Programme de la khôlle n° 1

Chapitre 1 : Espaces vectoriels normés

I. Normes

1. Généralités

Définition d'une norme et d'un espace vectoriel normé. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, $C^0([a, b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Seconde forme de l'inégalité triangulaire et inégalité triangulaire généralisée. Distance induite et propriétés.

2. Normes équivalentes

Définitions. Si E est un evn de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes. Exemples dans $\mathbb{K}^n$.

3. Topologie

Définitions de boule ouverte/fermée et sphère. Tracé des boules unité pour les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$. Partie convexe. Toute boule ouverte ou fermée est convexe, tout sev d'un evn E est convexe. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$. Stabilité par intersection, enveloppe convexe [HP].

Définitions d'une partie bornée et d'une fonction bornée sur une partie D . Caractérisation des parties bornées. Invariance du caractère borné pour des normes équivalentes. Distance à une partie.

II. Suites réelles et complexes

1. Limite d'une suite réelle

Définitions liées aux caractères bornée, à la monotonie. Suite constante, stationnaire, périodique.

Définition avec quantificateur de la limite finie ou infinie d'une suite. Unicité. Toute suite convergente est bornée.

Produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. Opérations sur les limites. Théorème de la limite séquentielle.

2. Suites extraites

Définition. Proposition : Si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ . Critère de convergence : (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite qui sera la limite de u .

3. Suites et inégalités

Signe d'une suite convergeant vers une limite non nulle. Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement (ou des gendarmes). Théorème de divergence par minoration ou majoration.

Théorème de la limite monotone. Définition et théorème des suites adjacentes.

Savoirs-faire associés

- Montrer qu'une application est une norme en vérifiant les 4 axiomes.
- Montrer qu'un ensemble est convexe.
- Comparer deux normes et montrer qu'elles ne sont pas équivalentes en utilisant des suites.
- Montrer que deux suites sont adjacentes.

Remarque

Merci de ne pas donner d'exercices sur les suites récurrentes et définies implicitement cette semaine.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : $\|\cdot\|_1; x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$ et $\|\cdot\|_\infty : x \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.
- Preuve 2 : $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f|$ et $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{[a,b]} |f|$ sont des normes sur $C^0([a,b], \mathbb{K})$.
- Preuve 3 : Toute boule ouverte est convexe.
- Preuve 4 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.
- Preuve 5 : (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.
- Exercice 1 : Soient u et v les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.
 1. Montrer que u et v convergent vers la même limite que l'on précisera.
 2. Montrer que e est irrationnel.
- Exercice 2 (DM1) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'abscisse du premier maximum local sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.
- Exercice 3 (DM1) : Simplifier l'expression du réel $\alpha = \text{Arccos}\left(-\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan} 7$.
- Exercice 4 (DM1) : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto 2 \text{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \text{Arcsin}(2x-1)$ puis en donner une expression simplifiée.

Prévisions

- Chapitre 1 : Suites récurrentes, relations de comparaison.
- Chapitre 2 : Procédés sommatoires discrets.
- Chapitre 3 : Algèbre linéaire.