Programme de la khôlle n°2

Chapitre 1 : Espaces vectoriels normés

I. Normes

II. Suites réelles et complexes

1. Limite d'une suite réelle

2. Suites extraites

3. Suites et inégalités

4. Suites récurrentes

(a) **Suites arithmétiques**

Définition, expression explicite en fonction de n , CNS de convergence. Somme des entiers, de leurs carrés et de leurs cubes.

(b) **Suites géométriques**

Définition, expression explicite en fonction de n , CNS de convergence. Somme des termes d'une progression géométrique.

(c) **Suites arithmético-géométriques**

Définition, plan d'étude.

(d) **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2**

Définition : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Solution générale.

(e) **Suites récurrentes d'ordre 1**

Définition, plan d'étude.

5. Relations de comparaison

(a) **Suites dominées**

Définition et caractérisation.

(b) **Suites négligeables**

Définition et caractérisation. Opérations sur o . Théorème des croissances comparées. Lien entre o et O .

(c) **Suites équivalentes**

Définition et caractérisation. C'est une relation d'équivalence. Règles de simplification avec les équivalents usuels. Lien entre $\sim$ et limite finie non nulle. Intérêt des équivalents : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et v converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ [resp. diverge] alors u converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ [resp. diverge]. Lien entre $\sim$ et o . Opérations sur $\sim$: produit, quotient et puissance.

III. Suites d'un evn

Définitions d'une suite bornée, de la convergence/divergence d'une suite dans un evn. Toute suite convergente est bornée. Si (u_n) converge vers $\ell \in E$ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ . Indépendance de la convergence et de la limite par rapport à la norme en dimension finie. Convergence des suites coordonnées. Structure de sev des suites convergentes.

Savoirs-faire associés

- Montrer qu'une application est une norme en vérifiant les 4 axiomes.
- Montrer qu'un ensemble est convexe.
- Comparer deux normes et montrer qu'elles ne sont pas équivalentes en utilisant des suites.
- Déterminer la limite d'une suite de vecteurs ou matricielle : à l'aide d'une norme (indépendance en dimension finie), à l'aide des coordonnées.

- Montrer que deux suites sont adjacentes.
- Étudier une suite (u_n) définie implicitement : étudier ses variations, encadrer u_n , déterminer un équivalent de u_n à l'aide de la définition implicite.
- Étudier une suite (u_n) définie par une relation de récurrence d'ordre 1 : étudier ses variations, chercher des intervalles stables, montrer sa cv par th de limite monotone (ou inégalité des acc. finis), calculer sa limite par caract. séquentielle de la limite, déterminer un équivalent de u_n par Cesàro.
- Calculer le terme général d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2 (SRL2) en fonction du signe du discriminant de l'équation caractéristique.

Remarque

Tous les résultats classiques sur les suites récurrentes d'ordre 1 ont été vus mais sont hors programme : lors de l'étude tout doit être redémontré sur l'exemple.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : $\|\cdot\|_1 : x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$ et $\|\cdot\|_\infty : x \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.
- Preuve 2 : $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f|$ et $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{[a,b]} |f|$ sont des normes sur $C^0([a,b], \mathbb{K})$.
- Preuve 3 : Toute boule ouverte est convexe.
- Preuve 4 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.
- Preuve 5 : (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.
- Exercice 1 : Soient u et v les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.

Montrer que u et v convergent vers la même limite que l'on précisera. En déduire que e est irrationnel.

- Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$. Étudier la monotonie de (u_n) .

Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de (u_n) . Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

- Exercice 3 : Théorème de Cesàro dans le cas convergent avec contre-exemple pour la réciproque.
- Exercice 4 (DM1) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'abscisse du premier maximum local sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.
- Exercice 5 (DM1) : Simplifier l'expression du réel $\alpha = \text{Arccos}\left(-\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan} 7$.
- Exercice 6 (DM1) : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto 2 \text{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \text{Arcsin}(2x-1)$ puis en donner une expression simplifiée.

Prévisions

- Chapitre 2 : Procédés sommatoires discrets.
- Chapitre 3 : Algèbre linéaire.