Programme de la khôlle n°3

Chapitre 1 : Espaces vectoriels normés

II. Suites réelles et complexes

III. Suites d'un evn

Chapitre 2 : Procédés sommatoires discrets

I. Cas général

1. Généralités sur les séries

Définition d'une série numérique $\sum u_n$, de la somme partielle S_n d'ordre n , de la somme S et du reste R_n d'ordre n d'une série convergente.

2. Divergence grossière

CN de convergence : Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Contre-exemple pour la réciproque avec la série harmonique. Définition de la divergence grossière.

3. Opérations sur les séries.

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes. Structure de sev de l'ensemble des séries convergentes. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge. Lien suite/série : $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature. $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(z_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(z_n)$ convergent.

II. Séries à termes de signe constant.

Théorème fondamental : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, $\sum u_n$ converge ssi $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

1. Théorèmes de comparaison

Théorème de comparaison par majoration/minoration, par domination et par équivalent.

2. Comparaison série/intégrale

Technique de comparaison série/intégrale. Séries de Riemann. Applications : Séries de Bertrand, série harmonique (Dvpt asymptotique à 2 termes), formule de Stirling, équivalent des sommes partielles ou des restes des séries de Riemann suivant les cas.

3. Règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert.

4. Sommation des relations de comparaison [HP]

Cas divergent, cas convergent, application au théorème de Cesaro.

III. Séries à termes complexes ou réels de signe non constant

1. Séries alternées

Définition d'une série alternée. Théorème Spécial pour les séries Alternées. Application : Séries de Riemann alternées.

2. Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Définition de la convergence absolue. CS de convergence : Si $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge et $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Contre-exemple pour la réciproque. Comparaison par domination. Série géométrique complexe.

3. Produit de Cauchy

Définition, th de convergence, exponentielle complexe.

4. Critère d'Abel [HP]

Transformation et critère d'Abel. Exemples.

Savoirs-faire associés

- Déterminer la limite d'une suite de vecteurs ou matricielle : à l'aide d'une norme (indépendance en dimension finie), à l'aide des coordonnées
- Étudier une suite (u_n) définie implicitement : étudier ses variations, encadrer u_n , déterminer un équivalent de u_n à l'aide de la définition implicite.
- Étudier une suite (u_n) définie par une relation de récurrence d'ordre 1 : étudier ses variations à l'aide d'intervalles stables, montrer sa cv par Th de limite monotone (ou Inégalité des acc. finis), calculer sa limite par caract. séquentielle de la limite, déterminer un équivalent de u_n par Cesaro.
- Calculer le terme général d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2 (SRL2) en fonction du signe du discriminant de l'équation caractéristique.
- Utiliser la correspondance suite et série télescopique.
- Maîtriser les th de comparaison ($\leq$, o , O et $\sim$ + positivité).
- Appliquer la règle de d'Alembert.
- Étudier la nature d'une série de Bertrand.
- Déterminer un équivalent des sommes partielles ou des restes dans le cas monotone (comparaison série/intégrale).
- Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant : CV absolue, TSA voire transformation d'Abel (tout à refaire car HP).
- Maîtriser les conséquences du TSA : encadrement et signe de la somme, majoration et signe du reste.
- Calcul de la somme d'une série : somme télescopique (décomposition en éléments simples), passage en complexe (séries géométriques), produit de Cauchy (CV absolue).

Remarque

Tous les résultats classiques sur les suites récurrentes d'ordre 1 ont été vus mais sont hors programme : lors de l'étude tout doit être redémontré sur l'exemple. Aucun théorème de comparaison série/intégrale n'est au programme, il conviendra de tout refaire sur chaque exemple.

Preuves et exercices de cours

• Preuve 1 : Théorème de comparaison par majoration/minoration.

• Preuve 2 : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

• Preuve 3 : Règle de d'Alembert.

• Preuve 4 : Théorème spécial pour les séries alternées.

• Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$. Étudier la monotonie de (u_n) .

Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de (u_n) . Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

- Exercice 2 : Théorème de Cesàro dans le cas convergent avec contre-exemple pour la réciproque.
- Exercice 3 : Nature des séries de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ pour $\alpha \neq 1$.
- Exercice 4 : Nature des séries de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta n}$.
- Exercice 5 : Pour une série de Riemann, équivalent du reste d'ordre n dans le cas convergent.
- Exercice 6 : Pour une série de Riemann, équivalent de la somme partielle d'ordre n dans le cas divergent.

Prévisions

- Chapitre 2 : Dénombrabilité et familles sommables.
- Chapitre 3 : Algèbre linéaire.