

Programme de la khôlle n°4

Chapitre 2 : Procédés sommatoires discrets

I. Cas général

II. Séries à termes de signe constant.

III. Séries à termes complexes ou réels de signe non constant

IV. Dénombrabilité et familles sommables

1. Dénombrabilité

Ensemble fini, dénombrable et au plus dénombrable. Écritures en extension. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables. Opérations sur les ensembles dénombrables. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

2. Compléments sur la demi-droite achevée $[0, +\infty]$

Relation d'ordre, propriété de la borne supérieure dans $[0, +\infty]$, addition et multiplication. Opérations sur le sup dans $[0, +\infty]$.

3. Familles sommables de réels positifs

Somme d'une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0; +\infty]$, sommabilité. Lien avec la convergence des séries à termes positifs. Théorème de sommation par paquets. Règles de calcul sur les sommes dans $[0; +\infty]$: Changement d'indice, invariance par permutation de ses termes, sous-famille, linéarité et croissance. Théorème de Fubini. Familles « produits ».

4. Familles sommables de complexes

Sommabilité d'une famille au plus dénombrable de complexes. Lien avec la convergence absolue des séries. Théorème de majoration. Sous-famille, linéarité, croissance et inégalité triangulaire. Théorème de sommation par paquets. Changement d'indice. Invariance par permutation de ses termes. Théorème de Fubini. Familles « produits » et produit de Cauchy.

Savoirs-faire associés

- ☐ Utiliser la correspondance suite et série télescopique.
- ☐ Maîtriser les th de comparaison ($\leq$, o , O et $\sim$ + positivité).
- ☐ Appliquer la règle de d'Alembert.
- ☐ Étudier la nature d'une série de Bertrand.
- ☐ Déterminer un équivalent des sommes partielles ou des restes dans le cas monotone (comparaison série/intégrale).
- ☐ Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant : CV absolue, TSA voire transformation d'Abel (tout à refaire car HP).
- ☐ Maîtriser les conséquences du TSA : encadrement et signe de la somme, majoration et signe du reste.
- ☐ Calcul de la somme d'une série : somme télescopique (décomposition en éléments simples), passage en complexe (séries géométriques), produit de Cauchy (CV absolue)
- ☐ Montrer la dénombrabilité : par opérations ensemblistes, en créant une bijection/injection à

partir d'un ensemble dénombrable, connaître la non/dénombrabilité des ensembles de référence $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$.

- Maîtriser le théorème de sommation par paquets : dans les cas les plus classiques (verticale, horizontale et diagonale), faire attention aux bornes lorsqu'on échange des sommes non indépendantes.

Remarque

Aucun théorème de comparaison série/intégrale n'est au programme, il conviendra de tout refaire sur chaque exemple. Merci de demander à chaque étudiant lors de la question de cours un énoncé sur les familles sommables.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : Théorème de comparaison par majoration/minoration.
- Preuve 2 : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
- Preuve 3 : Règle de d'Alembert.
- Preuve 4 : Théorème spécial pour les séries alternées.
- Exercice 1 : Nature des séries de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ pour $\alpha \neq 1$.
- Exercice 2 : Nature des séries de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta n}$.
- Exercice 3 : Pour une série de Riemann, équivalent du reste d'ordre n dans le cas convergent.
- Exercice 4 : Pour une série de Riemann, équivalent de la somme partielle d'ordre n dans le cas divergent.
- Exercice 5 : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ et non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.
- Exercice 6 : Montrer que $\sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{np(n+p-1)} = \frac{\pi^2}{3}$.
- Exercice 7 [DM2] : Soit $f \in C^1([0,1], [0,1])$ telles que $f' \geq 0$. On suppose $f(1) = 1$ et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution et qu'elle est égale à ℓ .

Prévisions

- Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire.