p} + \frac{(-1)^p}{[\ln(i+3)]^p} \right) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2^p}{[\ln(i+3)]^p} - \frac{1}{[\ln(i+3)]^p} - \frac{1}{[\ln(i+3)]^p} \right) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{[\ln(i+3)]^p}. \end{aligned}$$

On montre enfin que la série de terme général $\frac{1}{[\ln(i+3)]^p}$ diverge : les comparaisons usuelles montrent qu'au voisinage de l'infini, $\frac{1}{[\ln(i+3)]^p} \geq \frac{1}{i}$, ce qui achève la preuve.

261. RMS 2025 916 Mines Ponts PSI énoncé p. 41

On donne $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

- (a) On pose $u_k = \frac{(-1)^k}{k}$. Étudier la convergence et la somme de $\sum_{k \geq 1} u_k$.
 (b) On donne σ bijection de \mathbb{N}^* avec

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\sigma(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	...

Donner $\sigma(k)$.

- (c) Déterminer la somme de la série $\sum_{k \geq 1} u_{\sigma(k)}$.

SOLUTION. —

- (a) La série de terme général $\frac{(-1)^k}{k}$ satisfait manifestement les hypothèses du théorème des séries alternées, donc converge. On remarque que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$ donc que la somme partielle S_n d'ordre n de la série vaut

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt = - \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} dt = - \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} dt \\ &= - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

Comme $|\int_0^1 \frac{(-t)^k}{1+t} dt| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, on en déduit que

$$\sum_{k \geq 1} u_k = -\ln 2.$$

- (b) La bijection σ consiste à placer dans l'ordre, deux entiers impairs puis un entier pair. C'est pourquoi, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sigma(3k+1) &= 4k+1 \\ \sigma(3k+2) &= 4k+3 \\ \sigma(3k+3) &= 2k+2 \end{aligned}$$

La dernière ligne peut être remplacée par $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sigma(3k) = 2k$.

- (c) Pour le moment, on ne sait pas encore si $\sum_{k \geq 1} u_{\sigma(k)}$ converge. On va le démontrer en prouvant que la suite (S_n) des sommes partielles converge, par un calcul explicite qui donnera du même coup la valeur de la somme.

Pour cela, on sait que (S_n) converge si et seulement si les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite. On généralise aisément à « (S_n) converge si et seulement si les trois suites extraites (S_{3n}) , (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergent vers la même limite ».

Comme $S_{3n+1} = S_{3n} + u_{\sigma(3n+1)}$ et $S_{3n+2} = S_{3n} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)}$ avec la suite $(u_{\sigma(n)})$ de limite nulle, il suffit en fait de montrer que (S_{3n}) converge et de calculer sa limite. Or

$$S_{3n} = A_n - B_n,$$

où A_n est la somme des inverses des entiers impairs de 1 à $4n-1$, et B_n est la somme des inverses des entiers pairs de 2 à $2n$. On a donc

$$\begin{aligned} A_n &= H_{4n} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} = H_{4n} - \frac{1}{2} H_{2n} \\ &= \ln(4n) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}(\ln(2n) + \gamma + o(1)) = \frac{1}{2} \ln n + \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + o(1) \\ B_n &= \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1). \end{aligned}$$

Par suite, $S_{3n} = \frac{3}{2} \ln 2 + o(1)$, et on conclut que $\sum_{k \geq 1} u_{\sigma(k)}$ converge de somme

$$\sum_{k \geq 1} u_{\sigma(k)} = \frac{3}{2} \ln 2.$$

262. RMS 2025 917 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$.

- (a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
- (b) Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

SOLUTION. — On vérifie immédiatement par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Supposons que (u_n) soit croissante. Dans ce cas, elle possède une limite $\ell \in]0, +\infty]$, donc $\frac{1}{n^2} = o(u_{n+1})$ quand $n \rightarrow +\infty$, et la relation de récurrence montre alors que

$$u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{n}.$$

Pour n assez grand, on a donc $u_{n+1} \leq 2\frac{u_n}{n}$, donc $u_{n+1} < u_n$ pour n assez grand, ce qui contredit la croissance de (u_n) .

On en déduit l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} < u_{n_0}$. Montrons alors que la suite est décroissante à partir du rang n_0 en établissant que la propriété « $u_{n+1} \leq u_n$ » est héréditaire.

On suppose donc que $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq u_n$, ou encore que $(n-1)u_n \geq \frac{1}{n}$, ce qui impose $n > 1$ et $u_n \geq \frac{1}{n(n-1)}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_{n+2} &= \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{u_n}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{u_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\geq \frac{1}{(n+1)n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1 + (n-1)(n+1) - n(n-1)}{(n+1)^2 n(n-1)} \\ &= \frac{n+1 + n^2 - 1 - n^2 + n}{(n+1)^2 n(n-1)} \\ &= \frac{2}{(n+1)^2 (n-1)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Le principe de récurrence montre alors que (u_n) décroît à partir d'un certain rang (le rang n_0 évoqué plus haut) et, comme (u_n) est positive, donc minorée, elle converge. On note ℓ sa limite. En faisant tendre n vers l'infini dans la relation de récurrence de la suite (u_n) on trouve

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

- (b) Comme (u_n) converge, elle est bornée, donc $\frac{u_n}{n} = O(\frac{1}{n})$ donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} = O(\frac{1}{n})$, donc $u_n = O(\frac{1}{n})$, et un nouvel appel à la relation de récurrence montre que $u_{n+1} = O(\frac{1}{n^2})$, ou encore $u_n = O(\frac{1}{n^2})$.

Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge.

263. RMS 2025 918 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

- (a) À quelle condition nécessaire la série $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ est-elle convergente? Cette condition est-elle suffisante? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
- (b) On suppose de plus que f est croissante à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}$. Déterminer le signe de u_n et la limite de la suite (u_n) .

(c) On suppose également que, pour tout k assez grand, $\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} \geq \frac{2}{f(k+1)}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

SOLUTION. — Ressemble à RMS 2020 179 ENS PSI.

(a) Si une série converge, il faut que son terme général soit de limite nulle. On en déduit que, si la série $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ converge, il faut que $|\frac{(-1)^k}{f(k)}| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, donc que (on rappelle que f est positive)

$$\lim_{+\infty} f(k) = +\infty.$$

Il s'agit ici de la limite de la suite $(f(k))$, et pas de celle la fonction f .

Cette condition n'est pas suffisante : si $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors la somme partielle d'ordre $2n$ de $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ vaut

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{f(2k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{f(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Comme $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2} \rightarrow \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ quand $n \rightarrow +\infty$, on conclut que $\lim S_{2n} = +\infty$, donc que $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ diverge.

(b) Si f est croissante à partir d'un certain rang (et de limite infinie), alors la série $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ satisfait les hypothèses du théorème des séries alternées à partir d'un certain rang, donc converge. Cela permet de considérer son reste d'ordre $n-1$, noté

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}.$$

Le théorème en question dit aussi que le reste d'une telle série est du signe de son premier terme, donc le signe de u_n est $(-1)^n$ (à partir d'un certain rang, là encore).

Par ailleurs, comme toute suite de restes d'une série convergente, la suite (u_n) converge vers zéro :

$$\lim u_n = 0.$$

(c) Montrons que, si $\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} \geq \frac{2}{f(k+1)}$ pour tout k assez grand, $\sum u_n$ satisfait elle aussi les hypothèses du théorème des séries alternées.

On sait déjà que la suite (u_n) a des signes alternés pour n assez grand et qu'elle est de limite nulle. Il reste à voir que $(|u_n|)$ décroît. Or

$$\begin{aligned} |u_n| - |u_{n+1}| &= (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} \\ &= (-1)^n (u_n + u_{n+1}) \\ &= (-1)^n \left[\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)} \right] \\ &= (-1)^n \left[\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{f(k+1)} \right] \\ &= (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)} \right]. \end{aligned}$$

Posons $g_k = \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'hypothèse faite sur f à la première question montre que $g_k \geq 0$ et que $\lim g_k = 0$, et la différence

$$g_k - g_{k+1} = \frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} - \frac{2}{f(k+1)}$$

est positive pour k assez grand. Cela prouve que $\sum_{k \geq n} (-1)^k [\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)}]$ satisfait les hypothèses du théorème des séries alternées pour n assez grand, donc que sa somme est du signe de son premier terme, à savoir $(-1)^n$. Par conséquent, $|u_n| - |u_{n+1}|$ est bien positif pour n assez grand, et $\sum u_n$ converge.

264. RMS 2025 919 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f .

SOLUTION. — Voir RMS 2012 342 X ESPCI PC.

On raisonne par contraposition en supposant qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ n'ayant qu'un nombre fini d'antécédents par f . Soit x_0 le plus grand d'entre eux. Comme $g := f - y_0$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$, et comme g est continue, elle conserve un signe fixe sur $]x_0, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires). Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $g > 0$ sur $]x_0, +\infty[$.

La fonction f étant continue sur le compact $[0, x_0]$, elle y admet un minimum noté m . Alors un nombre réel $y < \min(m, y_0)$ n'a pas d'antécédent par f .

265. RMS 2025 920 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f \circ f = 2f - \text{id}$.

- (a) Montrer que f est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- (b) On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $(\frac{1}{n}f_n)$ admet une limite, que l'on précisera.
- (c) Déterminer f .

SOLUTION. — On remarque que l'identité de \mathbb{R} est solution de $f \circ f = 2f - \text{id}$.

- (a) On commence par montrer que f est injective. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $f(x) = f(y)$, en composant par f on obtient $f(f(x)) = f(f(y))$ ou encore $2f(x) - x = 2f(y) - y$. Compte-tenu de ce que $f(x) = f(y)$, cela implique que $x = y$.

La fonction f est donc continue et injective, ce qui entraîne sa monotonie stricte (ce résultat n'est pas dans le cours, et il est démontré à la fin de cet exercice).

- On montre ensuite que f est strictement croissante. Dans le cas contraire, comme elle est strictement monotone, elle serait strictement décroissante, mais alors $f \circ f$, strictement croissante, serait égale à $2f - \text{id} = 2f + (-\text{id})$, strictement décroissante en tant que somme de fonctions strictement décroissantes. C'est absurde.
- Le théorème de la limite monotone montre alors que f possède des limites (finies ou infinies) en $\pm\infty$. On démontre par l'absurde qu'elles sont infinies. Supposons par exemple que $L = \lim_{+\infty} f$ soit finie. Comme f est continue, on aurait $\lim_{+\infty} f \circ f = f(L)$, alors que $\lim_{+\infty} (2f - \text{id}) = -\infty$: contradiction. On conclut que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ (et pas $-\infty$ car f est croissante). On démontre de même que $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

On conclut que f est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $x_n = f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'égalité $f \circ f = 2f - \text{id}$ à x_n , on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n.$$

Comme l'équation caractéristique $z^2 - 2z + 1 = (z - 1)^2 = 0$ de cette récurrence linéaire à coefficients constants possède la racine double 1, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = an + b$. On trouve ensuite $x_0 = b = f(x)$ et $x_1 = a + b = (f \circ f)(x)$, donc $a = (f \circ f)(x) - f(x) = f(x) - x$ et $b = f(x)$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x_n}{n} = \frac{f_n(x)}{n} = f(x) - x + \frac{f(x)}{n}.$$

Il en résulte que la suite de fonctions $(\frac{1}{n}f_n)$ converge simplement vers

$$f - \text{id}.$$

- (c) Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ alors f est l'identité. Dans le cas contraire, fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. Soit $\alpha = f(x) - x$. Les calculs de la question précédente assurent que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(x) = f_{n-1}(x) = (n-1)\alpha + f(x) = x + n\alpha$, et ceci reste valable pour $n = 0$ car $f^0 = \text{id}$.

f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , en composant à droite par f^{-1} la relation $f \circ f = 2f - \text{id}$ on obtient $f = 2\text{id} - f^{-1}$, et donc $\text{id} = 2f^{-1} - f^{-1} \circ f^{-1}$ en composant une nouvelle fois par f^{-1} à droite.

On a donc $f^{-1} \circ f^{-1} = 2f^{-1} - \text{id}$, ce qui évalué en $x + \alpha$ donne, comme $f^{-1}(x + \alpha) = x$, $f^{-1}(x) = 2x - (x + \alpha) = x - \alpha$.

Par récurrence (ou en adaptant le raisonnement de la question précédente, puisque f^{-1} vérifie les mêmes hypothèses) on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-n}(x) = x - n\alpha$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}, f^n(x) = x + n\alpha$.

Soit alors $y \in \mathbb{R}$ et $\beta = f(y) - y$. On a de même $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(y) = y + n\beta$.

- Si $\alpha > 0$, soit $p = \lfloor \frac{y-x}{\alpha} \rfloor$, qui vérifie donc $p \leq \frac{y-x}{\alpha} < p+1$ soit $f^p(x) = x + p\alpha \leq y < x + (p+1)\alpha = f^{p+1}(x)$. Par croissance stricte de f donc de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $f^{n+p}(x) \leq f^n(y) < f^{n+p+1}(x)$ soit $x + (n+p)\alpha \leq y + n\beta < x + (n+p+1)\alpha$ et donc $\frac{x+(n+p)\alpha}{n} \leq \frac{y+n\beta}{n} < \frac{x+(n+p+1)\alpha}{n}$. Passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\alpha \leq \beta \leq \alpha$ soit $\beta = \alpha$.
- De même si $\alpha < 0$, on a en notant $p = \lfloor \frac{y-x}{\alpha} \rfloor$ l'encadrement $f^p(x) = x + p\alpha \geq y > x + (p+1)\alpha = f^{p+1}(x)$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+p}(x) \geq f^n(y) > f^{n+p+1}(x)$ soit $x + (n+p)\alpha \geq y + n\beta > x + (n+p+1)\alpha$ et donc $\frac{x+(n+p)\alpha}{n} \geq \frac{y+n\beta}{n} > \frac{x+(n+p+1)\alpha}{n}$, et en passant à la limite on obtient $\beta = \alpha$.

On a ainsi prouvé que $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) - y = \alpha$, autrement dit que f est la translation $y \mapsto y + \alpha$.

N.B. Réciproquement, une telle fonction est bien continue et vérifie l'équation $f \circ f = 2f - \text{id}$.

LEMME. — Si I est un intervalle non banal de \mathbb{R} et si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et injective, alors f est (strictement) monotone.

On raisonne par l'absurde en supposant que f est injective et continue, et n'est pas monotone. La négation de la monotonie de f est : il existe $(a, b, c, d) \in I^4$ tel que $a < b$ et $c < d$ et $f(a) < f(b)$ et $f(c) > f(d)$. On pose alors

$$g: t \in [0, 1] \mapsto f((1-t)b + dt) - f((1-t)a + ct).$$

Il s'agit d'une fonction continue et on constate que $g(0) = f(b) - f(a) > 0$ et $g(1) = f(d) - f(c) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence de $t_0 \in]0, 1[$ tel que $g(t_0) = 0$, soit $f((1-t_0)b + dt_0) = f((1-t_0)a + ct_0)$. L'injectivité de f entraîne que $(1-t_0)b + dt_0 = (1-t_0)a + ct_0$, donc que

$$(1-t_0)(b-a) = t_0(c-d).$$

C'est impossible, car le membre de gauche est strictement positif alors que celui de droite est strictement négatif.

266. RMS 2025 921 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ où g est à valeurs dans $[0, 1]$ et f décroissante. On pose $c = \int_a^b g$. Montrer que $\int_{b-c}^b f \leq \int_a^b fg \leq \int_a^{a+c} f$. Ind. On pourra introduire une fonction d'une variable bien choisie.

SOLUTION. —

Commençons par la majoration.

Soit, pour tout $x \in [a; b]$, $H(x) = \int_a^x fg$ et $K(x) = \int_a^{a+x} g$. (K est bien définie, en effet g est à valeur dans $[0; 1]$) donc pour tout $x \in [a; b]$, on a $0 \leq \int_a^x g \leq x - a \leq b - a$ donc $a \leq a + \int_a^x g \leq x \leq b$.

H et K sont de classe \mathcal{C}^1 (H est une primitive de fonction continue, $x \mapsto a + \int_a^x g$ aussi donc K est une composée de fonctions \mathcal{C}^1) et pour tout $x \in [a; b]$ on a

$$H'(x) = f(x)g(x) \quad \text{et} \quad K'(x) = g(x)f(a + \int_a^x g)$$

f étant décroissante, on a $x \geq a + \int_a^x g$ donc $f(x) \leq f(a + \int_a^x g)$, et comme $g(x) \geq 0$, on obtient $H'(x) \leq K'(x)$.

Enfin $H(a) = 0 = K(a)$ donc pour tout $x \in [a; b]$, on a $H(x) \leq K(x)$ ($K - H$ est croissante, nulle en a donc positive à droite de a), en particulier $H(b) \leq K(b)$ c'est-à-dire $\int_a^b fg \leq \int_a^{a+c} f$

De même en notant $A(x) = \int_{b-x}^b fg$ et $B(x) = \int_x^b fg$, on a pour tout $x \in [a; b]$, $A'(x) = -g(x)f(b - \int_x^b g)$ et $B'(x) = -f(x)g(x)$, avec $x \leq b - \int_x^b g$ donc $f(x) \geq f(b - \int_x^b g)$ et donc $A'(x) \geq B'(x)$.

Comme $A(b) = 0 = B(b)$, on en déduit que pour tout $x \in [a; b]$, on a $A(x) \leq B(x)$ ($A - B$ est croissante, nulle en b donc négative à gauche de b), en particulier $A(a) \leq B(a)$ c'est-à-dire $\int_{b-c}^b f \leq \int_a^b fg$.

267. RMS 2025 922 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$.

SOLUTION. — Voir RMS 2017 357 X ENS PSI. On résout l'exercice en supposant seulement f continue.

Analyse. Soit f une telle fonction. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t) dt$. Comme f est continue, le théorème fondamental de l'intégration montre que $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ sont de classe \mathcal{C}^1 , et finalement f est de classe \mathcal{C}^1 . De plus, en dérivant la relation de départ, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) + \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = f'(x) + \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, cette égalité prouve que f est de classe \mathcal{C}^2 et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0.$$

Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.

Synthèse. Avec $f = a \cos + b \sin$, on calcule le membre de gauche de l'équation fonctionnelle, en commençant par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt &= f(x) + [(x-t)(a \sin t - b \cos t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x (a \sin t - b \cos t) dt \\ &= f(x) + bx + [-a \cos t - b \sin t]_0^x \\ &= a \cos x + b \sin x + bx - a \cos x - b \sin x + a \\ &= bx + a. \end{aligned}$$

Le résultat vaut 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$. Il y a donc une et une seule fonction solution :

$$f = \cos$$

268. RMS 2025 923 Mines Ponts PSI énoncé p. 42

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (te^{i\theta})^n}{1 - te^{i\theta}} d\theta$. La variable de l'intégrale est t , pas θ

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} d\theta$. Même chose ici

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

(d) Déterminer de même $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

SOLUTION. —

(a) Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la fonction $f_n : t \mapsto e^{i\theta} \frac{1 - (te^{i\theta})^n}{1 - te^{i\theta}}$ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, de sorte que l'existence de l'intégrale est assurée. Comme

$$e^{i\theta} \frac{1 - (te^{i\theta})^n}{1 - te^{i\theta}} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} (te^{i\theta})^k = \sum_{k=1}^n t^{k-1} e^{ik\theta},$$

et comme $\int_0^1 t^{k-1} dt = \frac{1}{k}$, on obtient bien

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (te^{i\theta})^n}{1 - te^{i\theta}} d\theta.$$

(b) On applique le théorème de convergence dominée sur $[0, 1[$.

La suite de fonctions continues (f_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction continue $t \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}$ et vérifie l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) = \frac{2}{|1-te^{i\theta}|},$$

où la fonction φ est continue sur $[0, 1]$, donc *a fortiori* intégrable sur $[0, 1[$. On en déduit que $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge de somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}} d\theta.$$

(c) On commence par calculer

$$|1-te^{i\theta}|^2 = (1-t\cos\theta)^2 + t^2\sin^2\theta = 1-2t\cos\theta+t^2 = (t-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}} d\theta &= \int_0^1 \frac{e^{i\theta}(1-te^{-i\theta})}{|1-te^{i\theta}|^2} d\theta = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}-t}{|1-te^{i\theta}|^2} d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{\cos\theta-t}{(t-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta + i \int_0^1 \frac{\sin\theta}{(t-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} [\ln((t-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta)]_0^1 + i \left[\arctan\left(\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \right]_0^1. \end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} &= \arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \arctan\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right) - \arctan\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \\ &= \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi-\theta}{2} \end{aligned}$$

En effet, comme $\theta \in]0, \pi[$, les deux angles $\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ sont tous deux dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, intervalle sur lequel on a $\arctan(\tan(x)) = x$.

On remarque que l'expression reste valable pour $\theta = \pi$ mais pas pour $\theta = 0$ (elle y vaut 0 et pas $\frac{\pi}{2}$). Enfin, on remarque que la fonction $\theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ est impaire et 2π -périodique, ce qui permet de la calculer sur \mathbb{R} .

(d) Toujours pour $\theta \in]0, \pi[$, en prenant cette fois la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} &= -\frac{1}{2} [\ln((1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta) - \ln(\cos^2\theta + \sin^2\theta)] = -\frac{1}{2} \ln(2-2\cos\theta) \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1-\cos\theta) = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = -\ln 2 - \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

On remarque que l'expression reste valable pour $\theta = \pi$ et que la somme n'est pas définie pour $\theta = 0$. Enfin, on remarque que la fonction $\theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ est paire et 2π -périodique, ce qui permet de la calculer sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

269. RMS 2025 924 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

Calculer $\int_0^{+\infty} [x]e^{-x} dx$.

SOLUTION. — Voir RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris.

On note f la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto \lfloor x \rfloor e^{-x}$. La continuité de f et la limite $\lim_{+\infty} x^2 f(x) = 0$ montrent que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. On calcule ensuite $\int_0^n f(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$:

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} k e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} k (e^{-k} - e^{-(k+1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-k} - \sum_{j=1}^n (j-1) e^{-j} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} - (n-1) e^{-n}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) e^{-n} = 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}.$$

270. RMS 2025 925 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} dt$.

- (a) Montrer que $I_n(x)$ est bien définie.
- (b) Calculer $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ et trouver une relation de récurrence.

SOLUTION. —

- (a) On fixe $x \in \mathbb{R}$. La fonction \cos réalisant une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, il existe un unique $t_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos(t_0) = \cos(x)$. La fonction

$$f_n : t \mapsto \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)}$$

est alors définie et continue sur $[0, \pi] \setminus \{t_0\}$. Quitte à changer x en $-x$, ce qui ne modifie pas f , on peut supposer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = t_0 + 2k\pi$. Montrons que f admet un prolongement par continuité en t_0 grâce à un développement limité (pour h tendant vers zéro) :

$$\begin{aligned} f(t_0 + h) &= \frac{\cos(nt_0 + nh) - \cos(nt_0 + 2nk\pi)}{\cos(t_0 + h) - \cos(t_0 + 2k\pi)} \\ &= \frac{\cos(nt_0) - \sin(nt_0)nh - \frac{\cos(nt_0)}{2}(nh)^2 + o(h^2) - \cos(nt_0)}{\cos(t_0) - \sin(t_0)h - \frac{\cos(t_0)}{2}h^2 + o(h^2) - \cos(t_0)} \\ &= \frac{\sin(nt_0)n + \frac{\cos(nt_0)}{2}n^2h + o(h)}{\sin(t_0) + \frac{\cos(t_0)}{2}h + o(h)} \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(nt_0)n}{\sin(t_0)} + o(1) & \text{si } \sin(t_0) \neq 0 \\ \frac{\cos(nt_0)n^2}{\cos(t_0)} + o(1) & \text{si } \sin(t_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, f se prolonge par continuité en t_0 , de sorte que $I_n(x)$ est bien définie, en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

- (b) On calcule la somme suivante, pour $t \in [0, \pi] \setminus \{t_0\}$, avec les notations de la question précédente :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) + f_{n-1}(t) &= \frac{\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) - [\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)]}{\cos(t) - \cos(x)} \\ &= 2 \frac{\cos(nt) \cos(t) - \cos(nx) \cos(x)}{\cos(t) - \cos(x)} \\ &= 2 \frac{\cos(nt)[\cos(t) - \cos(x) + \cos(x)] - \cos(nx) \cos(x)}{\cos(t) - \cos(x)} \\ &= 2 \cos(nt) + 2 \cos(x) f_n(t). \end{aligned}$$

Cette relation reste vraie en t_0 par continuité. Comme $\int_0^\pi \cos(nt) = \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = 0$, on en déduit que

$$I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x) = 2 \cos(x) I_n(x).$$

271. RMS 2025 926 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

- (a) Justifier que $I = \int_0^{+\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx$ converge.
- (b) Calculer explicitement I en admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

SOLUTION. — Soit $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \rfloor$. C'est une fonction continue par morceaux (elle est en escalier sur tout segment contenu dans $]0, +\infty[$).

- (a) Comme f est nulle sur $]1, +\infty[$, l'intégrale de f sur cet intervalle converge. Comme $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]0, 1]$ et que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.

Finalement, $I = \int_0^{+\infty} \lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \rfloor dx$ converge.

- (b) Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a les équivalences suivantes :

$$\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor = k \iff k \leq \frac{1}{\sqrt{x}} < k+1 \iff k^2 \leq \frac{1}{x} < (k+1)^2 \iff \frac{1}{(k+1)^2} < x \leq \frac{1}{k^2}.$$

Par la relation de Chasles, on en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{1/(k+1)^2}^{1/k^2} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{1/(k+1)^2}^{1/k^2} k dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme on a $\forall x \in]0, +\infty[$, $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$, on en déduit (la somme télescopique $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ vaut 1) que :

$$I = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{6}.$$

272. RMS 2025 927 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in]0, 1[$. Étudier l'intégrabilité de f sur \mathbb{R}_+ .

SOLUTION. — Voir RMS 2015 663 Mines Ponts PSI.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Il s'agit de montrer que F converge en $+\infty$, ou de façon équivalente, puisque F est croissante (car f est positive), que la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ou encore de façon équivalente que la série télescopique $\sum (F(n+1) - F(n))$ converge. Posons

$$u_n = F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t) dt \quad \text{et} \quad q = \frac{k+1}{2},$$

de sorte que $k < q < 1$. Par hypothèse sur f , il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$, $f(x+1) \leq mf(x)$. Posons $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a via le changement de variable $t = u + 1$,

$$u_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} f(t) dt = \int_n^{n+1} f(u+1) du \leq q \int_n^{n+1} f(u) du = qu_n.$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$, donc par comparaison à la série géométrique $\sum q^n$, qui converge puisque $q \in]0, 1[$, que la série $\sum u_n$ converge.

273. RMS 2025 928 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

On définit f sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 2x^7 + x$.

- (a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ .

(b) La fonction $F: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin(2x^7 + x)$ est-elle intégrable en $+\infty$?

(c) L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ est-elle convergente ?

SOLUTION. —

(a) La fonction f est continue, strictement croissante ($f'(x) = 14x^6 + 1 > 0$), $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

(b) Comme f est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+ dans lui-même et que $f' > 0$, sa réciproque, notée g , est elle aussi de classe \mathcal{C}^1 avec

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} = \frac{1}{14g(t)^6 + 1}.$$

Par ailleurs, $f(x) \sim 2x^7$ quand $x \rightarrow +\infty$, et il est toujours possible de substituer la variable dans un équivalent en a par une fonction de limite a : par exemple, on peut substituer x par $g(t)$ qui tend vers $a = +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui donne

$$f(g(t)) = t \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2g(t)^7 \quad \text{ou encore} \quad g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{t}{2}\right)^{1/7}.$$

L'expression de g' donnée plus haut montre alors que

$$g'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{t^{6/7}},$$

où $c = \frac{2^{1/7}}{14}$. Le changement de variable légitime $x = g(t)$ montre que les deux intégrales ci-dessous ont la même nature :

$$\int_0^{+\infty} |F(x)| dx = \int_0^{+\infty} |\sin t| g'(t) dt.$$

Ce qui précède montre que $|\sin t| g'(t) \sim c \frac{|\sin t|}{t^{6/7}}$ quand $t \rightarrow +\infty$, et cet équivalent de fonctions positives montre que $\int_0^{+\infty} |F(x)| dx$ a la même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{6/7}} dt$.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$ diverge pour tout $\alpha \leq 1$ (faut-il vraiment tout redémontrer ?), donc F n'est pas intégrable en $+\infty$.

(c) Le même changement de variable montre que les deux intégrales ci-dessous ont la même nature, et même valeur en cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} F(x) dx = \int_0^{+\infty} (\sin t) g'(t) dt.$$

On va montrer que ces intégrales convergent.

Comme $t \mapsto (\sin t) g'(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, il suffit de montrer que $y \mapsto \int_0^y (\sin t) g'(t) dt$ possède une limite finie quand $y \rightarrow +\infty$. Pour cela, on pose $n = n_y = \lfloor \frac{y}{\pi} \rfloor$, de sorte que $n_y \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$ et que

$$\int_0^y (\sin t) g'(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \int_{n\pi}^y (\sin t) g'(t) dt \quad \text{où} \quad u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (\sin t) g'(t) dt.$$

Comme g' est positive et décroissante, et comme $n\pi \leq y < (n+1)\pi$, on a

$$\left| \int_{n\pi}^y (\sin t) g'(t) dt \right| \leq \int_{n\pi}^y |\sin t| g'(t) dt \leq \int_{n\pi}^y g'(t) dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g'(t) dt \leq \pi g'(n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il suffit alors de montrer la convergence de la série $\sum u_k$. Cette série est alternée car $g' > 0$ et car \sin est de signe constant égal à $(-1)^k$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$. Comme g' décroît, cela entraîne que

$$|u_{k+1}| = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} |\sin t| g'(t) dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| g'(t) dt = |u_k|.$$

Enfin, comme plus haut, on montre que $|u_k| \leq \pi g'(k\pi)$, qui tend vers zéro quand $k \rightarrow +\infty$. En vertu du théorème des séries alternées, $\sum u_k$ converge, donc $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ converge.

274. RMS 2025 929 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. On se propose de prouver l'existence d'un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

- (a) Étudier le cas particulier où $f = \sin$.
- (b) Traiter le cas général.

SOLUTION. — Voir RMS 2018 495 X ESPCI PC pour la question (b).

- (a) Il est bien connu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente (intégrer par parties). Si $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge, il faut donc que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ converge, donc que $\lambda = 0$.

Réciproquement, si $\lambda = 0$, on retrouve l'intégrale du sinus cardinal sur $[1, +\infty[$ (son opposée en fait), qui est bien convergente.

Dans ce cas, il existe bien un unique λ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

- (b) La fonction $g_\lambda : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue. On étudie la convergence de l'intégrale proposée en évaluant l'intégrale partielle suivante grâce au changement de variable $t = u + jT$ (pour $x \geq 1$, on pose $k_x = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$) :

$$\begin{aligned} \int_T^x g_\lambda(t) dt &= \lambda \ln(x) - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \lambda \ln(x) - \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_{jT}^{(j+1)T} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{k_x T}^x \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \lambda \ln(x) - \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_0^T \frac{f(u)}{u + jT} du + \int_{k_x T}^x \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Comme f est continue et périodique, elle est bornée sur \mathbb{R} . Par ailleurs il est clair que $k_x T \sim x$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc

$$\left| \int_{k_x T}^x \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_{k_x T}^x \frac{dt}{t} = \|f\|_\infty \ln\left(\frac{x}{k_x T}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On évalue maintenant la somme centrale en remarquant que $\int_0^T \frac{f(u)}{u + jT} du$ est sans doute proche de $\int_0^T \frac{f(u)}{jT} du$ quand j est grand. Plus précisément ($H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ est le n -ième nombre harmonique et $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ est la valeur moyenne de f) :

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_0^T \frac{f(u)}{u + jT} du + \langle f \rangle H_{k_x-1} &= - \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_0^T \frac{f(u)}{u + jT} du + \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_0^T \frac{f(u)}{jT} du \\ &= \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_0^T \left(\frac{f(u)}{jT} - \frac{f(u)}{u + jT} \right) du, \\ &= \sum_{j=1}^{k_x-1} \int_0^T \frac{uf(u)}{jT(u + jT)} du. \end{aligned}$$

Si l'on pose $g : u \in [0, T] \mapsto uf(u)$, continue, la majoration $\left| \int_0^T \frac{uf(u)}{jT(u + jT)} du \right| \leq \|g\|_\infty \int_0^T \frac{du}{(jT)^2} = \frac{K}{j^2}$ où K est une certaine constante, prouve que la série de terme général $\int_0^T \frac{uf(u)}{jT(u + jT)} du$ converge.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} g_\lambda(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \lambda \ln(x) + \langle f \rangle H_{k_x-1}$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. Or on sait que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ où γ désigne la constante d'Euler, donc

$$\lambda \ln(x) - \langle f \rangle H_{k_x-1} = \lambda \ln(x) - \langle f \rangle (\ln(k_x) + \gamma + o(1)).$$

Par définition d'une partie entière, $|\frac{x}{T} - k_x| \leq 1$, donc $\ln(k_x) = \ln(\frac{x}{T} + O(1)) = \ln(\frac{x}{T}) + \ln(1 + O(\frac{1}{x})) = \ln(x) - \ln(T) + o(1)$. On en déduit que, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\lambda \ln(x) - \langle f \rangle H_{k_x-1} = \lambda \ln(x) - \langle f \rangle (\ln(x) - \ln(T) + \gamma + o(1)) = (\lambda - \langle f \rangle) \ln(x) + \langle f \rangle (\ln(T) + \gamma) + o(1)$$

possède une limite finie si et seulement si (c'est la conclusion recherchée) :

$$\lambda = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du.$$

275. RMS 2025 930 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

SOLUTION. — Voir RMS 2014 1012 Centrale PC et RMS 2019 463 X ESPCI PC.

La fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^2}$ est continue et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, ce qui justifie l'existence de la fonction f .

Deux intégrations par parties successives (légitimes à cause de la convergence de $f(x)$ et des parties évaluées) montrent que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{2te^{-t^2}}{2t} dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{2te^{-t^2}}{4t^3} dt \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} + \left[\frac{e^{-t^2}}{4t^3} \right]_x^{+\infty} + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{12t^4} dt \end{aligned}$$

Dans la dernière somme ci-dessus, le terme central est évidemment négligeable devant le premier. Il en est de même de l'intégrale, car $\forall t \in [x, +\infty[$, $> 0 \leq \frac{e^{-t^2}}{12t^4} \leq \frac{e^{-x^2}}{12x^2t^2}$, et intégration de cet encadrement sur $[x, +\infty[$ donne $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{12t^4} dt \leq \frac{e^{-x^2}}{12x^3}$. On en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

276. RMS 2025 931 Mines Ponts PSI énoncé p. 43

Mots-clés : *inégalité de Wirtinger*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Soient $I_1 = \int_0^1 f(x)f'(x) \cotan(\pi x) dx$ et $I_2 = \int_0^1 f^2(x) (1 + \cotan^2(\pi x)) dx$. Montrer que I_1 et I_2 sont convergentes et exprimer I_1 en fonction de I_2 .

(b) En déduire que $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f')^2$.

SOLUTION. — Voir RMS 2016 837 Centrale PC.

On indique que la fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par la formule $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$. On en déduit que la fonction $c : x \mapsto \cotan(\pi x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On dispose des développements asymptotiques suivants en zéro et en 1 :

$$c(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi x} \quad \text{et} \quad c(x) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} \frac{-1}{\pi(x-1)}.$$

Par ailleurs, la cotangente, donc aussi la fonction c , sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur ensemble de définition, avec

$$\cotan' = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2} = -(1 + \cotan^2).$$

(a) Les deux fonctions $h_1 : x \mapsto f'(x)f(x) \cotan(\pi x)$ et $h_2 : x \mapsto f^2(x)(1 + \cotan^2(\pi x))$ sont définies et continues sur $]0, 1[$. On les étudie aux bornes de $]0, 1[$.

- Comme $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, on a $f(x) = f'(0)x + o(x)$ en zéro, donc $h_1(x) = f'(0)^2 + o(1)$ en zéro. La fonction h_1 se prolonge par continuité en zéro et $\int_0^{1/2} h_1$ converge. De même, $h_2(x) = f'(0)^2 + o(1)$, donc h_2 se prolonge par continuité en zéro et $\int_0^{1/2} h_2$ converge.
- Comme $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(1) = 1$, on a $f(x) = f'(1)(x-1) + o(x-1)$ en 1, donc $h_1(x) = -\frac{f'(1)^2}{\pi} + o(1)$ en 1. La fonction h_1 se prolonge par continuité en 1 et $\int_{1/2}^1 h_1$ converge. De même, $h_2(x) = \frac{f'(1)^2}{\pi^2} + o(1)$, donc h_2 se prolonge par continuité en 1 et $\int_{1/2}^1 h_2$ converge.

On conclut que I_1 et I_2 sont bien définies.

Une intégration par parties formelle donne

$$\int_0^1 f'(x)f(x) \cotan(\pi x) dx = \left[\frac{f(x)^2}{2} \cotan(\pi x) \right]_0^1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x)^2 (1 + \cotan^2(\pi x)) dx.$$

Les mêmes arguments qu'à la question précédente montrent que $f(x)^2 \cotan(\pi x)$ a pour limite zéro en zéro et en 1, et on déduit que le crochet ci-dessus converge et a pour valeur 0. Comme I_1 et I_2 convergent, l'intégration formelle ci-dessus est en réalité une égalité de valeurs :

$$I_1 = \frac{\pi}{2} I_2.$$

(b) Comme

$$\pi^2 \int_0^1 f^2 = \pi^2 \left(I_2 - \int_0^1 f^2 c^2 \right) = 2\pi I_1 - \pi^2 \int_0^1 f^2 c^2 = \int_0^1 (2\pi f f' c - \pi^2 f^2 c^2),$$

il suffit de démontrer que $\int_0^1 (2\pi f f' c - \pi^2 f^2 c^2) \leq \int_0^1 f'^2$. Or la différence entre le membre de droite et le membre de gauche de cette dernière inégalité est positif :

$$\int_0^1 [f'^2 - (2\pi f f' c - \pi^2 f^2 c^2)] = \int_0^1 (f' - \pi c f)^2.$$

On conclut que

$$\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f')^2.$$

REMARQUES. — 1) On peut préciser le cas d'égalité. Par continuité de la fonction positive $(f' - \pi c f)^2$, l'égalité a lieu si et seulement si $f' - \pi c f = 0$. Comme πc est la dérivée logarithmique de $x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $]0, 1[$, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \in]0, 1[\mapsto \lambda \sin(\pi x)$, où λ est une constante réelle, et les fonctions de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ satisfaisant $f(0) = f(1) = 0$ qui réalisent l'égalité sont les $x \in [0, 1] \mapsto \lambda \sin(\pi x)$.

2) Le changement de variable $t = a(1-x) + bx$ et le changement de fonction $g(t) = f(x)$ conduisent à l'inégalité sur un segment quelconque, dans laquelle on peut vérifier l'homogénéité :

$$\forall g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}), \quad g(a) = g(b) = 0 \implies \int_a^b g^2 \leq \left(\frac{b-a}{\pi} \right)^2 \int_a^b (g')^2.$$

3) En général, on donne plutôt l'inégalité de Wirtinger avec les hypothèses $g(a) = g(b)$ et $\int_a^b g = 0$. Dans ce cas, elle s'écrit $\int_a^b g^2 \leq \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^b (g')^2$, et elle se prouve habituellement grâce à la comparaison des égalités de Parseval pour g et g' . C'est sous cette forme qu'on peut l'appliquer à la démonstration de l'inégalité isopérimétrique dans le plan, et à l'étude de son cas d'égalité.

277. RMS 2025 932 Mines Ponts PSI énoncé p. 44

Soit la suite de fonctions définies par $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) .

(c) Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$ puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Est-ce cohérent avec les théorèmes du cours ?

SOLUTION. —

(a) Les théorèmes de croissance comparée montrent que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

(b) Comme f_n est non bornée au voisinage de $-\infty$, la convergence ne peut être uniforme sur \mathbb{R} .

On étudie maintenant le problème sur \mathbb{R}_+ . La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 avec $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} (1 - \frac{x}{n})$. Alors f_n croît de 0 à $f_n(n)$, puis décroît et tend vers 0 en $+\infty$. Par suite, et grâce à la formule de Stirling, on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Par conséquent, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

- (c) La fonction f_n est continue sur \mathbb{R}_+ et est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Une intégration par parties, légitime car le crochet converge, montre que

$$\int_0^{+\infty} f_{n+1} = \left[-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} f_n.$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

On a donc

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0.$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée ne s'applique pas (comme il n'a rien à voir avec la convergence uniforme, il n'y a pas d'incohérence avec les théorèmes du cours). Les hypothèses faibles du théorème de convergence dominée étant satisfaites, c'est nécessairement l'hypothèse de domination qui est fautive.

278. RMS 2025 933 Mines Ponts PSI..... énoncé p. 44

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie sur \mathbb{R}_+^* par $\forall x > 0, f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$.

SOLUTION. — Dans un premier temps, on fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- On pose $g: t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{2} \left(t + \frac{x}{t} \right)$. L'intervalle \mathbb{R}_+^* étant stable par f , la suite $f_n(x)$ définie par

$$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = g(f_n(x))$$

est bien définie.

Les variations de g (continue, strictement décroissante de $+\infty$ à zéro sur \mathbb{R}_+) et le fait que $g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$ montrent que l'intervalle $[\sqrt{x}, +\infty[$ est stable par g , et que $g(]0, \sqrt{x}[) \subset [\sqrt{x}, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall n \geq 2, \quad f_n(x) \in [\sqrt{x}, +\infty[.$$

D'autre part, il est immédiat de vérifier que

$$\forall t \in [\sqrt{x}, +\infty[, \quad g(t) \leq t$$

avec égalité si et seulement si $t = \sqrt{x}$. Il en résulte que $(f_n(x))$ est décroissante à partir du rang 2, et minorée par \sqrt{x} , donc converge. Comme g est continue, la limite est un point fixe de g dans $[\sqrt{x}, +\infty[$. Comme le seul point fixe de g sur cet intervalle est \sqrt{x} , on conclut que

la suite (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers la fonction racine carrée.

Dans la suite, on notera f la fonction racine carrée.

- Montrons par récurrence sur n que

$$f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}.$$

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $f_0(x) = x$ pour tout $x > 0$. Supposons que cet équivalent soit vrai au rang n . Alors $\frac{x}{f_n(x)}$ possède une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$ (de valeur 2^n), donc $f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \sim f_n(x)$, puis $f_{n+1}(x) \sim \frac{1}{2} f_n(x) \sim \frac{x}{2^{n+1}}$ quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui achève la preuve.

On déduit de cet équivalent que la convergence de la suite (f_n) ne peut être uniforme sur \mathbb{R}_+^* , puisqu'aucune des différences $f_n - f$ n'est bornée sur cet intervalle.

- En revanche, on va montrer que (f_n) converge uniformément vers la racine carrée sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

On rappelle pour cela que $f_2(x) \in [\sqrt{x}, +\infty[$ pour tout $x > 0$, et on calcule $\forall x \in [\sqrt{x}, +\infty[, g'(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t^2} \right) \in [0, \frac{1}{2}]$. L'inégalité des accroissements finis montre que si $n \geq 3$,

$$|f_n(x) - \sqrt{x}| = |g(f_{n-1}(x)) - g(\sqrt{x})| \leq \|g'\|_{\infty}^{[\sqrt{x}, +\infty[} |f_{n-1}(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2} |f_{n-1}(x) - \sqrt{x}|.$$

Une récurrence facile montre alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \geq 2, \quad |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2^{n-2}} |f_2(x) - \sqrt{x}|.$$

La fonction continue $f_2 - f$ étant bornée sur le segment $[a, b]$, disons par $M_{a,b}$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\forall n \geq 2, \quad \|f_n - f\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{M_{a,b}}{2^{n-2}},$$

d'où la convergence uniforme annoncée.

279. RMS 2025 934 Mines Ponts PSI énoncé p. 44

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.

- (a) Trouver les domaines de définition/continuité/dérivabilité de f .
- (b) Trouver la limite de f en $+\infty$ puis un équivalent.

SOLUTION. — RMS 2011 1091 CCP PSI, RMS 2015 655 Mines Ponts PSI, RMS 2016 511 Mines Ponts PSI.

- (a) Si $x < 0$, la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$, c'est la série nulle. Si $x > 0$, le terme général est négligeable devant la série géométrique convergente de terme général e^{-nx} , donc la série converge. Le domaine de définition de f (c'est son domaine de convergence simple) est

$$D = [0, +\infty[.$$

Pour tout $k \geq n + 1$, on a $\frac{1}{\ln k} \leq \frac{1}{\ln n}$. On en déduit (somme d'une série géométrique de raison $e^{-x} \in]-1, 1[$) que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{x}{\ln n} \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-nx}}{\ln n} \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{\varphi(x)}{\ln n},$$

où l'on a posé $\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Il suffit alors de montrer que $\varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisqu'à l'évidence φ est une fonction positive sur \mathbb{R}_+^* . Or

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2},$$

et si l'on appelle $N(x) = e^x - 1 - x e^x$ le numérateur de $\varphi'(x)$, on a $N'(x) = -x e^x < 0$ sur \mathbb{R}_+^* . Par suite, N décroît, et comme $N(0) = 0$, on conclut que φ' est négative sur \mathbb{R}_+^* . Comme $\lim_0 \varphi = 1$, on a bien établi que $0 \leq \varphi \leq 1$ sur \mathbb{R}_+^* , donc que

$$\forall x \in D, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln n}.$$

La majoration reste vraie en $x = 0$ puisque $R_n(0) = 0$ et prouve la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} f_n$. Chaque f_n étant continue, on en déduit que f est continue.

REMARQUE. — On peut aussi dire que φ tend vers 1 en 0, vers 0 en $+\infty$, est continue sur $]0, +\infty[$, et démontrer que ces hypothèses entraînent son caractère borné.

Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$f'_n(x) = \frac{e^{-nx}(1 - nx)}{\ln n}.$$

Fixons un segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$. Alors

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'_n(x)| \leq \frac{e^{-na}(1 + nb)}{\ln n}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (par croissances comparées), donc $\sum f'_n$ est normalement convergente sur tout segment de $]0, +\infty[$, d'où il résulte que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

La fonction f n'est pas dérivable en 0 à droite car $S(0) = 0$ et pour tout $N \geq 2$ on a :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}.$$

Si f était dérivable en zéro, on pourrait passer à la limite quand $x \rightarrow 0$ dans la minoration ci-dessus. On aurait alors

$$f'(0) \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)}$$

pour tout $N \geq 2$, ce qui est faux puisque la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge ($\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\ln n})$).

- (b) On a $(\ln n)f'_n(x) = e^{-nx}(1 - nx)$, donc la fonction positive f_n est maximale en $\frac{1}{n}$. De plus, si on fixe $a > 0$, alors pour n assez grand on aura

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = f_n(a),$$

terme général d'une série convergente. La série $\sum f_n$ est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[$ et, comme $\lim_{+\infty} f_n$ existe (et vaut 0), on peut appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 0.$$

Montrons ensuite que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_2(x) = \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)}.$$

Il suffit pour cela de montrer que $\frac{f(x) - f_2(x)}{f_2(x)} = \ln(2) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^{-(n-1)x}}{\ln n}$ tend vers zéro quand $x \rightarrow +\infty$.

Or si l'on pose $g_n : x \mapsto \frac{e^{-(n-1)x}}{\ln n}$ et si $a > 0$, on a $\|g_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = g_n(a)$, terme général d'une série convergente. Comme $\lim_{+\infty} g_n = 0$ pour tout $n \geq 3$, le théorème de la double limite permet, comme plus haut, de conclure.

280. RMS 2025 935 Mines Ponts PSI énoncé p. 44

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha} e^{inx}$.

- (a) Pour quelles valeurs de α , la série $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R} ?

On suppose cette condition remplie dans la suite. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

- (b) Montrer que S est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$. **Il s'agit plutôt de calculer $S^{(k)}(0)$**
 (c) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que S est développable en série entière au voisinage de 0 .

SOLUTION. — **Je ne sais traiter la dernière question que dans le cas $\alpha > 1$ (E. R.)**

- (a) Comme $|f_n(x)| = e^{-n^\alpha}$, la condition nécessaire de convergence d'une série (son terme général doit être de limite nulle) impose ici que $\alpha > 0$.

Réciproquement, si $\alpha > 0$, alors $n^2|f_n(x)| = n^2e^{-n^\alpha} = \exp(-n^\alpha + 2 \ln n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, donc $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge. Les valeurs cherchées sont données par

$$\alpha > 0.$$

- (b) Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n^{(k)}(x) = (in)^k e^{-n^\alpha} e^{inx}.$$

On en déduit que $f^{(k)}$ est bornée sur \mathbb{R} et que $\|f_n^{(k)}\|_{\infty} = n^k e^{-n^\alpha}$. Toujours par croissances comparées $n^2 \|f_n^{(k)}\|_{\infty} = \exp(-n^\alpha + (k+2) \ln n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc toutes les séries dérivées convergent normalement sur \mathbb{R} . le théorème de régularité adéquat dit alors que S est de classe \mathcal{C}^∞ , et que $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$. En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^k e^{-n^\alpha}.$$

(c) On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{k,n} = e^{-n^\alpha} \frac{(inx)^k}{k!}.$$

Alors on peut écrire ces calculs sur des termes positifs indépendamment de la convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} \frac{n^k |x|^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k |x|^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} e^{n|x|}.$$

- Si $\alpha > 1$, alors $n^{\alpha-1} - |x| \geq \frac{1}{2}$ pour n assez grand, donc $0 \leq e^{-n^\alpha} e^{n|x|} = e^{-n(n^{\alpha-1}-|x|)} \leq e^{-n/2}$ pour n assez grand, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} e^{n|x|}$ converge, et le calcul ci-dessus montre que la famille $(u_{k,n})$ est sommable. Le théorème de Fubini affirme alors (c'est l'égalité $\stackrel{*}{=}$) que toutes les séries ci-dessous convergent et qu'on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(inx)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha} (in)^k \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité montre que S est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence infini.

- Si $\alpha \leq 1$, j'ai raté quelque chose car je ne vois pas comment le th. de Fubini, avec son hypothèse de sommabilité, permet de prouver le caractère DSE de S . (E.R.)

281. RMS 2025 936 Mines Ponts PSI énoncé p. 44

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0, R[$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2} = x \int_0^1 \frac{\ln(t)}{xt-1} dt$.

(c) Que se passe-t-il pour $x = 1$?

SOLUTION. —

(a) Il vaut 1 (le cours dit que « Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$ vaut 1 », ou bien croissances comparées, ou bien règle de d'Alembert).

(b) Fixons $x \in]-1, 1[$. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a alors $|xt| < 1$, donc

$$f(x, t) = \frac{\ln(t)}{xt-1} = -\ln(t) \sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t),$$

où l'on a posé $f_n: t \in]0, 1[\mapsto -\ln(t)(xt)^n$. On vérifie ensuite les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $I =]0, 1[$.

- Chaque f_n est continue (par morceaux) et $\sum f_n$ converge simplement sur I de somme $f(x, \cdot)$.
- La somme $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I .
- La majoration $|f_n(t)| \leq |\ln t|$ avec \ln intégrable sur $]0, 1[$ et le caractère prolongeable par continuité de f_n en 1 montrent que f_n est intégrable sur I avec

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(t)| dt &= -|x|^n \int_0^1 t^n \ln(t) dt \\ &= -|x|^n \left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{dt}{t} \right) = -|x|^n \left(0 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt \right) = \frac{|x|^n}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

donc $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme dit alors que

$$x \int_0^1 \frac{\ln(t)}{xt-1} dt = x \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = x \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

- (c) Comme I désigne l'intervalle d'intégration $]0, 1[$, ouvert en particulier en 1, la totalité de la question précédente reste valable si $x = 1$ (le constater).

282. RMS 2025 937 Mines Ponts PSI énoncé p. 44

Soit $f: x \mapsto \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.

- (a) Déterminer le rayon de convergence de f .
 (b) Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle dérivable? Si oui, déterminer sa dérivée.
 (c) Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f .
 (d) Que vaut $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}$?

SOLUTION. — Voir RMS 2015 667 Mines Ponts PSI et 2015 750 Mines Ponts PC.

- (a) On calcule $\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \times \frac{[n!]^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$. La limite ce quotient est 4, et la règle de d'Alembert donne

$$R = \frac{1}{4}.$$

- (b) Le calcul précédent montre que

$$\frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1} < 1$$

Par ailleurs, la formule de Stirling donne

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{4^n (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} = \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ce quotient est donc de limite nulle. On en déduit que :

- La série $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ diverge car elle est à termes positifs et son terme général est équivalent à $\frac{c}{n^{1/2}}$ (où $c > 0$), qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.
- La série $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} (-1)^n$ converge car elle vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées.

On en déduit que

$$D_f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[.$$

En tant que somme d'une série entière, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle ouvert de convergence avec

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{2n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{2n}{n} x^{n-1}.$$

- (c) Pour tout $x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1} x^{n-1} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{2(n-1)}{n-1} x^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2(n-1)}{n-1} x^{n-1} = 4 \frac{d}{dx} (xf(x)) - 2f(x) = 4xf'(x) + 2f(x). \end{aligned}$$

On en déduit que f vérifie l'équation différentielle suivante sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$:

$$y' + \frac{2}{4x-1}y = 0.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1-4x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{4x-1}$ sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions telles que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \quad y(x) = \lambda \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1-4x)\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-4x}}.$$

Comme $f(0) = 1$, on conclut que

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

- (d) Le premier calcul de la question (b) s'adapte sans problème pour montrer que, si $x \in [-\frac{1}{4}, 0]$, alors la suite de terme général $\left| \binom{2n}{n} x^n \right|$ décroît. La série de somme $f(x)$ vérifie donc les hypothèses du théorème des séries alternées pour tout $x \in [-\frac{1}{4}, 0]$. En particulier, son reste d'ordre n vérifie

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{2k}{k} x^k \right| \leq \left| \binom{2(n+1)}{n+1} x^{n+1} \right| \leq \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Comme le dernier majorant ne dépend plus de x et tend vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$ (voir plus haut), on en déduit que la série converge uniformément sur $[-\frac{1}{4}, 0]$, donc que sa somme est continue. En particulier,

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

283. RMS 2025 938 Mines Ponts PSI énoncé p. 45

Soient $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F: x \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t) dt$.

- (a) Déterminer le rayon de convergence de f et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
- (b) Montrer que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Que vaut F' ?
- (c) Montrer que F est développable en série entière et déterminer ce développement.

SOLUTION. —

- (a) Par croissances comparées (la suite de terme général $\frac{x^n}{(n+1)!}$ est de limite nulle pour tout x) ou par règle de d'Alembert ($\frac{n!}{(n+1)!} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$), on montre que le rayon de convergence de cette série entière vaut

$$R = +\infty.$$

Comme $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, on a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) La fonction $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue. le théorème fondamental de l'intégration montre que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = e^{-x} f(x).$$

- (c) Comme $x \mapsto e^{-x}$ et f sont développables en série entière sur \mathbb{R} , le théorème relatif au produit de Cauchy dit que leur produit l'est aussi, donc F' est développable en série entière sur \mathbb{R} , donc (c'est un résultat du cours) F l'est aussi. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-x} f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k+1)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} \binom{n}{k} \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On simplifie le coefficient $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} \binom{n}{k}$ grâce à un calcul d'intégrale mené de deux façons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t-1)^n dt &= \left[\frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)n!} x^n$ puis, comme $F(0) = 0$, le théorème de primitivation terme à terme des sommes de séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n n!} x^n.$$

284. RMS 2025 939 Mines Ponts PSI énoncé p. 45

Mots-clés : chemins de Motzkin

On cherche à déterminer le cardinal m_n de l'ensemble M_n formé des n -uplets $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

(i) $\forall i, a_i \in \{-1, 0, 1\}$,

(ii) $\sum_{i=1}^n a_i = 0$,

(iii) $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^p a_i \geq 0$.

On pose $m_0 = 1$.

(a) Calculer m_1, m_2 et m_3 .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in M_n$ tel que $a_1 = 1$.

Montrer qu'il existe $r \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, (b_1, \dots, b_r) \in M_r, (c_1, \dots, c_{n-r-2}) \in M_{n-r-2}$ tels que

$$(a_1, \dots, a_n) = (1, b_1, \dots, b_r, -1, c_1, \dots, c_{n-r-2})$$

et justifier l'unicité de cette décomposition.

(c) En déduire une formule de récurrence sur les m_1, \dots, m_n .

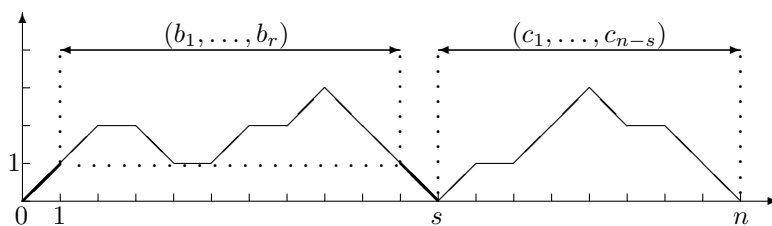
(d) Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} m_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est > 0 et déterminer f .

SOLUTION. — On représente les n -uplets $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de M_n en traçant, dans le plan \mathbb{R}^2 , les segments $[S_p, S_{p+1}]$ pour $0 \leq p \leq n-1$, où les points en question sont donnés par $S_0 = (0, 0)$ et $S_p = (p, \sum_{i=1}^p a_i)$ pour $1 \leq p \leq n$.

Le résultat est un chemin partant de l'origine, se terminant sur l'axe des abscisses, et d'ordonnées positives, appelé chemin de Motzkin de longueur n : $a_i = 1$ (respectivement $a_i = 0, a_i = -1$) correspond à un pas Nord-Est (respectivement Est, Sud-Est). On a représenté ci-dessous le chemin de Motzkin associé à

$$(1, 1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, -1, -1, -1, 1, 0, 1, 1, -1, 0, -1, -1) \in M_{19},$$

ainsi que sa décomposition unique étudiée à la question (b) : on a posé $s = r + 2$.



On convient que M_0 contient un unique élément appelé le chemin vide, de longueur zéro, ce qui est cohérent avec la convention $m_0 = 1$.

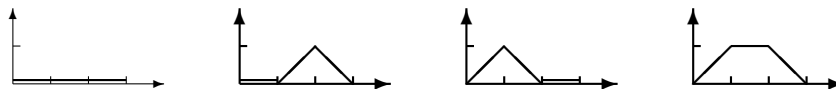
(a) On trouve facilement

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 4$$

Voici par exemple les représentations des quatre éléments de M_3 :



(b) Pour tout chemin de Motzkin $(a_i) \in M_n$, on définit S_0, \dots, S_n comme dans l'introduction.

Analyse. Si $a_1 = 1$, alors le chemin est de longueur n au moins 2. Si r existe, comme $(b_1, \dots, b_r) \in M_r$, on doit avoir :

- Toutes les sommes S_p pour $1 \leq p \leq r+1$ sont supérieures ou égales à 1.
- $S_{r+2} = 0$.

Par conséquent, l'entier $r+2$ est nécessairement défini par

$$r+2 = \min\{p \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_p = 0\}.$$

Dans ce cas, l'unicité de r implique l'unicité de (b_1, \dots, b_r) et de (c_1, \dots, c_{n-r-2}) qui sont, pour le moment, des suites finies à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

Synthèse. Définissons r comme ci-dessus. Alors les conditions $S_{r+1} \neq 0$ et $S_{r+2} = 0$ imposent que $a_{r+2} = -1$. On pose $(b_1, \dots, b_r) = (a_2, \dots, a_{r+1})$: ce chemin est vide si $r = 0$. Sinon, pour $2 \leq p \leq r+1$, on pose $T_p = \sum_{i=1}^p b_i = \sum_{i=2}^{p+1} a_i = S_{p+1} - 1$. Comme les S_q pour $1 \leq q \leq r+1$ sont supérieures ou égales à 1, on en déduit que les T_p sont positives ou nulles, et $T_r = S_{r+1} - 1 = 0$: la suite (b_1, \dots, b_r) appartient bien à M_r .

On vérifierait avec des arguments calculatoires analogues que la suite $(c_1, \dots, c_{n-r-2}) = (a_{r+3}, \dots, a_n)$ appartient à M_{n-r-2} , mais autant s'en remettre à la figure de l'introduction, où tous ces calculs sont évidents.

(c) Un chemin de Motzkin (a_i) de longueur $n \geq 2$ commence

- ou bien par un pas Est ($a_1 = 0$), et alors (a_2, \dots, a_n) est un chemin de Motzkin quelconque de longueur $n-1$;
- ou bien par un pas Nord-Est ($a_1 = 1$), et alors on a la décomposition unique de la question précédente.

Cette partition implicite de M_n se traduit par l'égalité

$$m_n = m_{n-1} + \sum_{r=0}^{n-2} m_r m_{n-r-2}.$$

Enfin, $m_1 = m_0 = 1$.

(d) Comme $M_n \subset \{-1, 0, 1\}^n$, on a $m_n \leq 3^n$, et le cours affirme que le rayon de convergence R de f vérifie alors

$$R \geq \frac{1}{3}.$$

Pour $|x| < R$, on multiplie la relation de récurrence de la question précédente par x^n et on somme de $n = 2$ à l'infini, en reconnaissant un carré de Cauchy à la fin du calcul :

$$\begin{aligned} f(x) - 1 - x &= \sum_{n=2}^{+\infty} m_n x^n = x \sum_{n=2}^{+\infty} m_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^{n-2} m_r m_{n-r-2} \right) x^{n-2} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} m_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^n m_r m_{n-r} \right) x^n = x(f(x) - 1) + x^2 f(x)^2 \end{aligned}$$

La fonction f vérifie donc l'équation de degré 2

$$\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}, \quad x^2 f(x)^2 + (x-1)f(x) + 1 = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = m_0 = 1.$$

Son discriminant vaut $\Delta(x) = (x-1)^2 - 4x^2 = 1 - 2x - 3x^2 = (1-3x)(1+x)$. Le plus grand intervalle centré en zéro sur lequel Δ est positif est $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, ce qui implique que $R \leq \frac{1}{3}$, puisqu'il faut que $f(x)$ existe et soit réelle pour $|x| < R$. On en déduit que

$$R = \frac{1}{3}.$$

Les deux solutions pour $x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\setminus \{0\}$ fixé sont

$$f_1(x) = \frac{1-x+\sqrt{\Delta(x)}}{2x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1-x-\sqrt{\Delta(x)}}{2x^2}.$$

Ces deux solutions étant distinctes pour tout $x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\setminus \{0\}$, il existe un unique $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ tel que $f(x) = \frac{1-x+\varepsilon(x)\sqrt{\Delta(x)}}{2x^2}$. La fonction ε ainsi définie vérifie alors

$$\forall x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\setminus \{0\}, \quad \varepsilon(x) = \frac{2x^2 f(x) - 1 + x}{\sqrt{\Delta(x)}}.$$

Cette fonction est donc continue et à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle est constante sur chacun des intervalles $]-\frac{1}{3}, 0[$ et $]0, \frac{1}{3}[$. La fonction f vaut donc f_1 ou bien f_2 sur chacun de ces deux intervalles.

Par ailleurs, comme f_1 n'a pas de limite finie en zéro et comme f est continue, on a $f = f_2$ en dehors de zéro :

$$\forall x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\setminus \{0\}, \quad f(x) = f_2(x) = \frac{1-x-\sqrt{(1-3x)(1+x)}}{2x^2} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

285. RMS 2025 940 Mines Ponts PSI énoncé p. 45

Soit $g: x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

- (a) Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.
- (b) Donner un encadrement du rayon de convergence.

SOLUTION. — RMS 2022 712 Mines-Ponts PSI
Voir RMS 2016 594 Mines Ponts PC.

- (a) On peut procéder par analyse/synthèse.

Analyse : Supposons f développable en série entière au voisinage de l'origine. Comme f est paire, il existe $r > 0$ et (a_n) tel que $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.

La fonction cosinus étant elle-même développable en série entière sur \mathbb{R} , on a alors pour tout $x \in]-r, r[$, par un produit de Cauchy (de séries absolument convergente) $1 = f(x) \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} x^{2n}$.

Et donc, par unicité des coefficients d'une série entière, $1 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} = 0$.

Synthèse : Soit a la suite définie par $a_0 = 1$ et les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} = 0$, soit $a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}$.

On montre par une récurrence "forte" que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$.

C'est vrai au rang 0. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on a $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $|a_k| \leq 1$.

Alors par inégalité triangulaire, $|a_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{(2n-2k)!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2n-2k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)!}$ et donc $|a_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \text{ch}(1) - 1 \leq 1$, ce qui achève la récurrence.

On en déduit que la série entière $\sum a_n x^{2n}$ est de rayon de convergence $R \geq 1$, et de part les relations de récurrence définissant la suite a , on a bien par produit de Cauchy $\forall x \in]-R; R[$, $\cos x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = 1$ soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = \frac{1}{\cos x}$.

- (b) On sait déjà que $R \geq 1$. De plus $\forall x \in]-R; R[$, $\cos x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = 1$ donc la fonction cosinus ne s'annule pas sur $] -R; R[$, et donc $R \leq \pi/2$.

REMARQUE. — L'exercice 2016 594 montre que $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$, où α_{2n} est le nombre de permutations alternantes sur $\llbracket 1, 2n \rrbracket$.

286. RMS 2025 941 Mines Ponts PSI énoncé p. 45

Mots-clés : fonction de Bessel

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

- (a) Trouver l'ensemble de définition de f .
 (b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
 (c) Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ pour $x \in]1, +\infty[$.

SOLUTION. — Voir RMS 2012 1335 CCP PC, RMS 2020 1397 TPE PC, RMS 2020 1398 CCP PC.

- (a) Comme $|\frac{(-1)^{n+1}(2^{n+1})^2}{(-1)^n(2^{n+1}(n+1)!)^2}| = \frac{1}{4(n+1)^2} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, la règle de d'Alembert des séries entières dit que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$, donc que

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- (b) Le théorème de régularité des séries entières dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et se dérive terme à terme. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n-2} \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x f''(x) + f'(x) + x f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} [2n(2n-1) + 2n - (2n)^2] x^{2n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) On fixe $x > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n} e^{-xt}$, de sorte que la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers la fonction continue $g : t \in [0, +\infty[\mapsto f(x)e^{-xt}$. Il ne reste plus qu'à vérifier l'hypothèse forte du théorème d'intégration terme à terme pour pouvoir conclure.

Comme $t^{2n} f_n(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$, résultat qui s'obtient par une récurrence facile sur $k \in \mathbb{N}$. Alors le changement de variable linéaire $u = xt$ donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2^n n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-xt} dt \\ &= \frac{1}{(2^n n!)^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{2n} e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Le quotient $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2^{n+1}(n+1))^2 x^2}$ tend vers $\frac{1}{x^2}$ quand n tend vers l'infini. Comme $x > 1$, on en déduit, grâce à la règle de d'Alembert des séries numériques, que la série $\sum I_n$ converge. On conclut que

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{2^{2n} x^{2n+1}}.$$

Le cours donne facilement que $\forall y \in]-1, 1[$, $(1+y)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{y^n}{2^{2n}}$. Par conséquent, on a aussi

$$\forall x > 1, \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

287. RMS 2025 942 Mines Ponts PSI énoncé p. 46

On pose $f(x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

- (a) Calculer $f(x, 0)$ et $f(x, 1)$ lorsque cela est possible.
- (b) i. Donner le rayon de convergence de $x \mapsto f(x, s)$.
ii. Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto f(x, s)$, en discutant selon les valeurs de s .
- (c) Déterminer une relation entre $f(x, s)$ et $f(x, s-1)$. En déduire $f(x, -1)$ et $f(x, -2)$.
- (d) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $f(x, -p)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

SOLUTION. — On suppose s réel sans restriction.

(a) On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \frac{x}{1-x} \\ f(x, 1) &= -\ln(1-x). \end{aligned}$$

On ne peut pas prolonger la première égalité en 1 ou -1 car la série y diverge. On ne peut pas prolonger la seconde égalité en 1 pour la même raison.

En revanche, cette seconde égalité reste vraie en $x = -1$: écrire que $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt$, donc que la somme partielle $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ vaut $-\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt$, puis majorer le reste $|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt|$ par $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, et faire enfin tendre n vers l'infini.

- (b) i. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^s}$ vaut 1 : c'est un résultat du cours. On peut aussi utiliser les théorèmes de croissance comparée ou la règle de d'Alembert.
- ii. Compte-tenu du calcul du rayon de convergence, l'ensemble D de définition cherché vérifie l'encadrement

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

- Si $s > 1$, alors $\sum \frac{x^n}{n^s}$ converge absolument donc converge pour tout $x \in [-1, 1]$.
- Si $0 < s \leq 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ converge car elle satisfait les hypothèses du théorème des séries alternés.
- Si $s \leq 0$, les deux séries $\sum \frac{(\pm 1)^n}{n^s}$ divergent grossièrement.

En conclusion,

$$D = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } s > 1 \\ [-1, 1[& \text{si } 0 < s \leq 1 \\] - 1, 1[& \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$

- (c) Le théorème de régularité des séries entières dit que $x \mapsto f(x, s)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, ici $] - 1, 1[$, et se dérive terme à terme. On a donc

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad x \frac{d}{dx}(f(x, s)) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{s-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{s-1}} = f(x, s-1).$$

En particulier, pour tout $x \in] - 1, 1[$

$$\begin{aligned} f(x, -1) &= x \frac{d}{dx}(f(x, 0)) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2} \\ f(x, -2) &= x \frac{d}{dx}(f(x, -1)) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = x \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} \right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

- (d) On fixe $x \in]0, 1[$. On pose $h: [1, +\infty[\mapsto t^p x^t$. Il s'agit d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 avec

$$\forall t \geq 1, \quad h'(t) = p t^{p-1} x^t + t^p (\ln x) x^t = t^{p-1} x^t (p + t \ln x).$$

La dérivée h' est positive sur $[1, t_x]$ et négative sur $[t_x, +\infty[$, où $t_x = -\frac{p}{\ln x} \in]1, +\infty[$, donc il faudra pratiquer une comparaison série-intégrale adaptée à cette situation. On pose

$$n_x = \lfloor t_x \rfloor.$$

- Pour tout $k \in \llbracket 2, n_x - 1 \rrbracket$ (la majoration est vraie aussi pour $k = 1$), on a

$$\int_{k-1}^k h(t) dt \leq k^p x^k = h(k) \leq \int_k^{k+1} h(t) dt$$

d'où l'on déduit que

$$1 + \int_1^{n_x-1} h(t) dt \leq \sum_{k=1}^{n_x-1} k^p x^k \leq \int_1^{n_x} h(t) dt$$

- Pour tout $k \in \llbracket n_x + 1, +\infty \rrbracket$ (la minoration est vraie aussi pour $k = n_x$), on a

$$\int_k^{k+1} h(t) dt \leq k^p x^k = h(k) \leq \int_{k-1}^k h(t) dt$$

d'où l'on déduit que

$$\int_{n_x}^{+\infty} h(t) dt \leq \sum_{k=n_x}^{+\infty} k^p x^k \leq n_x^p x^{n_x} + \int_{n_x}^{+\infty} h(t) dt$$

Si l'on pose $I_x = \int_1^{+\infty} h(t) dt$, on déduit des deux encadrements ci-dessus que

$$I_x + 1 - n_x^p x^{n_x} = I_x + 1 - h(n_x) \leq I_x + 1 - \int_{n_x-1}^{n_x} h(t) dt \leq f(x, -p) \leq I_x + n_x^p x^{n_x}$$

Le changement de variable linéaire $u = -t \ln(x)$ montre que

$$I_x = \int_1^{+\infty} t^p x^t dt = \int_1^{+\infty} t^p \exp(t \ln(x)) dt = \frac{1}{(-\ln x)^{p+1}} \int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^p e^{-u} du.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$, on a $\ln x \sim x - 1 \rightarrow 0$, et on sait (ou on redémontre par une récurrence rapide que $\int_0^{+\infty} u^p e^{-u} du = p!$), donc

$$I_x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-x)^{p+1}} \int_0^{+\infty} u^p e^{-u} du = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Ce quotient tend vers $+\infty$ en 1^- , donc est prépondérant devant la constante 1. Il suffit de démontrer qu'il est aussi prépondérant devant $n_x^p x^{n_x}$ pour assurer que

$$f(x, -p) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Comme $\lfloor t_x \rfloor$ avec $t_x = -\frac{p}{\ln x}$, on a $n_x \leq -\frac{p}{\ln x}$, et comme $\ln x \leq x - 1 \leq 0$ au voisinage de 1 à gauche, on a $0 \leq 1 - x \leq -\ln x$ puis, quand $x \rightarrow 1^-$:

$$\begin{aligned} n_x^p &\leq \frac{p^p}{(-\ln x)^p} \leq \frac{p^p}{(1-x)^p} \\ x^{n_x} &= \exp(n_x \ln x) \leq \exp(-p) \\ n_x^p x^{n_x} &\leq \frac{e^{-p} p^p}{(1-x)^p} = o\left(\frac{1}{(1-x)^{p+1}}\right). \end{aligned}$$

Cela conclut l'exercice.

288. RMS 2025 943 Mines Ponts PSI..... énoncé p. 46

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n+1}$.
- (b) Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$ et déterminer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.
- (c) Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
- (d) Calculer $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

SOLUTION. — Voir RMS 2016 349 X ESPCI PC.

Une récurrence immédiate montre que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, il s'agit de montrer que $\sqrt{1} \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{2}$: c'est vrai. Supposons que $\sqrt{n-1} \leq u_{n-1} \leq 2\sqrt{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on dispose des équivalences suivantes :

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n+1} \iff n \leq u_n^2 = n + u_{n-1} \leq 4(n+1) \iff 0 \leq u_{n-1} \leq 3n + 4.$$

On sait déjà que u_{n-1} est positif, et il suffit de montrer que $2\sqrt{n} \leq 3n + 4$ pour conclure. Or c'est vrai car, portée au carré, cette inégalité sur des nombres positifs s'écrit $4n \leq 9n^2 + 12n + 16$, ce qui est évidemment vrai.

- (b) En substituant l'inégalité $u_{n-1} \leq 2\sqrt{n}$ dans la définition de u_n on obtient

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n}} \quad \text{ou encore} \quad 1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Par encadrement, on conclut que

$$u_n \sim \sqrt{n}.$$

La technique de la quantité conjuguée montre que

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}}.$$

Le numérateur (resp. dénominateur) de ce quotient est équivalent à \sqrt{n} (resp. à $2\sqrt{n}$ par division explicite), donc

$$\lim (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

- (c) Par équivalence entre les coefficients, le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ est le même que celui de $\sum \sqrt{n} x^n$, à savoir 1 (c'est dans le cours).
- (d) On va démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = +\infty.$$

Comme les u_n sont positifs, la somme f de la série entière est croissante, donc elle possède une limite ℓ , finie ou infinie, en 1^- . Toujours par positivité, les sommes partielles vérifient

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=0}^n u_k x^k \leq f(x).$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$ à n fixé, on obtient

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \ell.$$

Comme $u_n \sim \sqrt{n}$ et que la série à termes positifs $\sum \sqrt{n}$ diverge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc $+\infty \leq \ell$, ce qui conclut.

289. RMS 2025 944 Mines Ponts PSI énoncé p. 46

Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$. On pose $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et l'on note R le rayon de convergence de cette série entière.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq 1$. En déduire un encadrement de R .
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
- (c) En déduire que $\forall x \in]-R, R[$, $(2x-x^2)f'(x) + (1-x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- (d) Trouver ainsi une expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
- (e) Trouver une autre expression de $f(x)$ en montrant que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+t^2)x}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} dt$$

et en calculant cette intégrale.

SOLUTION. — Voir RMS 2006 1132 CCP PC, 2011 1144 CCP PC, 2013 1019 CCP PSI, 2017 1319 CCP PSI, 2017 1339 IMT PSI, 2018 1350 CCP PSI, 2013 670 Mines Ponts PC, 2017 742 Mines Ponts PSI, 2019 1187 TPE PSI.

- (a) Comme $\frac{1}{2} \leq \frac{1+t^2}{2} \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2^n} \leq a_n \leq 1.$$

Le cours dit que, si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R_a \geq R_b$ avec des notations évidentes. On en déduit que

$$1 \leq R \leq 2.$$

(b) Grâce à une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt \\
 &= \left[t \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\
 &= 1 - (n+1) \int_0^1 (t^2 + 1 - 1) \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\
 &= 1 - 2(n+1) \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt + (n+1) \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\
 &= 1 - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n.
 \end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+3)a_{n+1} = 2(n+1)a_{n+1} + a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n.$$

(c) On multiplie la relation de la question précédente par x^n où $x \in]-R, R[$, puis on somme pour n variant de 0 à l'infini, en profitant de la dérivabilité terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$. On obtient

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^{n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.
 \end{aligned}$$

Cette égalité s'écrit aussi $2xf'(x) + f(x) - a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + x^2 f'(x) + xf(x)$. Comme $a_0 = 1$, cela revient à

$$\forall x \in]-R, R[, \quad (2x - x^2)f'(x) + (1-x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(d) Sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2 =]0, 1[$, l'équation différentielle de la question précédente s'écrit

$$f'(x) + \frac{1-x}{x(2-x)}f(x) = f'(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}.$$

Les solutions de l'équation homogène sur I_k ($k = 1$ ou 2) sont de la forme $x \mapsto \frac{\lambda_k}{\sqrt{|x(x-2)|}}$, où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles.

La méthode de variation de la constante donne une solution particulière de la forme $x \mapsto \frac{\lambda_k(x)}{\sqrt{|x(x-2)|}}$ où la fonction dérivable λ_k satisfait

$$\lambda'_k(x) = \frac{\sqrt{|x(2-x)|}}{x(x-1)(x-2)}.$$

Je renonce à poursuivre les calculs compte-tenu des solutions trouvées à la question suivante (E.R.)

(e) On fixe $x \in]-1, 1[$ et on pose $u_n : t \in [0, 1] \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$. Il s'agit de déterminer si l'on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt.$$

Comme $|a_n| \leq 1$, on a $\|u_n\|_{\infty}^{[0,1]} \leq |x|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, en l'occurrence sur $[0, 1]$, pour obtenir l'égalité ci-dessus. Comme la raison $\frac{1+t^2}{2}$ de la série géométrique $\sum u_n(t)$ appartient à $] -1, 1[$, on peut finalement écrire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+t^2)x}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} dt.$$

On distingue ensuite trois cas.

- Si $x = 0$, alors $f(x) = f(0) = 1$.
- Si $x \in]-1, 0[$, on pose $y = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$, de sorte que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{2-x-xt^2} = -\frac{2}{x} \int_0^1 \frac{dt}{y^2+t^2} \\ &= -\frac{2}{xy} \left[\arctan\left(\frac{t}{y}\right) \right]_0^1 = -\frac{2}{xy} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right). \end{aligned}$$

- Si $x \in]0, 1[$, on pose $z = \sqrt{\frac{2-x}{x}} > 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{2-x-xt^2} = \frac{2}{x} \int_0^1 \frac{dt}{z^2-t^2} = \frac{1}{xz} \int_0^1 \left(\frac{1}{z-t} + \frac{1}{z+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{xz} \left[\ln\left(\frac{z+t}{z-t}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{xz} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \ln\left(\frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

290. RMS 2025 945 Mines Ponts PSI..... énoncé p. 46

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t} dt$ et $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt$ convergent et déterminer leur valeur.
- (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$ converge.
- (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{1+(2n+1)^2}$.
- (d) Adapter les questions précédentes pour déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{ch}(t)} dt$.

SOLUTION. —

- (a) La fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , et $\forall t \geq 0$, $|\sin(t)e^{-\alpha t}| \leq e^{-\alpha t}$. Or $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ également.

Ceci signifie que $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t} dt$ converge absolument, soit que $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt$ converge.

Ensuite $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t} dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+i)t} dt \right) = \text{Im} \left(\left[\frac{e^{-\alpha+i)t}}{-\alpha+i} \right]_0^{+\infty} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{\alpha-i} \right) = \frac{1}{\alpha^2+1}$.

Enfin, $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi |\sin(t+n\pi)|e^{-\alpha(t+n\pi)} dt$ via le changement de variable $t \leftarrow t+n\pi$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n\pi} \int_0^\pi \sin(t)e^{-\alpha t} dt$.

Or $\int_0^\pi \sin(t)e^{-\alpha t} dt = \text{Im} \left(\left[\frac{e^{-\alpha+i)t}}{-\alpha+i} \right]_0^\pi \right) = \text{Im} \left(\frac{1-e^{(-\alpha+i)\pi}}{\alpha-i} \right) = \frac{1+e^{-\alpha\pi}}{\alpha^2+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n\pi} = \frac{1}{1-e^{-\alpha\pi}}$, donc $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-\alpha t} dt = \frac{1+e^{-\alpha\pi}}{1-e^{-\alpha\pi}} \frac{1}{\alpha^2+1}$.

- (b) L'intégrande $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , de plus $\frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ donc elle est intégrable au voisinage de 0.

Et $\frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\text{sh}(t)} \right)$ donc $\frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$, d'où son intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

En particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$ converge.

- (c) Pour tout $t > 0$, on a $\frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} = \frac{2 \sin t}{e^t - e^{-t}} = \frac{2 \sin t e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = 2 \sin t e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$.

Et donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-(2n+1)t} dt$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sin(t)e^{-(2n+1)t}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue.
- La série $\sum u_n$ converge simplement, et sa somme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{2\operatorname{sh}(t)}$ est continue.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable et $\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{1+e^{-(2n+1)\pi}}{1-e^{-(2n+1)\pi}} \frac{1}{(2n+1)^2+1}$ d'après la première question.
En particulier $\int_0^{+\infty} |u_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$ et donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |u_n|$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme assure que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2+1}$ toujours d'après la première question.

- (d) De même l'intégrande $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\operatorname{ch}(t)}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , avec $\frac{\sin(t)}{\operatorname{ch}(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $\frac{\sin(t)}{\operatorname{ch}(t)} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$, d'où son intégrabilité.

Pour tout $t > 0$, on a $\frac{\sin(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \frac{2 \sin t}{e^t + e^{-t}} = \frac{2 \sin t e^{-t}}{1 + e^{-2t}} = 2 \sin t e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-2nt}$.

Et donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

La série $\sum (-1)^n u_n$ vérifie là encore les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{ch}(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n u_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2+1}$.

291. RMS 2025 946 Mines Ponts PSI énoncé p. 47

Soient $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$ et $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \geq 1$.
- Montrer que I est bien définie.
- Déterminer la nature de $\sum u_n$. Ind. Effectuer un changement de variable.

SOLUTION. — \approx RMS 2024 1152 Mines Ponts PC

- (a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto e^{-x^n}$ est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, on a

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, le théorème de comparaison assure que $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente si bien que u_n est bien défini.

- (b) $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $0 \leq f(t) \leq e^{-t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, faisons le changement de variable $t = x^n$. On a alors $x = t^{1/n}$ et donc $dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1} dt$ et

$$u_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$$

en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \geq 1, \quad g_n(t) = e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1}.$$

Les fonctions g_n sont continue sur $[1; +\infty[$ et convergent simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 1$, l'exposant $\frac{1}{n} - 1$ est négatif donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \geq 1, \quad 0 \leq g_n(t) \leq e^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $[1; +\infty[$, on a l'hypothèse de domination qui nous permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} g_n(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue, positive et non identiquement nulle donc son intégrale $C = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est strictement positive. Cela prouve que $u_n \sim \frac{C}{n}$. Comme $\frac{C}{n} > 0$ et que la série $\sum \frac{C}{n}$ est divergente, le théorème de comparaison prouve que $\sum u_n$ est divergente.

292. RMS 2025 947 Mines Ponts PSI énoncé p. 47

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$. Limite de (I_n) ?

SOLUTION. — RMS 2010 1011 TPE PSI

La suite de fonctions $f_n: x \in [0, 1] \mapsto f(x^n)$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f: x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } x \in [0, 1[, \\ f(1) & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée : il existe M tel que $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$. On dispose alors de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| = |f(x^n)| \leq M$, où la fonction constante M est clairement intégrable sur $[0, 1]$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim I_n = \int_0^1 f(x) dx = f(0).$$

293. RMS 2025 948 Mines Ponts PSI énoncé p. 47

(a) Soient a et b deux réels > 0 . Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.

(b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n}$.

SOLUTION. — RMS 2017 759 Mines Ponts PSI, RMS 2018 862 Mines Ponts PSI

On distingue trois cas.

- Pour $b > 0$, on a $\frac{t^{a-1}}{1+t^b} \sim t^{a-1}$ quand $t \rightarrow 0$, donc $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $a > 0$, par le critère d'équivalence. On a alors

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = t^{a-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb}.$$

La série de fonctions $\sum (-1)^n t^{a-1+nb}$ converge simplement et sa somme $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ est continue. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0, 1[$,

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a-1+kb} \right| = t^{a-1} \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b} \right| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b},$$

expression d'une fonction continue, positive et intégrable sur $]0, 1[$. Via le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{a-1+nb} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

- Pour $b < 0$, on a $\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \frac{t^{a-1-b}}{1+t^{-b}} \sim t^{a-1-b}$ quand $t \rightarrow 0$, et l'intégrale converge si et seulement si $a-b > 0$ soit $a > b$. Si tel est le cas, on a de même

$$\frac{t^{a-1-b}}{1+t^{-b}} = t^{a-1-b} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{-nb},$$

et par convergence dominée on a cette fois

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{a-1-b-nb} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a-b-nb} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb-a}.$$

Malheureusement, rien ne dit qu'on n'a pas l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$ pour certaines valeurs de a et b . La réponse est donc incomplète dans ce cas.

- Si $b = 0$, l'intégrale converge si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\frac{1}{2a}$, alors que la série diverge grossièrement, puisque son terme général vaut $\frac{(-1)^n}{a}$.

Application : $a = 1$ et $b = 3$ donnent

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} \\ &= \int_0^1 \frac{1/3}{1+t} + \frac{-1/3t+2/3}{t^2-t+1} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln(1+t) - \frac{1}{6} \ln(1-t+t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$a = 1$ et $b = 4$ donnent

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n} &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} \\ &= \int_0^1 \frac{-t+\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})(t^2-\sqrt{2}t+1)} + \frac{t+\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})(t^2+\sqrt{2}t+1)} dt \\ &= \left[\frac{-\frac{\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)}{2} + \arctan\left(\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{\frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{2} + \arctan\left(\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi\sqrt{2} + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+2) - \sqrt{2} \ln(-\sqrt{2}+2)}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} (\pi + \ln(3+2\sqrt{2})) \end{aligned}$$

294. RMS 2025 949 Mines Ponts PSI énoncé p. 47

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

- Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\arctan(u)| \leq |u|$.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Déterminer le développement en éléments simples de $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2(1+t^2)}$ pour $|x| \neq 1$.
- Montrer que $f(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de f sur \mathbb{R} .
- Déterminer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 dt$.

SOLUTION. — RMS 2006 1135 CCP PC, RMS 2011 1097 ENSAM PSI, RMS 2014 782 Mines Ponts PC, RMS 2018 987 Mines Ponts PC, RMS 2018 1172 Centrale PSI, RMS 2018 1424 CCP PC, RMS 2020 726 Mines Ponts PSI, RMS 2020 1377 CCINP PC, RMS 2020 1382 IMT PC

On pose $f : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$. Il s'agit d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

(a) IAF appliquée à arctan sur $[0, u]$.

(b) L'hypothèse de domination du théorème de Leibniz est donnée par le calcul suivant : pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{t}{t(1+t^2)(1+x^2t^2)} \right| = \left| \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \right| \leq \varphi(t) := \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable, il s'ensuit que F est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

(c) On effectue le calcul de $F(x)$ pour $x > 0$, et on conclura grâce au caractère impair de F . Si $x \neq 1$, la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ d'indéterminée t est $\frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{x^2-1} [x \arctan(xt) - \arctan(t)]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

De plus, cette expression reste valable pour $x = 1$ par continuité de la dérivée (on a utilisé la positivité stricte de x de manière implicite, en écrivant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(xt) = \frac{\pi}{2}$ dans l'évaluation de l'intégrale). Comme $F(0) = 0$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$. Le caractère impair de F montre ensuite que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(d) L'intégrale est convergente (en zéro, la fonction intégrée a une limite finie égale à 1) et en $+\infty$, elle est dominée par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Son calcul se fait par intégration par parties (on l'écrit sur un segment $[0, a]$, puis on fait tendre a vers $+\infty$) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt = \left[-\frac{(\arctan t)^2}{t} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} dt = 2F(1) = \pi \ln 2.$$

295. RMS 2025 950 Mines Ponts PSI énoncé p. 47

Soit $f : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t+1)}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition D de f .
- (b) Montrer que f est continue sur D .
- (c) Montrer que la courbe représentative de f admet la droite $x = 1/2$ pour axe de symétrie.
- (d) Justifier l'existence d'une borne inférieure pour f ; la déterminer.
- (e) Déterminer un équivalent de f en 0 .

SOLUTION. —

- (a) On trouve $\mathcal{D}_f =]0, 1[$ par comparaison à des intégrales de Riemann.
- (b) Application classique du théorème de continuité, pour la dominatrice :

$$\forall \alpha \in [a, b], \forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \max \left(\frac{1}{x^a}, \frac{1}{x^b} \right) \leq \frac{1}{x^a} + \frac{1}{x^b}.$$

(c) On montre que $f(\alpha + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2} - \alpha)$ avec le changement de variable $u = \frac{1}{x}$.

- (d) Par symétrie il suffit de chercher l'inf sur $[\frac{1}{2}, 1[$. En suivant un peu l'idée suggérée par le changement de variable à la question précédente :
 Pour $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$,

$$\begin{aligned} f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)} \quad \text{on pose } u = 1/x \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)} + \int_0^1 \frac{1}{u^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{u})} \frac{du}{u^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} (x^{-\alpha} + x^\alpha) dx \end{aligned}$$

On étudie $\varphi : \alpha \mapsto x^{-\alpha} + x^\alpha$ sur $[0, \frac{1}{2}[$, $\varphi'(\alpha) = \ln x (x^\alpha - x^{-\alpha})$ s'annule pour $\alpha = 0$ et est positive. De plus, $\varphi(0) = 2$. On a donc :

$$\forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, \quad f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \geq 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2} = \pi.$$

De plus, ce minorant est atteint en $\alpha = 0$, donc on a même un minimum :

$$\boxed{\inf_{\alpha \in]0,1[} f(\alpha) = \min_{\alpha \in]0,1[} f(\alpha) = \pi.}$$

- (e) Au voisinage de 0, on sent bien que $f(\alpha)$ va exploser, et que la grosse contribution vient de l'intégration au voisinage de $+\infty$. Autre remarque, si x est grand, $\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \approx \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{1}{\alpha}$. Toutes ces réflexions amènent à penser que l'équivalent va être $\frac{1}{\alpha}$ et nous conduit à regarder d'abord la quantité :

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \right| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)} \right|,$$

ce membre de droite étant continu en $\alpha = 0$ (théorème classique), donc admet une limite finie en $\alpha = 0$ et donc est borné en 0. On a donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \stackrel{\alpha=0}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx + O(1) = \frac{1}{\alpha} + O(1).$$

D'autre part, $\alpha \mapsto \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ est continue en $\alpha = 0$, donc bornée au voisinage de 0. Finalement, par Chasles, $f(\alpha) \stackrel{\alpha=0}{=} \frac{1}{\alpha} + O(1)$, donc $\boxed{f(\alpha) \underset{\alpha=0}{\sim} \frac{1}{\alpha}}$.

296. RMS 2025 951 Mines Ponts PSI énoncé p. 47

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt)e^{-t} dt$.

- (a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
 (b) On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) possède une limite et la déterminer.
 (c) Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

SOLUTION. —

- (a) Notons u la fonction $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \arctan(xt)e^{-t}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction partielle $u(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+ , intégrable car dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto e^{-t}$. Et donc $f(x)$ est bien défini.
 - Pour tout $t \geq 0$, la fonction partielle $u(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction partielle $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \frac{t}{1+x^2t^2}e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \leq te^{-t}$, et $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , intégrable.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre assure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , avec $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x^2t^2}e^{-t} dt$.

- (b) Pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle). En particulier \mathbb{R}_+^* est stable par f donc u est à valeurs strictement positives.

De plus pour $x > 0$ on a $\forall t > 0, \arctan(xt) < xt$ donc $f(x) < \int_0^{+\infty} xte^{-t} dt = x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, u est décroissante et minorée donc converge, vers une limite $\ell \geq 0$.

f étant continue, ℓ est un point fixe de f . Et comme $\forall x > 0, f(x) < x$, nécessairement $\ell = 0$.

- (c) On montre, toujours grâce au théorème de régularité des intégrales à paramètre que f est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} , avec pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2xt^3}{(1+x^2t^2)^2}e^{-t} dt$ et $f^{(3)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{6x^2t^2-2}{(1+x^2t^2)^3}t^3e^{-t} dt$.

En particulier, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = -12$, d'où par la formule de Taylor Young le développement limité $f(x) = x - 2x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.

Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, il vient $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - 2u_n^3 + o(u_n^3)$.

Et donc pour tout réel α , on a $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha ((1 - 2u_n^2 + o(u_n^2))^\alpha - 1) = -2\alpha u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2})$.

Pour $\alpha = -2$, on obtient $1/u_{n+1}^2 - 1/u_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4$.

Le théorème de Césaro donne $1/n \sum_{k=0}^{n-1} 1/u_{k+1}^2 - 1/u_k^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4$ et donc $\frac{1}{nu_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4$. Autrement dit $u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ et comme u est à valeurs positives, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

297. RMS 2025 952 Mines Ponts PSI énoncé p. 48

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t} dt$.

- (a) Montrer que f est définie au moins sur un intervalle de la forme $] -\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.
- (b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 .
- (c) Calculer ce développement et en déduire une expression $f(x)$.

SOLUTION. —

- (a) Pour $x \in]-1; 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{x+e^t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto e^{-t}$ donc intégrable par le critère de domination. Ainsi, f est définie sur $] -1; 1[$.

- (b) Pour $x \in]-1; 1[$, on a $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xe^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-nt} dt$ puisque $\forall t \geq 0, |xe^{-t}| < 1$.

Autrement dit $f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-(n+1)t} dt$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}, u_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (-1)^n x^n e^{-(n+1)t}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue.
- La série $\sum u_n$ converge simplement et sa somme $t \mapsto \frac{1}{x+e^t}$ est continue.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |u_n| = |x|^n \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{|x|^n}{n+1}$, terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme assure que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt$.

Autrement dit, sur $] -1; 1[$, f est la somme d'une série entière.

- (c) Finalement, $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ et donc $xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)$ soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x \neq 0$ (et $f(0) = 1$).

298. RMS 2025 953 Mines Ponts PSI énoncé p. 48

Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner f' .
- (b) Soit $g : x \mapsto e^{x^2} f(x)$. Montrer que g est solution de $(E) : y' - 2xy = 1$ avec $y(0) = 0$.
- (c) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière et préciser le rayon.
- (d) La fonction g est-elle développable en série entière ?

SOLUTION. —

- (a) $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} , f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en tant que primitive, et f' est la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$.
- (b) g est également de classe \mathcal{C}^1 en tant que produit, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2xe^{x^2} f(x) + e^{x^2} f'(x) = 2xg(x) + 1$, autrement dit g est solution de $(E) : y' - 2xy = 1$, et on a bien la condition initiale $g(0) = f(0) = 0$.
- (c) Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Supposons y solution de (E) . Alors $\forall x \in]-R; R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 1$.

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 1, ceci équivaut à $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$.

Par récurrence, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{a_0}{n!}$ et $a_{2n+1} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$. Et donc $y : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Réciproquement, les deux séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ sont de rayon de convergence infini (via le critère de d'Alembert par exemple), donc les fonctions de la forme $x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ sont définies sur \mathbb{R} , et solutions de (E) par construction.

- (d) L'ensemble des solutions de (E) développables en série entière forme un espace affine de dimension 1, c'est donc l'ensemble des solutions de (E) . g étant solution de (E) , elle est donc développable en série entière.

N.B. On peut aussi noter que f est développable en série entière en tant que primitive, et donc g aussi en tant que produit.

299. RMS 2025 954 Mines Ponts PSI énoncé p. 48

Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- (a) Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 . Montrer de plus que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
- (b) Étudier la convexité de Γ et celle de $\ln \circ \Gamma$.
- (c) Pour tout $x > 0$, établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} (1 - t/n)^n dt = \Gamma(x)$.
- (d) Exprimer $\int_0^n t^{x-1} (1 - t/n)^n dt$ en fonction de $\int_0^1 u^{x-1} (1 - u)^n du$.
- (e) Montrer que la suite de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ converge simplement vers Γ . Ind. Procéder par intégrations par parties successives.

SOLUTION. —

- (a) Soit $u : (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto t^{x-1} e^{-t}$.

Pour tout $x > 0$, la fonction partielle $u(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , de plus $u(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ donc, par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{x-1} dt$, soit convergente.

Enfin $u(x, t) = O_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc par le critère de domination $u(x, \cdot)$ est également intégrable sur $[1; +\infty[$. Finalement, Γ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Et pour tout $x > 0$, $\Gamma(x)$ est strictement positif en tant qu'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. Enfin,

- Pour tout $x > 0$, la fonction partielle $u(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , intégrable comme vu précédemment.
- Pour tout $t > 0$, la fonction partielle $u(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $x > 0$, la fonction partielle $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto -\ln(t)t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , intégrable car dominée par $t \mapsto t^{x/2-1}$ au voisinage de 0 et par $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$.
Et la fonction partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \cdot) : t \mapsto \ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a la domination locale $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t) = \ln^2(t)t^{a-1}e^{-t}$ si $t \leq 1$, $\ln^2(t)t^{b-1}e^{-t}$ si $t \geq 1$. Et la fonction $\varphi_{a,b}$ est continue, intégrable car dominée par $t \mapsto t^{a/2-1}$ au voisinage de 0 et par $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre assure que Γ est bien de classe \mathcal{C}^2 (et que ses dérivés s'obtiennent en dérivant sous le signe d'intégration).

- (b) On a en particulier $\forall x > 0$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2(t)t^{x-1}e^{-t} dt > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle) donc Γ est (strictement) convexe.

Et, en dérivant comme une composée $\ln \circ \Gamma$, on a $(\ln \circ \Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ puis $(\ln \circ \Gamma)'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$, du signe de $\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2$.

Or pour $x > 0$, l'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée à $f : t \mapsto t^{x/2-1/2}e^{-t/2}$ et $g : t \mapsto -\ln(t)t^{x/2-1/2}e^{-t/2}$, toutes deux de carrés intégrables sur \mathbb{R}_+^* donne

$$(\Gamma'(x))^2 = \left(\int_0^{+\infty} fg \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} f^2 \int_0^{+\infty} g^2 = \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

On obtient $\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2 \geq 0$ donc $(\ln \circ \Gamma)'' \geq 0$, autrement dit $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

- (c) Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_n(t) = t^{x-1}(1-t/n)^n$ si $t \leq n$ et $f_n(t) = 0$ sinon.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue (y compris en n).
- Soit $t > 0$. Pour $n > t$, on a $f_n(t) = t^{x-1}e^{n \ln(1-t/n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^{x-1}e^{-t}$. Autrement dit la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, elle-même continue.
- Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour $t < n$, $\ln(1-t/n) \leq -t/n$ donc $0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t}$, encadrement encore valable pour $t \geq n$ puisqu'alors $f_n(t) = 0$. On a donc $|f_n| \leq f$, et f est continue, intégrable.

Le théorème de convergence dominée assure alors que $\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f = \Gamma(x)$, autrement dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n dt = \Gamma(x)$.

- (d) $u \mapsto nu$ étant de classe \mathcal{C}^1 , strictement croissante, bijective de $]0; 1]$ sur $]0; n]$, le théorème de changement de variable assure que $\int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n dt = \int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n n du = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

- (e) Une intégration par parties (licite...) donne $\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du = \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^x}{x}(-n(1-u)^{n-1}) du = \frac{n}{x} \int_0^1 u^x(1-u)^{n-1} du$.

Une seconde intégration par parties donne alors $\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du = \frac{n(n-1)}{x(x+1)} \int_0^1 u^{x+1}(1-u)^{n-2} du$, etc, soit après n intégrations par parties,

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Et donc $\int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n dt = n^x \int_0^1 u^{x+n-1} du = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = f_n(x)$.

Comme $\int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$, ceci assure que (f_n) converge simplement vers Γ .

300. RMS 2025 955 Mines Ponts PSI..... énoncé p. 48

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- (b) Trouver une relation entre f et f' .
- (c) En déduire une expression simple de $f(x)$.

SOLUTION. — RMS 2017 1332 CCP PSI, RMS 2020 722 Mines Ponts PSI
 On pose $g : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-t^2} \cos(2xt)$.

- (a) On vérifie les hypothèses traditionnelles :
 - Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $g(\cdot, x)$ est continue sur \mathbb{R} .
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
 - Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $|g(x, t)| \leq \varphi(t) = e^{-t^2}$, avec φ continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, car négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

D'après le théorème de continuité sous le signe \int , la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} .

- (b) Sur la lancée, le théorème de dérivation sous le signe \int donne f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2t \sin(2xt) dt.$$

- (c) Une intégration par parties, justifiée par la convergence du terme évalué, donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \underbrace{\left[\sin(2xt) e^{-t^2} \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=0-0=0} - 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt = -2x f(x).$$

On en déduit l'existence d'une constante réelle C telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C e^{-x^2}$ puis, avec la donnée de l'énoncé, $C = f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}.$$

301. RMS 2025 956 Mines Ponts PSI énoncé p. 48

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition I de F .
 Montrer que F est de classe C^1 sur I et donner son sens de variation.
- (b) Déterminer les limites de F aux bornes de I .
- (c) Calculer $G(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$ pour $x > 0$.
- (d) Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$.
 Ind. On pourra étudier $|F - G|$ et utiliser la relation de Chasles.

SOLUTION. —

- (a) Pour $x \leq 0$, on a $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, l'intégrale diverge grossièrement.

Et pour $x > 0$, l'intégrande $t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale converge (absolument). Ainsi $I = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $u : (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction partielle $u(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+ , intégrable d'après ce qui précède.

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction partielle $u(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\frac{\partial u}{\partial x} : (x, t) \mapsto -\frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}e^{-xt}$.
- Pour tout $x > 0$, la fonction partielle $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot)$ est donc continue sur \mathbb{R}_+ .
- Enfin pour tout $a > 0$, on a la domination $\forall(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \leq \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}e^{-at}$ avec $t \mapsto \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}e^{-at}$ continue, positive, intégrable sur \mathbb{R}_+ (dominée par $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$).

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre (avec domination locale) assure que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $I = \mathbb{R}_+^*$, avec $\forall x > 0$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}e^{-xt} dt$.

En particulier F' est négative (strictement) donc F est décroissante (idem).

N.B. La décroissance de F s'obtient directement, sans dériver...

- (b) Pour tout $x > 0$, on a $0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt = \frac{1}{x^2}$ donc par encadrement $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Le théorème de la limite monotone assure que F admet bien une limite en 0.

Et pour tout $A > 0$, on a $\forall x > 0$, $F(x) \geq \int_0^A \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}e^{-xt} dt$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de montrer sans piège que $x \mapsto \int_0^A \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}e^{-xt} dt$ est continue sur \mathbb{R} , donc en particulier en 0.

Passant à la limite en 0 dans l'inégalité, il vient $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \geq \int_0^A \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

Ceci pour tout $A > 0$, or $\int_0^A \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$, donc nécessairement $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = +\infty$.

- (c) Soit $x > 0$. Le changement de variable $u = xt$ (licite) donne $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{x^4} du = \frac{\Gamma(4)}{x^4} = \frac{6}{x^4}$.

- (d) Le même changement de variable donne $|F(x) - G(x)| = G(x) - F(x) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^4/x^4}}\right) \frac{u^3 e^{-u}}{x^4} du$ donc

$$x^4 |F(x) - G(x)| = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^4/x^4}}\right) u^3 e^{-u} du$$

Or pour tout $u \geq 0$, on a $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^4/x^4}}\right) u^3 e^{-u} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, la fonction nulle est bien sûr continue, et l'on dispose de la domination $\left|\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^4/x^4}}\right) u^3 e^{-u}\right| = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^4/x^4}}\right) u^3 e^{-u} \leq u^3 e^{-u}$, avec $u \mapsto u^3 e^{-u}$ intégrable.

Le théorème de convergence dominée continu assure que $\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^4/x^4}}\right) u^3 e^{-u} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} 0 du = 0$, autrement dit que $x^4 |F(x) - G(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ou encore $F(x) - G(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^4}\right)$.

Comme $G(x) = \frac{6}{x^4}$, ceci signifie exactement que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$.

302. RMS 2025 957 Mines Ponts PSI énoncé p. 49

On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner l'expression de $f'(x)$.
- Montrer que g est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2g'(x)g(x)$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$.
- En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

SOLUTION. — RMS 2014 1287 CCP PSI, RMS 2018 855 Mines Ponts PSI

(a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle est continue positive, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

(b) • Posons $\varphi: (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $x \geq 0$ et $t \in [0, 1]$. La fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$; la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment. Enfin, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment.

Soit $a > 0$ et $x \in [0, a]$: $\forall t \in [0, 1]$, $|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)| \leq 2a$ et la fonction constamment égale à $2a$ est intégrable sur $[0, 1]$.

On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ et donc sur \mathbb{R}_+ . $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

• La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ en tant que primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue $t \mapsto e^{-t^2}$. Posons $H = G^2$, ce qui définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ en tant que produit de telles fonctions. On a $G(0) = 0$.

• Soit $x \geq 0$. Comme $F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -H'(x)$, on a $F' + H' = 0$. On en déduit que

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) + G^2(x) = f(0) + G^2(0) = \frac{\pi}{4}.$$

• Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs de limite $+\infty$. La suite de fonctions $t \mapsto \varphi(x_n, t)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, 1]$, $|\varphi(x_n, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$. Par application du théorème de convergence dominée et du critère séquentiel des limites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Conclusion : par passage à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ dans l'égalité $F + G^2 = \frac{\pi}{4}$, on obtient $(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt)^2 = \frac{\pi}{4}$.

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

303. RMS 2025 958 Mines Ponts PSI énoncé p. 49

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$. Soit $g: x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que g se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

SOLUTION. — *Solution avec la formule de Taylor Young (qui se démontre à partir de formule de Taylor avec reste intégral).* Les théorèmes généraux assurent que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* . Et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$ donc g se prolonge par

continuité en 0. Pour conclure, il reste à prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g^{(p)}$ admet une limite finie en 0. Le théorème de limite de la dérivée assure alors que le prolongement par continuité de g est indéfiniment dérivable en 0, donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \neq 0$, la formule de Leibnitz donne

$$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(p-k)}(x) \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! x^{k+1}} f^{(p-k)}(x)$$

Et grâce à la formule de Taylor Young, appliquée à l'ordre $k+1$ à $f^{(p-k)}$ en 0 (ce qui est licite puisque f est de classe \mathcal{C}^∞),

$$\begin{aligned} g^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! x^{k+1}} \left(\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} f^{(p-k+i)}(0) + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(p+1)}(0) + o(x^{k+1}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^k (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! i! x^{k-i+1}} f^{(p-k+i)}(0) + \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! (k+1)!} f^{(p+1)}(0) + o(1) \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{k=j-1}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! (k+1-j)! x^j} f^{(p+1-j)}(0) + \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! (k+1)!} f^{(p+1)}(0) + o(1) \end{aligned}$$

grâce au changement d'indice $j = k - i + 1$.

Le terme $j = p + 1$ vaut $(-1)^p \frac{1}{x^{p+1}} f(0)$, il est nul par hypothèse. Et pour $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on a via un changement d'indice $\ell = k + 1 - j$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=j-1}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! (k+1-j)!} &= \sum_{\ell=0}^{p+1-j} (-1)^{\ell+j-1} \frac{p!}{(p-\ell-j+1)! \ell!} \\ &= (-1)^{j-1} \frac{p!}{(p-j+1)!} \sum_{\ell=0}^{p+1-j} (-1)^\ell \binom{p-j+1}{\ell} \\ &= (-1)^{j-1} \frac{p!}{(p-j+1)!} (1-1)^{p-j+1} = 0 \end{aligned}$$

grâce à la formule du binôme.

Ainsi, au voisinage de 0, $g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! (k+1)!} f^{(p+1)}(0) + o(1)$, c'est-à-dire que $g^{(p)}$ admet une limite finie en 0.

Solution avec la formule de Taylor avec reste intégral.

Le théorème fondamental de l'intégration (ou formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre zéro), l'égalité $f(0) = 0$, et le changement de variable affine $t = ux$, montrent que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt = x \int_0^1 f'(ux) du.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(ux) du.$$

Tout d'abord, g se prolonge par continuité en zéro en posant $g(0) = f'(0)$ puisque g est la fonction taux d'accroissement de f en zéro. On remarque que l'expression $\int_0^1 f'(ux) du$ vaut aussi $f'(0)$ lorsque $x = 0$, de sorte qu'on dispose d'une expression uniforme du prolongement de g , encore noté g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 f'(ux) du = \int_0^1 h(x, u) du,$$

où l'on a posé $h : (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mapsto f'(xu)$. La fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ par rapport au couple (x, u) , puisque f l'est. De plus, comme l'intervalle d'intégration est un segment, l'hypothèse de domination locale pour $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}$ sera vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer le théorème de régularité des intégrales à paramètres : la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On peut en outre calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) du = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(xu) du.$$

304. RMS 2025 959 Mines Ponts PSI énoncé p. 49

Soit (E) l'équation différentielle : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

- (a) Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
- (b) Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$.
- (c) Montrer qu'il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+ .

SOLUTION. — \approx RMS 2019 1046 Centrale PSI

- (a) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. En utilisant le théorème de dérivation terme à terme des sommes des séries entières et le théorème d'unicité des coefficients d'un développement en série entière, on montre que y est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ \forall n \geq 3, a_n = -(n-1)a_{n-1}. \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour $n \geq 3$, $a_n = (-1)^n (n-1)!$ mais alors $R = 0$. Il n'existe donc pas de solution développable en série entière au voisinage de 0.

- (b) On résout avec la variation de la constante : les solutions sont les fonctions telles qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \left(C + \int_1^x e^{-1/t} dt \right) e^{1/x}.$$

- (c) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$, pour que y admette une limite finie en 0, il est nécessaire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (C + \int_1^x e^{-1/t} dt) = 0$, c'est-à-dire que $C = \int_0^1 e^{-1/t} dt$, donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt,$$

ce qui donne déjà l'unicité. Cette condition est suffisante : en effet, $0 \leq y(x) = \int_0^x e^{1/x-1/t} dt \leq \int_0^x dt = x$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$.

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}} dt$.

- (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et vérifie l'équation différentielle (E) : $2xy'' + y' - 2y = 0$.
- (c) Résoudre l'équation (E) en posant $y(x) = z(\sqrt{x})$.
- (d) Donner l'expression de $f(x)$.

SOLUTION. —

- (a) Soit $x \geq 0$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}}$ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* , continue. De plus $\frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}} = O_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ donc par le critère de domination (par une fonction de Riemann intégrable) $t \mapsto \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0.

Et $\frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}} = O_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t})$ donc toujours par le critère de domination, $t \mapsto \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ceci prouve bien que f est définie sur \mathbb{R}_+ .

- (b) Soit $u : (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}}$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction partielle $u(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , intégrable comme justifié précédemment.
- Pour tout $t > 0$, la fonction partielle $u(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ , avec $\frac{\partial u}{\partial x} : (x, t) \mapsto -\frac{e^{-t} e^{-x/t}}{t\sqrt{t}}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{t^2\sqrt{t}}$.
- De ce fait, pour tout $x > 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont bien continues sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $a > 0$. Pour tout $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-t} e^{-a/t}}{t\sqrt{t}}$ et $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-t} e^{-a/t}}{t^2\sqrt{t}}$, avec $t \mapsto \frac{e^{-t} e^{-a/t}}{t\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t} e^{-a/t}}{t^2\sqrt{t}}$ continues, positives, intégrables sur \mathbb{R}_+^* . En effet ces deux fonctions se prolongent par continuité en 0 (par la valeur 0) et sont dominées par $t \mapsto e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre assure que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , avec $\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-t} e^{-x/t}}{t\sqrt{t}} dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{t^2\sqrt{t}} dt$.

N.B. On peut également montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, pour $x > 0$, on a $2xf''(x) - 2f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(2x-2t^2)e^{-t} e^{-x/t}}{t^2\sqrt{t}} dt$.

On intègre alors par parties en posant $u'(t) = \frac{2x-2t^2}{t^2} e^{-t-x/t}$, $u(t) = 2e^{-t-x/t}$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $v'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , et le produit uv admet des limites finies (nulles) en 0 et $+\infty$. Donc l'intégration par parties est légitimes et donne

$$2xf''(x) - 2f(x) = - \int_0^{+\infty} 2e^{-t-x/t} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} dt = -f'(x)$$

f est bien solution de l'équation différentielle donnée.

- (c) Soit donc y deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $z : t \mapsto y(t^2)$, de sorte que $\forall x > 0, y(x) = z(\sqrt{x})$.

Alors $\forall x > 0, y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x})$ et $y''(x) = \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x}) - \frac{1}{4x^{3/2}} z'(\sqrt{x})$.

Ainsi y est solution si et seulement si $\forall x > 0, \frac{1}{2} z''(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) - 2z(\sqrt{x}) = 0$ soit $\forall t > 0, \frac{1}{2} z''(t) - 2z(t) = 0$.

Autrement dit, si et seulement si z est de la forme $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et donc y de la forme $x \mapsto \lambda e^{2\sqrt{x}} + \mu e^{-2\sqrt{x}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (d) f est solution donc de la forme précédente. f est décroissante donc ne peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$, donc nécessairement f est de la forme $x \mapsto \mu e^{-2\sqrt{x}}$.

Enfin la continuité de f en 0 assure que $\mu = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx = \sqrt{\pi}$.

306. RMS 2025 961 Mines Ponts PSI énoncé p. 49

On s'intéresse aux solutions $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

- (a) Montrer que $a_0 = 1/2, a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.
 (b) En déduire l'unicité de f .
 (c) Déterminer les a_n , le rayon de convergence de f puis exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

SOLUTION. —

- (a) Supposant le rayon de convergence R de la série entière définissant f strictement positif, on a pour tout $x \in]-R; R[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 1 = 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2}) x^n$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 1, il vient $a_0 = 1/2, a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.

- (b) Ces conditions définissent par récurrence la suite (a_n) , autrement dit on a bien unicité de la solution développable en série entière f .
 (c) Une récurrence élémentaire donne $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}$ et $a_{2n+1} = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}\right)$ est bornée, donc $(a_n x^n)$ aussi, si bien que le rayon de convergence de la série entière définissant f est infini.

Et pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\text{ch } x - 1}{x^2}$.

307. RMS 2025 962 Mines Ponts PSI énoncé p. 50

On note (E) l'équation différentielle $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

- (a) Déterminer les solutions de (E) non nulles développables en série entière. Préciser le rayon de convergence.
 (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur un intervalle raisonnable.
 (c) Les raccorder entre elles.

SOLUTION. —

- (a) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. f est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in]-R; R[$,

$$-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} ((-n^2 - 2n - 1)a_n + (n+1)^2 a_{n+1}) x^n$$

(on a rajouté les premiers termes, nuls). Soit, par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, $\forall n \in \mathbb{N}, (-n^2 - 2n - 1)a_n + (n+1)^2 a_{n+1} = 0$ soit $a_{n+1} = a_n$.

f est donc de la forme $x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x}$.

Réciproquement, une telle fonction est développable en série entière sur $] -1; 1[$, solution de (E).

(b) (E) est résolue sur $] -\infty ; 0 [$, $] 0 ; 1 [$ et $] 1 ; +\infty [$. Soit I l'un de ces trois intervalles.

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ étant solution, on procède par réduction de l'ordre en cherchant les solutions sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{1-x}$ avec λ deux fois dérivable.

Une telle fonction est solution si et seulement si $\forall x \in I$, $x(1-x) \left(\frac{\lambda''(x)}{1-x} + \frac{2\lambda'(x)}{(1-x)^2} + \frac{2\lambda(x)}{(1-x)^3} \right) + (1-3x) \left(\frac{\lambda'(x)}{1-x} + \frac{\lambda(x)}{(1-x)^2} \right) - \frac{\lambda(x)}{1-x} = 0$ soit après simplification $x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$.

Autrement dit si λ' est de la forme $x \mapsto \alpha e^{-\ln|x|}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, ou encore $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$ (quitte à changer le signe de la constante α).

On obtient comme solutions sur I les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\alpha \ln|x| + \beta}{1-x}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Raccord en 0 :

Soit f une solution sur $] -\infty ; 1 [$. Par restriction, f induit une solution sur $] -\infty ; 0 [$ et une solution sur $] 0 ; 1 [$. Elle est donc de la forme $x \mapsto \frac{\alpha \ln|x| + \beta}{1-x}$ sur $] -\infty ; 0 [$, et de la forme $x \mapsto \frac{\alpha' \ln|x| + \beta'}{1-x}$ sur $] 0 ; 1 [$.

La continuité en 0 impose $\alpha = 0 = \alpha'$ et $\beta = \beta'$, donc f est de la forme $x \mapsto \frac{\beta}{1-x}$. Réciproquement, une telle fonction est bien solution sur $] -\infty ; 1 [$.

Raccord en 1 :

Soit f une solution sur $] 0 ; +\infty [$. Par restriction, f induit une solution sur $] 0 ; 1 [$ et une solution sur $] 1 ; +\infty [$. Elle est donc de la forme $x \mapsto \frac{\alpha \ln|x| + \beta}{1-x}$ sur $] 0 ; 1 [$, et de la forme $x \mapsto \frac{\alpha' \ln|x| + \beta'}{1-x}$ sur $] 1 ; +\infty [$.

La continuité en 1 impose $\beta = 0 = \beta'$, et comme $\frac{\ln x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -1$, $\alpha = \alpha'$. Donc f est de la forme $x \mapsto \frac{\alpha \ln x}{1-x}$ si $x \neq 1$, et $f(1) = -\alpha$. Réciproquement, une telle fonction f est bien de classe \mathcal{C}^2 , en effet $f(1+h) = -\alpha \frac{\ln(1+h)}{h}$ et la fonction $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est développable en série entière sur $] -1 ; 1 [$ donc indéfiniment dérivable sur cet intervalle, ce qui assure que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $] 0 ; 2 [$.

Et comme $\forall x \in] 0 ; +\infty [\setminus \{1\}$, $x(1-x)f''(x) + (1-3x)f'(x) - f(x) = 0$, cette condition reste vérifiée pour $x = 1$ par continuité. Autrement dit f est bien solution sur $] 0 ; +\infty [$.

Solutions sur \mathbb{R} :

Une solution sur \mathbb{R} étant par restriction une solution sur $] -\infty ; 1 [$, elle est sur cet intervalle de la forme $x \mapsto \frac{\beta}{1-x}$, et comme c'est aussi par restriction une solution sur $] 0 ; +\infty [$, elle est sur cet intervalle de la forme $x \mapsto \frac{\alpha \ln x}{1-x}$.

En particulier, elle est sur $] 0 ; 1 [$ à la fois de la forme $x \mapsto \frac{\beta}{1-x}$ et de la forme $x \mapsto \frac{\alpha \ln x}{1-x}$. Donc $\alpha = \beta = 0$ et notre solution est la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien sûr solution sur \mathbb{R} .

308. RMS 2025 963 Mines Ponts PSI énoncé p. 50

On note (E) l'équation différentielle $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2(1+x)$.

- (a) Trouver les solutions de l'équation homogène associée de la forme $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Trouver une solution particulière de (E), d'abord sur $] 0, +\infty [$, puis sur $] -\infty, 0 [$.
Ind. On la cherchera sous la forme $x\alpha(x) + x^2\beta(x)$, où α et β sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $x\alpha'(x) + x^2\beta'(x) = 0$.
- (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

SOLUTION. —

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Sur un intervalle non trivial I sur lequel elle est définie, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est solution de l'équation homogène si et seulement si $\forall x \in I$, $\alpha(\alpha-1)x^\alpha - 2\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = 0$ soit $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha = 0$.
D'où la condition $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, soit $\alpha = 1$ ou 2 .
Réciproquement, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$, définies sur \mathbb{R} , sont donc solutions sur \mathbb{R} . Étant non colinéaires, elles constituent une base de l'espace des solutions sur tout intervalle sur laquelle l'équation est résolue, notamment sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

- (b) Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\alpha(x) + x^2\beta(x)$ avec α et β des fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $x\alpha'(x) + x^2\beta'(x) = 0$. Alors f est de classe \mathcal{C}^1 et $\forall x > 0, f'(x) = \alpha(x) + 2x\beta(x)$. Donc f' est encore de classe \mathcal{C}^1 et $\forall x > 0, f''(x) = \alpha'(x) + 2\beta(x) + 2x\beta'(x)$.

Ainsi f est solution si et seulement si $\forall x > 0, x^2\alpha'(x) + 2x^3\beta'(x) = 2 + 2x$.

Comme par hypothèse $\forall x > 0, x\alpha'(x) + x^2\beta'(x) = 0$, on obtient $\beta'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$ et $\alpha'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}$.

On obtient (par exemple) $\forall x > 0, \alpha(x) = -2\ln x + \frac{2}{x}$ et $\beta(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, et donc $f(x) = 1 - 2x \ln x - 2x$, solution particulière sur \mathbb{R}_+^* .

De même sur \mathbb{R}_-^* , on obtient la solution particulière $x \mapsto 1 - 2x \ln |x| - 2x$.

N.B. La lectrice attentive aura reconnu la méthode de variation des constantes...

- (c) Supposons trouvée une solution y définie sur \mathbb{R} . En particulier sa restriction à \mathbb{R}_+^* est solution donc de la forme $y : x \mapsto \alpha x + \beta x^2 + 1 - 2x \ln x - 2x$. Et par continuité en 0, on a $y(0) = 1$.

Mais alors $\frac{y(x)-y(0)}{x} = -2 \ln x + \alpha - 2 + \beta x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui signifie que y n'est pas dérivable en 0, c'est absurde.

Ainsi il n'y a pas de solution sur \mathbb{R} .

309. RMS 2025 964 Mines Ponts PSI énoncé p. 50

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_{a,b,c} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Soit $F = \{f_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

- Montrer que F est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
- Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = Mf(t)$.
- La matrice M est-elle inversible ?
- Quelles sont les valeurs propres de M ? Pouvait-on s'y attendre ?

SOLUTION. —

- (a) F est par construction $\{af_{1,0,0} + bf_{0,1,0} + cf_{0,0,1}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, autrement dit $F = \text{Vect}(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$, ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ donc un espace vectoriel.

Et la famille $(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$ est libre, donc forme une base de F , qui est de ce fait de dimension 3. En effet soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $af_{1,0,0} + bf_{0,1,0} + cf_{0,0,1} = 0 = f_{a,b,c}$. En particulier $f_{a,b,c}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $b = 0$ et $f_{a,b,c}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $c = 0$. Enfin $f_{a,b,c}(0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $a = 0$.

- (b) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f'_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t - ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a - ce^{-t} \end{pmatrix}$.

Déterminer la première ligne de M consiste à trouver α, β, γ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, be^t - ce^{-t} = \alpha(be^t + ce^{-t}) + \beta(2a - be^t) + \gamma(a + ce^{-t})$. Par liberté de la famille $t \mapsto 1, t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}$, ceci équivaut aux conditions $2\beta + \gamma = 0, \alpha - \beta = 1$ et $\alpha + \gamma = -1$, soit $\alpha = 3, \beta = 2$ et $\gamma = -4$.

Raisonnant de même pour les deux autres lignes, on obtient $f'_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t - ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a - ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$.

- Les deux dernières colonnes de M sont proportionnelles donc M n'est pas inversible.
- Un calcul sans piège donne $\chi_M = X(X - 1)(X + 1)$ donc $\text{Sp}(M) = \{-1, 0, 1\}$.

On retrouve ces valeurs propres en utilisant la base de F . En effet l'équation $f'_{1,0,0}(t) = Mf_{1,0,0}(t)$ s'écrit $0 = M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc 0 est valeur propre. De même $f'_{0,1,0}(t) = Mf_{0,1,0}(t)$ s'écrit $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre,

enfin $f'_{0,0,1}(t) = Mf_{0,0,1}(t)$ s'écrit $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-t} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc -1 est valeur propre. Et M est de taille 3 donc n'a pas d'autres valeurs propres.

310. RMS 2025 965 Mines Ponts PSI énoncé p. 50

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
- (b) Résoudre $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

SOLUTION. —

- (a) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $g : (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi/2[\mapsto f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.
 g est de classe \mathcal{C}^1 en tant que composée, et pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi/2[$, on a $\partial_1 g(\rho, \theta) = \cos \theta \partial_1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta \partial_2 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.
 f est donc solution si et seulement si $\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi/2[$, $\rho \cos \theta \partial_1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \rho \sin \theta \partial_2 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \alpha f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ soit

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi/2[, \rho \partial_1 g(\rho, \theta) = \alpha g(\rho, \theta)$$

f est donc solution si et seulement si, pour tout $\theta \in]0; \pi/2[$, il existe une constante $\lambda(\theta)$ telle que $\forall \rho > 0$, $g(\rho, \theta) = \lambda(\theta) e^{\alpha \ln \rho} = \lambda(\theta) \rho^\alpha$. C'est-à-dire si g est de la forme $(\rho, \theta) \mapsto \lambda(\theta) \rho^\alpha$, avec λ de classe \mathcal{C}^1 puisque g l'est.

Finalement, f est solution si et seulement si f est de la forme $(x, y) \mapsto \lambda(\arctan(y/x)) \sqrt{x^2 + y^2}^\alpha$, avec λ de classe \mathcal{C}^1 .

- (b) Avec le même changement de variable, f est ici solution si et seulement si $\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi/2[$, $\rho \partial_1 g(\rho, \theta) = \rho g(\rho, \theta)$ soit $\partial_1 g(\rho, \theta) = g(\rho, \theta)$.

Et donc f est solution si et seulement si, pour tout $\theta \in]0; \pi/2[$, il existe une constante $\lambda(\theta)$ telle que $\forall \rho > 0$, $g(\rho, \theta) = \lambda(\theta) e^\rho$, c'est-à-dire g de la forme $(\rho, \theta) \mapsto \lambda(\theta) e^\rho$, avec λ de classe \mathcal{C}^1 puisque g l'est.

Finalement, f est solution si et seulement si f est de la forme $(x, y) \mapsto \lambda(\arctan(y/x)) e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$, avec λ de classe \mathcal{C}^1 .

311. RMS 2025 966 Mines Ponts PSI énoncé p. 50

Soit $J : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$.

- (a) Montrer que J est bien définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que J est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.
- (c) Montrer que $x \cdot J''(x) + J'(x) + J(x) = 0$. **Correction : $xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.**
- (d) Soit $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = J(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et que $\Delta \varphi + \varphi = 0$.

SOLUTION. —

- (a) Soit $u : (x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0; \pi] \mapsto \cos(x \sin \theta)$.

u est de classe \mathcal{C}^2 par les théorèmes généraux donc

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction partielle $u(x, \cdot)$ est continue sur $[0; \pi]$, intégrable en tant que fonction continue sur un segment.
- Pour tout $\theta \in [0; \pi]$, la fonction partielle $u(\cdot, \theta)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \cdot) : \theta \mapsto -\sin \theta \sin(x \sin \theta)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \cdot) : \theta \mapsto -\sin^2 \theta \cos(x \sin \theta)$ sont continues sur $[0; \pi]$ (et intégrables).

- Pour tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $M = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{\infty, [a; b] \times [0; \pi]}$ telle que

$$\forall (x, \theta) \in [a; b] \times [0; \pi], \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \theta) \right| \leq M$$

avec $\theta \mapsto M$ continue sur $[0; \pi]$, intégrable.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètre (avec domination locale) assure que J est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J'(x) = \int_0^\pi -\sin \theta \sin(x \sin \theta) d\theta$ et $J''(x) = \int_0^\pi -\sin^2 \theta \cos(x \sin \theta) d\theta$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Utilisant le développement en série entière de la fonction cosinus, on a $J(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \sin^{2n} \theta}{(2n)!} d\theta$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : \theta \in [0; \pi] \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n} \sin^{2n} \theta}{(2n)!}$, continue.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_\infty = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, terme général d'une série convergente (de somme $\text{ch } x$). La série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément. Le théorème de convergence uniforme sur un segment assure que $J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n} \theta d\theta$.

Ceci assure que J est développable en série entière, sur \mathbb{R} tout entier (rayon de convergence infini).

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $xJ''(x) + xJ(x) = \int_0^\pi x(1 - \sin^2 \theta) \cos(x \sin \theta) d\theta = \int_0^\pi x \cos^2 \theta \cos(x \sin \theta) d\theta$.

On intègre par parties en primitivant $\theta \mapsto x \cos \theta \cos(x \sin \theta)$ en $\theta \mapsto \sin(x \sin \theta)$ (les fonctions sont bien de classe \mathcal{C}^1) et l'on obtient

$$xJ''(x) + xJ(x) = [\cos \theta \sin(x \sin \theta)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \sin(x \sin \theta) d\theta = -J'(x)$$

- (d) φ est de classe \mathcal{C}^2 en tant que composée : $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et J est de classe \mathcal{C}^2 .

Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} J'(\sqrt{x^2 + y^2})$ puis

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) J'(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{x^2}{x^2 + y^2} J''(\sqrt{x^2 + y^2})$$

On calcule de même $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y)$, et donc en sommant

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x, y) &= \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) J'(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} J''(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} J'(\sqrt{x^2 + y^2}) + J''(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= -J(\sqrt{x^2 + y^2}) = -\varphi(x, y) \end{aligned}$$

d'après la question précédente. On a bien $\Delta \varphi + \varphi = 0$.

312. RMS 2025 967 Mines Ponts PSI énoncé p. 51

On pose $f(x, y) = \frac{1}{1-y^2} \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right)$. On note Ω l'ensemble de définition de f .

- Représenter Ω et montrer que c'est un ouvert.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .
- Comparer $f(1/x, y)$ et $f(x, y)$. Donner une interprétation géométrique pour $x > 0$ et $y \in]0, 1[$.
- Montrer que f vérifie : $2yf + (1 - x^2) \frac{\partial f}{\partial x} - (1 - y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

SOLUTION. — *Solution obtenue après polissage à partir d'un premier jet recraché par un perroquet stochastique. CC.*

On pose $f(x, y) = \frac{1}{1-y^2} \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right)$. On note Ω l'ensemble de définition de f .

(a) L'expression $f(x, y)$ est bien définie si :

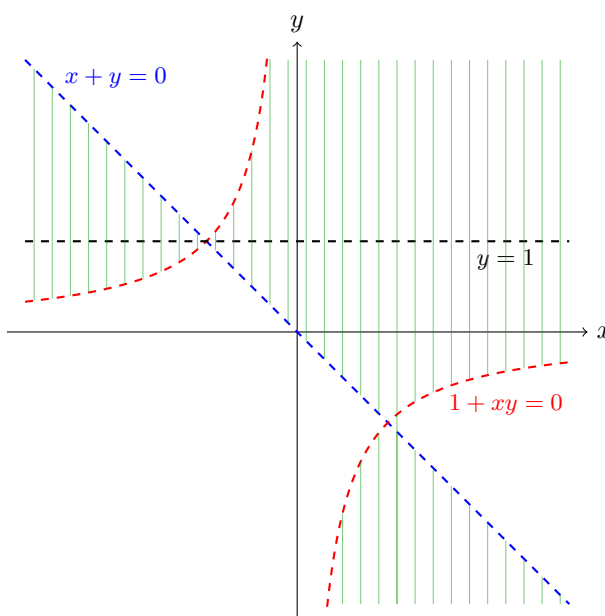
- $1 - y^2 \neq 0$, i.e. $y \neq \pm 1$,
- $\frac{x+y}{1+xy} > 0$, car le logarithme est défini sur $]0, +\infty[$.

L'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donc :

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \pm 1, \frac{x+y}{1+xy} > 0 \right\}$$

La fonction rationnelle $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$ est continue sur l'ensemble où le dénominateur ne s'annule pas, soit $1+xy \neq 0$. On exclut les points où $1+xy=0$, ce qui correspond à $x = -1/y$, et donc le domaine de définition D de cette fraction est bien un ouvert (car de la forme $\mathbb{R}^2 \setminus \phi^{-1}(\{0\})$ avec $\phi : (x, y) \mapsto 1+xy$, continue car polynomiale).

Donc Ω est l'intersection de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = \pm 1\}$ avec la préimage dans D de $]0, +\infty[$ par une fonction continue, ce qui est encore un ouvert par continuité. Ainsi, Ω est un ouvert, hachuré en vert dans la figure suivante (la droite noire en est exclue).



(b) f est construite par opérations usuelles à partir de fonctions \mathcal{C}^1 (logarithme, quotient, etc.) sur leurs domaines de définition. On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

(c) On remplace :

$$f\left(\frac{1}{x}, y\right) = \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+y}{1+\frac{y}{x}}\right) = \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)$$

Donc :

$$f\left(\frac{1}{x}, y\right) = -f(x, y)$$

Cela signifie que la fonction f est *antisymétrique* par rapport à la transformation $x \mapsto 1/x$. *Géométriquement, je ne vois pas comment en dire beaucoup plus sans paraphraser la relation... CC*

(d) On veut montrer que, pour tout $(x, y) \in \Omega$:

$$2yf(x, y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Soit un tel (x, y) . On pose :

$$z(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}, \text{ et alors } f(x, y) = \frac{\ln z(x, y)}{1-y^2}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{1}{z(x, y)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{1}{z(x, y)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + \ln z(x, y) \cdot \frac{2y}{1-y^2} \right)\end{aligned}$$

On peut regrouper les termes :

$$\begin{aligned}2yf(x, y) + (1-x^2) \frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{1}{z(x, y)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) - (1-y^2) \cdot \left[\frac{1}{1-y^2} \left(\frac{1}{z(x, y)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + \ln z(x, y) \cdot \frac{2y}{1-y^2} \right) \right] \\ = 2yf(x, y) + \frac{1-x^2}{(1-y^2)z(x, y)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{z(x, y)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) - 2yf(x, y) \\ = \frac{1}{z(x, y)} \left(\frac{1-x^2}{1-y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right)\end{aligned}$$

Il reste à montrer :

$$\frac{1-x^2}{1-y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= \frac{(1+xy) - (x+y)y}{(1+xy)^2} = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= \frac{(1+xy) - (x+y)x}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2}{(1+xy)^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1-x^2}{1-y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1-x^2}{1-y^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

Conclusion : sur Ω , f vérifie bien :

$$\boxed{2yf + (1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} - (1-y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

313. RMS 2025 968 Mines Ponts PSI énoncé p. 51

(a) Résoudre $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$ sur $I =]-1, 1[$.

(b) Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur I à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $g(x, y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$. **Problème de définition, l'argument de f pouvant être ± 1 si $y = 0$ et $x = k\pi/2$... Il faudrait donc stricto sensu se limiter à l'étude de g sur $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(k\pi/2, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 ... ou alors considérer que f est définie sur $\bar{I} = [-1, 1]$ et parler de prolongement (sans doute plus simple pour modifier l'énoncé... mais qui aboutirait à la non existence de solutions non constantes). CC.**

Déterminer l'ensemble des fonctions f telles que g soit non constante et de laplacien nul, c'est-à-dire telles que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

SOLUTION. —

(a) On résout successivement en y' et en y pour trouver finalement $y'(t) = \frac{\alpha}{1-t^2}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), puis $y(t) = \lambda \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

(b) On pose :

$$u(x, y) = \frac{\cos(2x)}{\cosh(2y)} \quad \text{et donc} \quad g(x, y) = f(u(x, y))$$

Puisque, pour tout (x, y) , on a $\operatorname{ch}(2y) \geq 1$ et $|\cos(2x)| \leq 1$, on a $|u(x, y)| \leq 1$, avec égalité si, et seulement si, $y = 0$ et $x = k\pi/2$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. f étant censée être définie sur $] -1, 1[$, c'est problématique. On peut donc supposer que l'on considère g non pas sur \mathbb{R}^2 mais sur $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(k\pi/2, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On constate ensuite que g est de classe \mathcal{C}^2 par opérations usuelles. On calcule ses dérivées partielles à l'aide de la règle de la chaîne... À partir de là, j'ai d'abord commencé à taper le calcul, puis, vu la pénibilité, j'ai demandé une aide à une IA générative américaine bien connue... dont je me contente de recopier les conclusions, avec un peu de polissage ici ou là. CC. On cherche à calculer le Laplacien :

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

Étape 1 : Dérivées partielles de g

Par la règle de chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f'(u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + f'(u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

en notant habituellement $h(u) := h \circ u$. Donc :

$$\Delta g = f''(u) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + f'(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Étape 2 : Calcul des dérivées partielles de $u(x, y) = \frac{\cos(2x)}{\cosh(2y)}$

Dérivées en x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{-2 \sin(2x)}{\cosh(2y)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-4 \cos(2x)}{\cosh(2y)} = -4u(x, y) \end{aligned}$$

Dérivées en y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2 \cos(2x) \sinh(2y)}{\cosh^2(2y)} = -2u(x, y) \tanh(2y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= -2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cdot \tanh(2y) + u(x, y) \cdot \frac{d}{dy} \tanh(2y) \right) \\ &= -2 \left(-2u(x, y) \tanh^2(2y) + u(x, y) \cdot \frac{2}{\cosh^2(2y)} \right) \\ &= 4u(x, y) \left(\tanh^2(2y) - \frac{1}{\cosh^2(2y)} \right) \\ &= 4u(x, y) \left(1 - \frac{2}{\cosh^2(2y)} \right) \end{aligned}$$

Étape 3 : Expression finale du Laplacien

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 &= \frac{4 \sin^2(2x)}{\cosh^2(2y)} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 &= 4u(x, y)^2 \tanh^2(2y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= -4u(x, y) + 4u(x, y) \left(1 - \frac{2}{\cosh^2(2y)} \right) = -\frac{8u(x, y)}{\cosh^2(2y)} \end{aligned}$$

Factorisation du Laplacien :

$$\begin{aligned} \Delta g(x, y) &= f''(u(x, y)) \left(\frac{4 \sin^2(2x)}{\cosh^2(2y)} + 4u^2(x, y) \tanh^2(2y) \right) - \frac{8u(x, y)}{\cosh^2(2y)} f'(u(x, y)) \\ &= \frac{4}{\cosh^2(2y)} [f''(u(x, y)) (\sin^2(2x) + u^2(x, y) \sinh^2(2y)) - 2u(x, y) f'(u(x, y))] \end{aligned}$$

Étape 4 : Preuve que $\sin^2(2x) + u^2(x, y) \sinh^2(2y) = 1 - u^2(x, y)$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\cos(2x)}{\cosh(2y)} \\ u^2(x, y) &= \frac{\cos^2(2x)}{\cosh^2(2y)} \\ \sin^2(2x) &= 1 - \cos^2(2x) \\ \sinh^2(2y) &= \cosh^2(2y) - 1 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sin^2(2x) + u^2(x, y) \sinh^2(2y) &= (1 - \cos^2(2x)) + \frac{\cos^2(2x)}{\cosh^2(2y)} (\cosh^2(2y) - 1) \\ &= 1 - \cos^2(2x) + \cos^2(2x) - \frac{\cos^2(2x)}{\cosh^2(2y)} \\ &= 1 - \frac{\cos^2(2x)}{\cosh^2(2y)} = 1 - u^2(x, y) \end{aligned}$$

Conclusion finale :

$$\Delta g(x, y) = \frac{4}{\cosh^2(2y)} [f''(u(x, y))(1 - u^2(x, y)) - 2u(x, y) f'(u(x, y))]$$

Fin de l'emploi de l'impressionnant perroquet stochastique.

Le calcul précédent, et le fait que $u(U) =] - 1, 1[$ (prendre $y = 0$ et $x \in]0, \pi/2[$) prouve que $\Delta g = 0$ sur U si, et seulement si, f est solution de l'EDL₂ initiale sur $] - 1, 1[$. On en déduit que les fonctions f solution du problème sont les fonctions d'expression

$$f(t) = \lambda \ln \left(\frac{1-t}{1+t} \right) + \mu$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \neq 0$. Si on était parti de f définie sur $[-1, 1]$, il suffirait de prolonger l'expression précédente par continuité... et de constater qu'il n'y a pas de solution non constante.

314. RMS 2025 969 Mines Ponts PSI énoncé p. 51

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $\rho : x \mapsto \|x\|^2$.

- (a) Montrer que $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
- (b) Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = g(\|x\|^2)$. Déterminer les fonctions g vérifiant $\Delta f = 0$.

SOLUTION. —

- (a) ρ est la fonction $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Elle est polynomiale en les fonctions coordonnées donc de classe \mathcal{C}^∞ , a fortiori de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n .

(b) Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = g(\|x\|^2)$.

f est alors de classe \mathcal{C}^2 en tant que composée et pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\partial_i f = \partial_i \rho \times g' \circ \rho$ puis $\partial_{i,i} f = \partial_{i,i} \rho \times g' \circ \rho + (\partial_i \rho)^2 \times g'' \circ \rho$, soit $\partial_{i,i} f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto 2g'(\rho(x)) + 4x_i^2 g''(\rho(x))$.

En sommant, on a $\Delta f : x \mapsto 2ng'(\rho(x)) + 4\rho(x)g''(\rho(x))$.

Ainsi, $\Delta f = 0$ si et seulement si $\forall x \neq 0, 2ng'(\rho(x)) + 4\rho(x)g''(\rho(x)) = 0$ soit $\forall t > 0, 2ng'(t) + 4tg''(t) = 0$ soit $g''(t) + \frac{n}{2t}g'(t) = 0$.

Autrement dit, $\Delta f = 0$ si et seulement si g' est solution d'une équation différentielle du premier ordre, dont les solutions sont les $t \mapsto \lambda e^{-\frac{n}{2} \ln t} = \frac{\lambda}{t^{n/2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $n = 2$, on a alors $\Delta f = 0$ si et seulement si g est de la forme $t \mapsto \lambda \ln t + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $n \geq 3$, alors $\Delta f = 0$ si et seulement si g est de la forme $t \mapsto \frac{\lambda}{(1-n/2)t^{n/2-1}} + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $t \mapsto \frac{\lambda}{t^{n/2-1}} + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quitte à modifier la constante.

315. RMS 2025 970 Mines Ponts PSI énoncé p. 51

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Soient a, b, c des réels > 0 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $(x, y) \mapsto x^a y^b (1 - x - y)^c$. Montrer l'existence d'extrema locaux pour f et les déterminer.

SOLUTION. — D est banalement un fermé borné de \mathbb{R}^2 : fermé car intersection de trois fermés de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x, y) \geq 0\}$ avec ϕ continue, borné car $D \subset [0, 1]^2$. f étant de plus continue par opérations usuelles, elle admet sur D un maximum et un minimum, donc admet des extrema (locaux et globaux).

f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intérieur D° de D (problèmes de dérivabilité des applications partielles si $a < 1$ par exemple). Tout extremum atteint dans D° l'est alors en un point critique. Calculons le gradient de f sur D° :

$$D_1 f(x, y) = ax^{a-1}y^b(1-x-y)^c - cx^a y^b(1-x-y)^{c-1} = x^{a-1}y^b(1-x-y)^{c-1}(a(1-x-y) - cx),$$

$$D_2 f(x, y) = bx^a y^{b-1}(1-x-y)^c - cx^a y^b(1-x-y)^{c-1} = x^a y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}(b(1-x-y) - cy),$$

et donc, si $(x, y) \in D^\circ$,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} a(1-x-y) - cx = 0 \\ b(1-x-y) - cy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+c)x + ay = a \\ bx + (b+c)y = b \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c} \right)$$

Ce point est bien dans D° . Pour savoir si f y admet un extremum local, on va raisonner indirectement, en constatant que, sur le bord de D , la fonction f est nulle. Comme f est à valeurs positives sur D , et n'est pas la fonction nulle, elle admet son maximum global dans D° : c'est donc nécessairement en l'unique point critique $\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c} \right)$ trouvé précédemment. Les seuls autres extrema sont alors atteints sur tout le bord, où c'est le minimum global (0) qui est atteint.

Probabilités

316. RMS 2025 971 Mines Ponts PSI énoncé p. 51

On considère une classe de PSI constituée de N élèves, dont n provenant de PCSI et $N - n$ de MPSI. On envoie successivement au tableau des élèves choisis au hasard. Un élève peut passer plusieurs fois au tableau.

- Quelle est la probabilité qu'au cours des n premiers passages, il n'y ait que des élèves de PCSI ?
- Quelle est la probabilité qu'au cours des $n + 5$ premiers passages, il y ait n élèves de PCSI ?
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note X_i la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour faire passer i élèves de PCSI distincts au tableau. Déterminer la loi de X_i .

SOLUTION. —

- Dans cette question et la suivante, le protocole est équivalent à une succession d'expériences de Bernoulli indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n/N)$ (où le tirage d'un élève de PCSI est un succès). On notera $p := \frac{n}{N}$ dans la suite. La probabilité voulue est alors p^n , i.e. $\frac{n^n}{N^n}$.

- (b) Si on note N le nombre d'élèves de PCSI choisis après $n + 5$ tirages, on est dans le cadre binomial usuel : $N \sim \mathcal{B}(n + 5, p)$. Ainsi, la probabilité voulue est

$$P(N = n) = \binom{n + 5}{n} p^n (1 - p)^5.$$

- (c) On suppose que $1 \leq i \leq n$. Soit $k \geq i$. Dire que l'événement $(X_i = k)$ est réalisé, c'est dire qu'au cours des $k - 1$ premiers tirages on a tiré $i - 1$ élèves de PCSI différents (éventuellement plusieurs fois), et qu'au k -ème on en a tiré un i -ème. On distingue les séries de tirages suivant les indices $k_1 < k_2 < \dots < k_{i-1} < k$ des tirages où l'on a tiré les $(i - 1)$ premiers élèves différents pour la première fois. Ainsi, avec cette distinction faite, l'événement $(X_i = k)$ est réalisé si :

- les $k_1 - 1$ premiers tirages sont des élèves de MPSI (proba de chaque tirage $\frac{N-n}{N}$);
- le k_1 -ème tirage est un élève de PCSI (proba $p = \frac{n}{N}$);
- les tirages suivants avant le k_2 -ème sont des élèves de MPSI ou l'élève de PCSI déjà choisi (proba $\frac{N-n+1}{N}$) - le k_2 -ème tirage est un élève de PCSI différent du premier (proba $\frac{n-1}{N}$);
- etc...

Par indépendance des différents tirages, on obtient que la probabilité d'une telle succession de tirages est

$$\prod_{j=1}^i \left(\frac{N - n + j - 1}{N} \right)^{t_j - 1} \frac{n - j + 1}{N},$$

avec pour tout $j \geq 2$ $t_j := k_j - k_{j-1}$ (et $t_1 := k_1$). Ainsi, par incompatibilité des différents cas, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} P(X_i = k) &= \sum_{0=k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_{i-1} < k} \prod_{j=1}^i \left(\frac{N - n + j - 1}{N} \right)^{k_j - k_{j-1} - 1} \frac{n - j + 1}{N} \\ &= \frac{1}{N^k} \sum_{0=k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_{i-1} < k} \prod_{j=1}^i (N - n + j - 1)^{k_j - k_{j-1} - 1} (n - j + 1) \end{aligned}$$

C'est un avatar du problème du collectionneur, avec bruit.

317. RMS 2025 972 Mines Ponts PSI énoncé p. 51

Mots-clés : Urne de Polya

On considère initialement une urne contenant une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute deux boules de la même couleur que celle tirée. On répète indéfiniment le processus.

- (a) Calculer la probabilité de ne tirer que des boules rouges lors des n premiers tirages ?
- (b) Calculer la probabilité de tirer indéfiniment uniquement des boules rouges ?
- (c) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au 42-ième tirage.
- (d) Le résultat de la question b) reste-t-il vrai si on rajoute 3 boules (au lieu de 2) ? 4 boules ?

SOLUTION. —

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement "tirer une boule rouge au n -ème tirage".

- (a) On cherche ici la probabilité de l'événement $\bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k$.

Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k \right) = \mathbb{P}(R_1) \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \dots \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$.

Soit $\mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k \right) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

(b) L'événement considéré ici est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} R_n = \bigcap_{n=11}^{+\infty} \bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k$.

Par le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} R_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Or via la formule de Stirling, $\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{4^n n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} R_n\right) = 0$.

(c) Notons X_n le nombre de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages. $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ donc par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(R_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{X_n=k}(R_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) \frac{1+2k}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} + \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n+1}$.

Or $X_{n+1} = X_n + \mathbf{1}_{R_{n+1}}$ donc $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{P}(R_{n+1})$, soit $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2n+2} + \frac{n+2}{n+1} \mathbb{E}(X_n)$.

Cette relation de récurrence s'écrit $\frac{\mathbb{E}(X_{n+1})}{n+2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n+1}$, et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\mathbb{E}(X_n)}{n+1} = \mathbb{E}(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ (somme télescopique).

Il vient $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2}$ et donc $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1}) = \frac{1}{2}$. Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en particulier pour $n = 42$.

(d) Si on rajoute 3 boules au lieu de 2, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k\right) = \prod_{k=1}^n \frac{3k-2}{3k-1}$ et donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} R_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{3k-2}{3k-1}$.

Or $\ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{3k-2}{3k-1}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{3k-2}{3k-1}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right)$.

Comme $\ln\left(1 - \frac{1}{3n-1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{3n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{3n}$. Par le critère d'équivalence des séries à termes négatifs, la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{3n-1}\right)$ est de même nature que $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{3n}$, soit divergente par le critère de Riemann.

Et donc $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, donc en composant par la fonction exponentielle, $\prod_{k=1}^n \frac{3k-2}{3k-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} R_n\right) = 0$.

Même chose avec 4 boules, on a cette fois $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} R_k\right) = \prod_{k=1}^n \frac{4k-3}{4k-2}$ et $\ln \prod_{k=1}^n \frac{4k-3}{4k-2} = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{4k-2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

318. RMS 2025 973 Mines Ponts PSI énoncé p. 52

(a) Calculer $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

(b) On dispose de p urnes contenant chacune p boules. Pour $i \in [1, p]$, l'urne i contient i boules noires et $p-i$ blanches. On choisit une des urnes aléatoirement et on en tire successivement des boules avec remise. On note $A_{n,p}$ l'évènement : on tire $2n$ boules et on a autant de boules noires que de boules blanches.

- i. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n,p})$ sous forme d'une somme.
- ii. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(A_{n,p})$ quand n tend vers $+\infty$.
- iii. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(A_{n,p})$ quand p tend vers $+\infty$.

SOLUTION. —

(a) Notons $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$. Pour $q \neq 0$, une intégration par parties donne $I(p, q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} (-q)(1-x)^{q-1} dx = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

Itérant le procédé, $I(p, q) = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} I(p+q, 0) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

- (b) i. Pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ fixé, si l'on tire dans l'urne i , le nombre de boules noires tirées au cours des $2n$ premiers tirages suit une loi binomiale de paramètres $2n$ et i/p .

Autrement dit, si U_i désigne l'événement "choisir l'urne i ", on a $\mathbb{P}_{U_i}(A_{n,p}) = \binom{2n}{n} \left(\frac{i}{p}\right)^n \left(1 - \frac{i}{p}\right)^n$.

Comme (U_1, \dots, U_p) est un système complet d'événements, $\mathbb{P}(A_{n,p}) = \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(U_i) \mathbb{P}_{U_i}(A_{n,p})$ donc $\mathbb{P}(A_{n,p}) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{p} \binom{2n}{n} \left(\frac{i}{p}\right)^n \left(1 - \frac{i}{p}\right)^n$ (les urnes sont supposées équiprobables).

- ii. À p fixé, on a grâce à la formule de Stirling $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, il vient $\binom{2n}{n} \left(\frac{i}{p}\right)^n \left(1 - \frac{i}{p}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4\left(\frac{i}{p}\right)\left(1 - \frac{i}{p}\right)^n}{\sqrt{\pi n}}$.

La fonction $x \mapsto 4x(1-x)$ admet sur $[0; 1]$ un maximum en $1/2$ égal à 1 donc $0 \leq 4\left(\frac{i}{p}\right)\left(1 - \frac{i}{p}\right) \leq 1$ et donc $0 \leq \frac{4\left(\frac{i}{p}\right)\left(1 - \frac{i}{p}\right)^n}{\sqrt{\pi n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, et par encadrement $\frac{4\left(\frac{i}{p}\right)\left(1 - \frac{i}{p}\right)^n}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\binom{2n}{n} \left(\frac{i}{p}\right)^n \left(1 - \frac{i}{p}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, en tant que somme finie, on a $\mathbb{P}(A_{n,p}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- iii. À n fixé, notant $f_n : x \mapsto x^n(1-x)^n$, on a $\mathbb{P}(A_{n,p}) = \binom{2n}{n} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p f_n\left(\frac{i}{p}\right)$.

f_n est continue sur $[0; 1]$, le théorème de convergence des sommes de Riemann assure que $\mathbb{P}(A_{n,p}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\binom{2n}{n} \int_0^1 f_n = \binom{2n}{n} I(n, n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}.$$

319. RMS 2025 974 Mines Ponts PSI énoncé p. 52

On considère des lancers indépendants avec la probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile. On pose par convention $T_0 = 0$ et pour $r \in \mathbb{N}^*$, T_r est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour avoir r piles. On pose $Z_r = T_r - T_{r-1}$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Déterminer la loi de Z_r .
 (b) Déterminer la fonction génératrice de T_r .
 (c) Pour tout $x \in]0, 1[$, calculer $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$ et en déduire la loi de T_r . (le calcul de somme sert plutôt pour l'espérance)
 (d) Calculer $\mathbb{E}(T_r)$ de deux façons différentes.

SOLUTION. —

- (a) Z_r est le temps d'attente du premier succès (pile) à partir du moment où a eu lieu le $r-1$ -ème. Donc $Z_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
 (b) Par construction, $T_r = T_{r-1} + Z_r$, et ces deux variables sont indépendantes. En effet pour $(i, j) \in \llbracket r-1, +\infty \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(T_{r-1} = i, Z_r = j) = \mathbb{P}(T_{r-1} = i \cap \overline{S_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{S_{i+j-1}} \cap S_{i+j})$, où S_n désigne l'événement "succès au rang n ". Comme l'événement $T_{r-1} = i$ ne dépend que des i premiers lancers, il est indépendant de $\overline{S_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{S_{i+j-1}} \cap S_{i+j}$ et donc $\mathbb{P}(T_{r-1} = i, Z_r = j) = \mathbb{P}(T_{r-1} = i) \mathbb{P}(\overline{S_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{S_{i+j-1}} \cap S_{i+j}) = \mathbb{P}(T_{r-1} = i) (1-p)^{j-1} p = \mathbb{P}(T_{r-1} = i) \mathbb{P}(Z_r = j)$.

On en déduit que $G_{T_r} = G_{T_{r-1}} G_{Z_r}$, puis par une récurrence élémentaire $G_{T_r} = \prod_{k=1}^r G_{Z_k} : t \mapsto \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^r$.

- (c) Montrons par récurrence sur r que $\forall k \in \llbracket r, +\infty \rrbracket, \mathbb{P}(T_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

La propriété est claire au rang 1 puisque $T_1 = Z_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Supposons la au rang $r-1$, avec $r \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket r, +\infty \rrbracket$, l'événement $T_r = k$ s'écrit $\bigcup_{r-1 \leq i \leq k-1} (T_{r-1} = i \cap Z_r = k-i)$, l'union étant bien sûr disjointe. Donc grâce au calcul initial de la question précédente, et à l'hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{P}(T_r = k) = \sum_{i=r-1}^{k-1} \mathbb{P}(T_{r-1} = i \cap Z_r = k-i) = \sum_{i=r-1}^{k-1} \binom{i-1}{r-2} p^{r-1} (1-p)^{i-r+1} p (1-p)^{k-i-1}$$

Or $\sum_{i=r-1}^{k-1} \binom{i-1}{r-2} = \sum_{i=r-1}^{k-1} \binom{i}{r-1} - \binom{i-1}{r-1} = \binom{k-1}{r-1}$, donc on a bien $\mathbb{P}(T_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$, ce qui achève la récurrence.

(d) Soit $f : x \in]-1; 1[\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Dérivant r fois, on a $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r} = f^{(r)}(x) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$ et donc $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

On a donc $\mathbb{E}(T_r) = \sum_{k=r}^{+\infty} k \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = \sum_{k=r}^{+\infty} r \binom{k}{r} p^r (1-p)^{k-r} = rp^r \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} (1-p)^{k-r} = \frac{rp^r}{(1-(1-p))^{r+1}} = \frac{r}{p}$.

On peut également écrire $\mathbb{E}(T_r) = G'_{T_r}(1)$ (le rayon de convergence des séries génératrices des Z_k est strictement supérieur à 1 donc celui de G_{t_r} aussi, donc T_r a une espérance).

Or $G'_{T_r} : t \mapsto r \frac{p}{(1-(1-p)t)^2} \left(\frac{pt}{1-(1-p)t} \right)^{r-1}$ donc $\mathbb{E}(T_r) = G'_{T_r}(1) = \frac{r}{p}$.

320. RMS 2025 975 Mines Ponts PSI énoncé p. 52

Soient $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(n \text{ divise } X)$.

(b) Soit p un nombre premier et $v_p(k) = \max \{i \in \mathbb{N}, p^i \text{ divise } k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $v_p(X)$ puis son espérance.

SOLUTION. —

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement n divise X s'écrit comme l'union disjointes $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} X = kn$.

Par σ -additivité, on a donc $\mathbb{P}(n \text{ divise } X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = kn) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(kn)^s} = \frac{1}{n^s}$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}, p^i \text{ divise } k\}$ est non vide (il contient 0) et majoré (car $p^i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty$) donc possède un plus grand élément. Si bien que $v_p(X)$ est bien définie, à valeurs dans \mathbb{N} .

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'événement $v_p(X) \geq i$ s'écrit tout simplement p^i divise X . D'après la première question, $\mathbb{P}(v_p(X) \geq i) = \frac{1}{p^{is}}$.

D'où la loi de $v_p(X)$: pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(v_p(X) = i) = \mathbb{P}(v_p(X) \geq i) - \mathbb{P}(v_p(X) > i) = \mathbb{P}(v_p(X) \geq i) - \mathbb{P}(v_p(X) \geq i+1) = \frac{1}{p^{is}} - \frac{1}{p^{(i+1)s}}$.

Et comme la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p^{is}}$ converge (absolument), $v_p(X)$ admet une espérance et $\mathbb{E}(v_p(X)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(v_p(X) \geq i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{is}} = \frac{1/p^s}{1-1/p^s} = \frac{1}{p^s-1}$.

321. RMS 2025 976 Mines Ponts PSI énoncé p. 52

On effectue des lancers avec une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la deuxième fois. On note X le nombre de faces obtenues au cours de l'expérience.

(a) Donner la loi de X .

(b) Montrer que $\mathbb{E}(X) < +\infty$ et la calculer.

(c) On prend une urne et, si $X = n$, on pose $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans l'urne. Donner la loi de Y où Y est le numéro de la boule tirée dans l'urne. Calculer ensuite l'espérance de Y ainsi que sa variance.

SOLUTION. —

(a) Déjà, on peut dire que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $k \geq 0$. Si on note $(T_i)_{i \geq 1}$ la suite i.i.d. modélisant l'expérience, avec $T_i \sim \mathcal{B}(p)$, on a, au niveau des événements,

$$(X = k) = (T_{k+2} = 1) \cap \bigcup_{1 \leq i \leq k+1} \left((T_i = 1) \cap \bigcap_{1 \leq j \neq i \leq k+1} (T_j = 0) \right).$$

Au niveau des probabilités, ceci donne par indépendance et équidistribution :

$$P(X = k) = (k + 1)p^2(1 - p)^k$$

Vérifions alors que $(X = +\infty)$ est négligeable :

$$P(X < +\infty) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)p^2(1-p)^k = \frac{p^2}{(1-(1-p))^2} = 1,$$

l'avant-dernière égalité s'obtenant banalement par dérivation terme à terme de la somme géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$.

(b) Le même raisonnement de dérivation terme à terme s'applique. Ici, la somme est à termes positifs, donc on peut l'écrire sans se soucier de la convergence de la série :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)p^2(1-p)^k = p^2(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)k(1-p)^{k-1} = \frac{p^2(1-p)2}{(1-(1-p))^3} = 2\frac{1-p}{p}$$

(c) On raisonne conditionnellement aux événements $(X = k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $Y \underset{(X=k)}{\sim} \mathcal{U}(\llbracket 0; k \rrbracket)$. Ainsi, X prend ses valeurs dans \mathbb{N} . De plus, si $k < n$, l'intersection $(X = k) \cap (Y = n)$ est vide. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par formule des probabilités totales associée à la variable aléatoire X :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P_{(X=k)}(Y = n)P(X = k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k+1} (k+1)p^2(1-p)^k \\ &= p^2(1-p)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k-n} \\ &= \frac{p^2(1-p)^n}{1-(1-p)} \\ &= p(1-p)^n \end{aligned}$$

Autrement dit, $Y + 1 \sim \mathcal{G}(p)$.

322. RMS 2025 977 Mines Ponts PSI énoncé p. 52

- (a) Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$. Déterminer le rayon de convergence et donner une expression de S .
- (b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} de fonction génératrice $G_X = \lambda S$. Déterminer λ et la loi de X .
- (c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

SOLUTION. —

- (a) $R = +\infty$ d'après la règle de d'Alembert pour les séries entières (par exemple). On décompose : $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$, et alors, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{n^2 + n + 1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + 2\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}.$$

En sommant les séries entières, on obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$S(t) = (t^2 + 2t + 1)e^t = (t+1)^2 e^t$$

- (b) On vérifie d'abord que les coefficients de la série entière associée à λS soient positifs ou nuls. Il suffit donc que $\lambda \geq 0$. Ensuite, il faut que leur somme égale 1 : autrement dit, on doit avoir $\lambda S(1) = 1$. Ainsi, d'après l'expression précédente, on obtient $\lambda = \frac{1}{4e}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{1}{4e} \frac{n^2+n+1}{n!}$.

(c) Puisque $G_X = \lambda S$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , X admet un moment d'ordre 2, et on a

$$E(X) = G'_X(1) = \lambda S'(1) = \frac{1}{4e}(4e + 4e) = 2,$$

$$\text{et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \lambda S''(1) + 2 - 2 = \frac{1}{4e}(2e + 8e + 4e) - 4 = 12$$

323. RMS 2025 978 Mines Ponts PSI énoncé p. 53

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k$.

- (a) Quelle est la valeur de a ?
- (b) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ si elles existent.

SOLUTION. —

(a) Nécessairement $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^{k-n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(p)$, où $f : x \in]-1; 1[\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, et donc $f^{(n)} : x \mapsto \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^k = \frac{1}{(1-p)^{n+1}}$, et donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 = \frac{a}{(1-p)^{n+1}}$ donc $a = (1-p)^{n+1}$.

(b) De même, pour tout $t \in]-1/p; 1/p[$, on a $|pt| < 1$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^k t^k = \frac{1}{(1-pt)^{n+1}}$, ce qui prouve que la série génératrice G_X de X a un rayon de convergence (supérieur ou) égal à $1/p$ donc strictement supérieur à 1, et donc que X a des moments de tout ordre.

$$\text{Et } \forall t \in]-1/p; 1/p[, G_X(t) = a \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^k t^k = \frac{a}{(1-pt)^{n+1}} = \frac{(1-p)^{n+1}}{(1-pt)^{n+1}}.$$

$$\text{Il vient } G'_X : t \mapsto \frac{(n+1)p(1-p)^{n+1}}{(1-pt)^{n+2}} \text{ donc } \mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{(n+1)p}{1-p}.$$

$$\text{Puis } G''_X : t \mapsto \frac{(n+1)(n+2)p^2(1-p)^{n+1}}{(1-pt)^{n+3}} \text{ donc } G''_X(1) = \frac{(n+1)(n+2)p^2}{(1-p)^2} \text{ et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{(n+1)p}{(1-p)^2}.$$

324. RMS 2025 979 Mines Ponts PSI énoncé p. 53

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.

On pose $A_k = (X_{2k-1} X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap_{k=1}^p A_k$. Soit $T = \min \{k \geq 2, X_{k-1} = X_k = 1\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 0$ et en déduire que $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}) = 1$.
- (b) Établir une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par $(\mathbb{P}(T = n))$. **Correction : d'ordre 3**
- (c) Calculer l'espérance de T .

SOLUTION. —

(a) On peut écrire $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$ et utiliser le théorème de continuité décroissante pour obtenir $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants grâce au lemme des coalitions (ils sont fonctions de groupes de variables disjoints) donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = (1 - 4/9)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 0.$$

Enfin $T = +\infty$ entraîne $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ donc $\mathbb{P}(T = +\infty) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 0$, ce qui signifie que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$, autrement dit que T est finie presque sûrement.

- (b) Soit $n \geq 3$. L'événement $T = n$ s'écrit $X_n = 1 \cap X_{n-1} = 1 \cap X_{n-2} = 0 \cap T > n - 3$, et $T > n - 3$ est fonction de X_1, \dots, X_{n-3} donc indépendant de X_{n-2}, X_{n-1} et X_n .
Ainsi, $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-2} = 0)\mathbb{P}(T > n - 3) = \frac{4}{27}\mathbb{P}(T > n - 3)$, ou encore $\mathbb{P}(T = n) = \frac{4}{27} \left(1 - \sum_{k=2}^{n-3} \mathbb{P}(T = k)\right)$.
De même $\mathbb{P}(T = n + 1) = \frac{4}{27} \left(1 - \sum_{k=2}^{n-2} \mathbb{P}(T = k)\right)$ et donc $\mathbb{P}(T = n + 1) - \mathbb{P}(T = n) = -\frac{4}{27}\mathbb{P}(T = n - 2)$.
- (c) Sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(T > n - 3) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{27}{4} P(T = n)$. Cette dernière série converge, d'où l'existence de $\mathbb{E}(T)$, et finalement $\mathbb{E}(T) = \frac{27}{4} (1 - P(T = 2)) = \frac{27}{4} \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{15}{4}$.

325. RMS 2025 980 Mines Ponts PSI énoncé p. 53

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, où p et q sont éléments de $]0, 1[$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.

- (a) Donner la loi de U .
(b) Calculer l'espérance de U .
(c) Si $p = q$, montrer que $\mathbb{E}(U) > 1$.

SOLUTION. —

- (a) U peut prendre toutes les valeurs rationnelles strictement positives, autrement dit $U(\Omega) = \mathbb{Q}_+^*$.
Pour $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$ écrit sous forme irréductible (a et b premier entre eux), l'événement $U = r$ s'écrit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = ka \cap Y = kb)$.
Par σ -additivité, on a donc $\mathbb{P}(U = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ka \cap Y = kb) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ka)\mathbb{P}(Y = kb)$ par indépendance de X et Y .
Soit $\mathbb{P}(U = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{ka-1} p (1-q)^{kb-1} q = \frac{pq(1-p)^{a-1}(1-q)^{b-1}}{1-(1-p)(1-q)}$ (somme géométrique).
- (b) $0 < U \leq X$ et X admet une espérance donc U également.
 X et Y sont indépendantes donc X et $1/Y$ aussi, si bien que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(1/Y)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = 1/p$, et par le théorème de transfert $\mathbb{E}(1/Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k(1-q)^{k-1}q = \frac{q}{1-q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-q)^k}{k} = \frac{q}{1-q} (-\ln(1 - (1-q)))$.
Finalement, $\mathbb{E}(U) = \frac{-q \ln q}{p(1-q)}$.
- (c) Si $p = q$, alors $\mathbb{E}(U) = \frac{-\ln q}{1-q}$. Or pour tout $x \in]-1; +\infty[\setminus \{0\}$, $\ln(1+x) < x$. En particulier $\ln(1 - (1-q)) < -(1-q)$ soit $-\ln q > 1 - q$, et donc $\mathbb{E}(U) = \frac{-\ln q}{1-q} > 1$.

326. RMS 2025 981 Mines Ponts PSI énoncé p. 53

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. On note U la matrice ligne $(X_1 \cdots X_n)$ et $M = U^T U$.

- (a) Déterminer les lois de $\text{rg}(M)$ et $\text{tr}(M)$.
(b) Déterminer la probabilité que M soit une matrice de projecteur.
(c) Dans cette question, on prend $n = 2$. On note V la matrice ligne $(1 \ 1)$ et $X = VMV^T$. Déterminer l'espérance et la variance de X .

SOLUTION. — cf RMS 2020 754 Mines-Ponts PSI

- (a) Toutes les colonnes de M sont des multiples de U^T donc M est de rang au plus 1. M est de rang 0 si et seulement si $M = 0$, soit $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i X_j = 0$, ce qui équivaut à $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i = 0$ (si l'une des variables est non nulle, son carré est non nul).
Ainsi par indépendance mutuelle des X_i , $\mathbb{P}(\text{rg}(M) = 0) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = (1-p)^n$, et donc $\mathbb{P}(\text{rg}(M) = 1) = 1 - \mathbb{P}(\text{rg}(M) = 0) = 1 - (1-p)^n$.
Par ailleurs $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i$ (une variable de Bernoulli est égale à son carré), donc $\text{tr}(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

- (b) Si M est la matrice d'un projecteur alors $\text{tr}(M) = \text{rg}(M)$ donc $\text{tr}(M) = 0$ ou 1 . Réciproquement si $\text{tr}(M) = 0 = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i = 0$ donc $M = 0$ et M est bien la matrice d'un projecteur. Et si $\text{tr}(M) = 1$ alors il existe un unique $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $X_k = 1$ (et les autres variables sont nulles) et donc M , de terme général $X_i X_j$, n'est autre que la matrice élémentaire $E_{k,k}$ (le coefficient $[M]_{k,k}$ vaut 1 , tous les autres sont nuls), qui est bien la matrice d'un projecteur.

Finalement la probabilité cherchée est donc $\mathbb{P}(\text{tr}(M) = 0 \cup \text{tr}(M) = 1) = \mathbb{P}(\text{tr}(M) = 0) + \mathbb{P}(\text{tr}(M) = 1) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$.

- (c) Effectuant le produit, on a $X = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = X_1 + 2X_1X_2 + X_2$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + 2\mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_2) = 2p + 2p^2$ ($\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = p^2$ par indépendance).

Ensuite $X^2 = X_1^2 + 4X_1^2X_2 + X_2^2 + 4X_1^2X_2 + 4X_1X_2^2 + 2X_1X_2 = X_1 + 14X_1X_2 + X_2$ donc $\mathbb{E}(X^2) = 2p + 14p^2$, et donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2p + 10p^2 - 8p^3 - 4p^4$.

327. RMS 2025 982 Mines Ponts PSI énoncé p. 53

Soient $a, b > 0, X, Y, Z$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(a), Y \sim \mathcal{P}(b), \mathbb{P}(Z = 1) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(Z = -1) = p$. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ YZ & X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

SOLUTION. — cf RMS 2023 747 Mines-Ponts PSI

- Si $Z = 1$ alors A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.
- Si $Z = -1$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\chi_A(\lambda) = (\lambda - X)^2 + Y^2 = (\lambda - X - iY)(\lambda - X + iY)$.

Si $Y = 0$, A est diagonale donc diagonalisable, et sinon A possède deux valeurs propres complexes distinctes non réelles donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi A est toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $Z = 1$ ou ($Z = -1$ et $Y = 0$), événement de probabilité $\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(Z = -1)\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p + pe^{-b}$.

328. RMS 2025 983 Mines Ponts PSI énoncé p. 53

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On définit $(S_n)_{n \geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = S_{n-1} + X_n$.

- (a) Déterminer la loi de $\frac{S_n+n}{2}$. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
- (b) On pose $A_n = |S_n|$.
- Déterminer $A_n(\Omega)$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir : $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(A_n) + \mathbb{P}(S_n = 0)$.
Ind. Exprimer $\mathbb{E}(A_{n+1})$ et appliquer la formule des probabilités totales à X_{n+1} .
 - En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

SOLUTION. —

- (a) $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ donc $\frac{S_n+n}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{X_k+1}{2}$.
Les variables $\frac{X_k+1}{2}$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$, restent indépendantes mutuellement donc en tant que somme, on a $\frac{S_n+n}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$.
On en tire $\mathbb{E}\left(\frac{S_n+n}{2}\right) = \frac{n}{2} = \frac{\mathbb{E}(S_n)+n}{2}$ donc $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n+n}{2}\right) = \frac{n}{4} = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{4}$ donc $\mathbb{V}(S_n) = n$.
- (b) i. $S_n(\Omega) = \{2k - n, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ donc $A_n(\Omega) = \{|2k - n|, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.
Précisément, si n est pair alors $A_n(\Omega) = \{n - 2k, k \in \llbracket 0; n/2 \rrbracket\}$.
Et si n est impair, alors $A_n(\Omega) = \{n - 2k, k \in \llbracket 0; (n-1)/2 \rrbracket\}$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème de transfert assure que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n+1} |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_{n+1} = 2k - n - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} |2k - n - 1| (\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(S_{n+1} = 2k - n - 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1) \mathbb{P}_{X_{n+1}=-1}(S_{n+1} = 2k - n - 1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} |2k - n - 1| \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n - 2) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n - 2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n - 2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n |2k + 1 - n| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n)
\end{aligned}$$

- Si n est pair, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n |2k + 1 - n| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) &= \sum_{k=0}^{n/2-1} (n - 2k - 1) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&\quad + \sum_{k=n/2}^n (2k + 1 - n) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \sum_{k=0}^{n/2-1} (n - 2k) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) - \sum_{k=0}^{n/2-1} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&\quad + \sum_{k=n/2}^n (2k - n) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) + \sum_{k=n/2}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \mathbb{E}(|S_n|) - \sum_{k=0}^{n/2-1} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) + \sum_{k=n/2}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n)
\end{aligned}$$

Et de même $\sum_{k=0}^n |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{E}(|S_n|) + \sum_{k=0}^{n/2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) - \sum_{k=n/2+1}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n)$.
Donc en faisant la demi-somme de ces deux termes, $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(A_n) + \frac{1}{2}P(S_n = 0) + \frac{1}{2}P(S_n = 0) = \mathbb{E}(A_n) + P(S_n = 0)$.

- Si n est impair, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n |2k + 1 - n| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) &= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (n - 2k - 1) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&\quad + \sum_{k=(n+1)/2}^n (2k + 1 - n) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (n - 2k) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) - \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&\quad + \sum_{k=(n+1)/2}^n (2k - n) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) + \sum_{k=(n+1)/2}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \mathbb{E}(|S_n|) - \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) + \sum_{k=(n+1)/2}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n)
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n |2k - n - 1| \mathbb{P}(S_n = 2k - n) &= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (n - 2k + 1) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&\quad + \sum_{k=(n+1)/2}^n (2k - 1 - n) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (n - 2k) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) + \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&\quad + \sum_{k=(n+1)/2}^n (2k - n) \mathbb{P}(S_n = 2k - n) - \sum_{k=(n+1)/2}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n) \\
&= \mathbb{E}(|S_n|) + \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathbb{P}(S_n = 2k - n) - \sum_{k=(n+1)/2}^n \mathbb{P}(S_n = 2k - n)
\end{aligned}$$

Donc en faisant la demi-somme de ces deux termes, $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(A_n) + P(S_n = 0)$. En effet S_n a même parité que n donc si n est impair, alors $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$.

iii. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_{2n-1}) + \mathbb{P}(S_{2n-1} = 0) = \mathbb{E}(A_{2n-1})$.

Et par une récurrence élémentaire, $\mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_0) + \sum_{\ell=0}^{2n-1} \mathbb{P}(S_\ell = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_{2k} = 0)$ (les termes impairs sont nuls).

Enfin $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{2k} + 2k}{2} = k\right) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$, on obtient donc $\mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.