RENDEZ-VOUS

GRANDE ÉVASION DEMANDE COORDINATION

Au jeu des 100 prisonniers, une stratégie fournit un avantage… mais la situation se complexifie dans certaines variantes, pourtant naturelles.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Il arrive que de simples problèmes de récréation mathématique donnent lieu à une multitude de questions auxquelles les réponses semblent parfois contre-intuitives. Le jeu des 100 prisonniers, déjà abordé dans cette rubrique il y a neuf ans, est de ceux-là. Nous allons ici rappeler l'énoncé du problème et sa solution, mais nous allons surtout aborder les intrigantes variantes et généralisations de cette énigme, qui poussent à interroger la pertinence des stratégies coordonnées.

Le problème initial a été proposé en 2003 par Anna Gál, de l'université du Texas à Austin, et Peter Bro Miltersen, de l'université d'Aarhus, au Danemark. Il est généralement énoncé pour 100 prisonniers, mais s'adapte sans mal à tout nombre pair de captifs. Pour plus de simplicité, nous allons d'ailleurs l'exposer avec quatre prisonniers, numérotés de 1 à 4. Ceux-ci sont introduits, un par un, dans une salle contenant quatre boîtes fermées, elles aussi numérotées de 1 à 4. Dans chacune de ces boîtes a été déposée au hasard une carte d'un jeu de quatre cartes, affichant également un chiffre de 1 à 4. Chaque prisonnier a le droit d'ouvrir la moitié des boîtes pour en consulter le contenu, puis il les referme et les replace dans leur position initiale. Chacun doit réussir à trouver la carte correspondant à son numéro. Ils peuvent discuter entre eux avant le début de l'épreuve, mais toute communication est interdite dès que celle-ci a commencé. Si chaque prisonnier parvient à retrouver la carte correspondant à son numéro, ils sont libérés tous les quatre. Si au moins l'un d'entre eux échoue, tous restent en prison. Dans le cas général, il y a $2n$ prisonniers, $2n$ boîtes et $2n$ cartes, et chaque prisonnier a le droit d'ouvrir n boîtes.

STRATÉGIES

Donnons un exemple avec quatre prisonniers. La répartition des cartes dans les boîtes pourrait être la suivante.

Numéro de la boîte	1	2	3	4
Numéro de la carte	3	1	2	4

Imaginons que chaque prisonnier procède au hasard – nous dirons alors qu'ils utilisent la stratégie «*Aléatoire*». Le premier d'entre eux pourra ainsi ouvrir, par exemple, les boîtes numérotées 1 et 2; le deuxième, les numéros 2 et 3; le troisième, les boîtes n° 3 et n° 4; et le quatrième, les boîtes n° 4 et n° 1. Dans ce cas, le troisième prisonnier ne trouve pas la carte avec son numéro: tous resteront donc en prison.

Si chaque prisonnier joue *Aléatoire*, chacun a exactement une chance sur deux de réussir, puisqu'il ouvre la moitié des boîtes. Ainsi, ils ne réussiront tous (et ne seront donc tous libérés) qu'une fois sur 2^4, c'est-à-dire 1 fois sur 16: leur probabilité de succès est de 6,25%. C'est largement sous-optimal, car il existe en réalité une stratégie qui leur garantit une probabilité de succès de plus de 40%.

Cette stratégie se nomme «*Suivre*». Elle consiste, pour chaque prisonnier, à ouvrir en premier la boîte portant le même numéro que lui, puis en deuxième celle qui affiche le

Jean-Paul Delahaye a également publié: **Aux frontières des mathématiques – Kurt Gödel et l'incomplétude** (Dunod, 2025).

numéro de la carte qu'il a trouvée dans la première boîte ouverte. Dans le cas général, avec $2n$ prisonniers appliquant la stratégie *Suivre*, on poursuit avec la même logique : chaque prisonnier ouvre en troisième la boîte dont le numéro est celui de la carte contenue dans la deuxième boîte, puis en quatrième la boîte portant le numéro de la carte contenue dans la troisième boîte, etc.

Nous allons le démontrer : cette stratégie donne à l'ensemble des prisonniers une probabilité d'être tous libérés valant $p = 1-(1/(n+1))-(1/(n+2))-...-(1/2n)$. Dans le cas avec quatre prisonniers (*voir l'encadré 1*), cela correspond à une probabilité de libération $p = 1-1/3-1/4 = 5/12 = 0{,}41666...$ La formule indique que, quand n augmente, la probabilité de succès de la stratégie *Suivre* diminue. On notera cependant qu'elle reste toujours supérieure à $p = 1-ln(2) = 0{,}30685...$ où $ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x. Dans le cas de 100 prisonniers, où chacun est donc autorisé à ouvrir 50 boîtes, on obtient précisément $p = 1-1/51-1/52-...-1/100 = 307/840 = 0{,}365476...$ C'est beaucoup mieux que la probabilité de réussite de la stratégie *Aléatoire*, qui n'est dans ce cas que de $1/2^{100} = 7{,}9\times10^{-31}$.

PERMUTATIONS ET CYCLES

Démontrons à présent la formule générale, pour le cas avec $2n$ prisonniers. Nous illustrerons cette démonstration avec le cas de

1 AVEC QUATRE PRISONNIERS

Des prisonniers numérotés de 1 à $2n$, avec $n > 1$, sont chacun invités, à tour de rôle, à ouvrir n boîtes dans une salle qui en contient $2n$. Dans ces $2n$ boîtes, on a distribué, au hasard et à raison d'une carte par boîte, des cartes elles aussi numérotées de 1 à $2n$. Si tous les prisonniers réussissent à ouvrir la boîte qui contient la carte présentant leur numéro, ils sont libérés. Si l'un d'entre eux échoue, ils restent tous en prison.

Avec 4 prisonniers, 4 boîtes, 4 cartes, il y a 4! = 24 façons de distribuer les cartes dans les boîtes. La plus simple consiste à placer chaque carte dans la boîte portant son numéro : nous noterons (1, 2, 3, 4) cette distribution des cartes.

Les 24 distributions possibles, appelées « permutations », sont détaillées dans le tableau ci-contre.

Chaque permutation peut se décomposer sous la forme de cycles. Par exemple, dans la permutation (2, 3, 1, 8, 6, 7, 5, 4), on constate que l'entier 1 mène à l'entier 2, qui mène à l'entier 3, lequel renvoie à l'entier de départ 1 : un premier cycle dans cette permutation est donc $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

On observe de même que $4 \to 8 \to 4$ et $5 \to 6 \to 7 \to 5$ sont des cycles de cette permutation, qui se décompose donc en 3 cycles. Dans le tableau ci-contre, on indique la taille du plus grand cycle dans la décomposition de chacune des permutations. C'est la longueur de ce plus grand cycle qui déterminera si la stratégie *Suivre* – qui consiste, pour chacun des quatre prisonniers, à ouvrir d'abord la boîte portant le même numéro que lui, puis la boîte portant le numéro trouvé sur la carte contenue dans la première boîte – permet ou non aux prisonniers de se libérer, avec chacune des permutations possibles.

Par exemple, avec la disposition (1, 4, 3, 2) le prisonnier n° 1 trouve son numéro dès la première ouverture de boîte. Le prisonnier n° 2 trouve dans un premier temps la carte n° 4, et va donc ouvrir la boîte n° 4, où il trouve la carte n° 2 ; il a donc lui aussi réussi. Le prisonnier n° 3 trouve immédiatement son numéro, et le prisonnier n° 4 le trouve en deux étapes.

En revanche, avec la disposition (4, 1, 2, 3) le prisonnier n° 1 trouve la carte n° 4 dans la boîte n° 1 ; il ouvre donc la boîte n° 4 et y trouve la carte n° 3. Il a donc échoué à trouver la carte comportant son numéro en seulement deux ouvertures de boîtes.

Pour réussir, il lui aurait fallu poursuivre la stratégie en ouvrant une troisième boîte – la boîte n° 3 – où il aurait trouvé la carte n° 2, qui lui aurait ensuite fait ouvrir la boîte n° 2 pour enfin trouver la carte n° 1. Dans cette situation, d'ailleurs, aucun des prisonniers ne trouve sa carte en seulement deux ouvertures, avec la stratégie *Suivre*.

On constate qu'il y a 10 cas sur 24 où le plus grand cycle a pour longueur 1 ou 2. Dans chacun de ces 10 cas, la stratégie *Suivre* permet à tous les prisonniers de retrouver la carte portant leur numéro en ouvrant une ou deux boîtes, et ils sont donc libérés. Si la distribution des cartes dans les boîtes est faite au hasard, la probabilité de tomber sur l'un de ces 10 cas est donc de 10 / 24 (41,7 % des cas) : c'est bien mieux que si les prisonniers avaient ouvert chacun deux boîtes au hasard.

Permutation	Taille du plus grand cycle
(1, 2, 3, 4)	1
(1, 2, 4, 3)	2
(1, 3, 2, 4)	2
(1, 4, 2, 3)	3
(1, 3, 4, 2)	3
(1, 4, 3, 2)	2
(2, 3, 1, 4)	3
(2, 4, 1, 3)	4
(3, 2, 1, 4)	2
(4, 2, 1, 3)	3
(3, 4, 1, 2)	2
(4, 3, 1, 2)	4
(2, 1, 3, 4)	2
(2, 1, 4, 3)	2
(3, 1, 2, 4)	3
(4, 1, 2, 3)	4
(3, 1, 4, 2)	4
(4, 1, 3, 2)	3
(2, 3, 4, 1)	4
(2, 4, 3, 1)	3
(3, 2, 4, 1)	3
(4, 2, 3, 1)	2
(3, 4, 2, 1)	4
(4, 3, 2, 1)	2

8 prisonniers $(n = 4)$. La disposition des cartes dans les boîtes définit ce qu'on nomme une «permutation» des entiers de 1 à $2n$. Il y a exactement $(2n)!$ permutations possibles. Avec $n = 4$, une permutation pourrait être, par exemple, celle présentée ci-dessous.

Numéro de la boîte	1	2	3	4	5	6	7	8
Numéro de la carte	2	5	8	7	1	3	6	4

Avec la stratégie *Suivre*, le prisonnier 1 commence par ouvrir la boîte n° 1. Il y trouve la carte 2; il ouvre donc la boîte n° 2, où il découvre la carte 5. Il ouvre donc la boîte n° 5 et y trouve la carte 1, qui le ramène à la boîte n° 1 et le fait réussir puisqu'il vient de trouver la carte correspondant à son numéro au bout de trois ouvertures de boîtes. On dit que la suite $1 \to 2 \to 5 \to 1$ est un «cycle de la permutation». Le prisonnier 2 réussit aussi, car il ouvre la suite de boîtes $2 \to 5 \to 1 \to 2$, et trouve donc la carte correspondant à son numéro. Sa réussite provient d'ailleurs du même cycle que celui parcouru par le prisonnier 1. Le prisonnier 5 réussit lui aussi grâce au même cycle. Le prisonnier 3, en revanche, tombe sur le cycle $3 \to 8 \to 4 \to 7 \to 6 \to 3$. Il finirait bien par trouver la carte portant son numéro, mais il lui faudrait pour cela ouvrir une cinquième boîte, alors qu'il n'a le droit d'en ouvrir que quatre. Dans cet exemple, les prisonniers 3, 4, 6, 7 et 8 échouent tous, car le cycle auquel appartient leur numéro, $3 \to 8 \to 4 \to 7 \to 6 \to 3$, est de longueur $5 > 4$.

La permutation de notre exemple comporte exactement deux cycles, l'un de longueur 3 et l'autre de longueur 5 – on dit qu'elle «se décompose en deux cycles». Plus généralement, toute permutation d'un ensemble fini se décompose en un nombre fini de cycles. L'exemple développé ci-dessus permet de comprendre que cette décomposition en cycles est la clé de la réussite ou de l'échec collectif des prisonniers, lorsque ceux-ci appliquent la stratégie *Suivre*. Si tous les cycles de la décomposition sont assez petits – de longueur au plus n – les prisonniers sortiront. À l'inverse, si un ou plusieurs cycles de la décomposition ont une longueur strictement supérieure à n, comme dans notre exemple, ils resteront tous en prison.

COMBINATOIRE

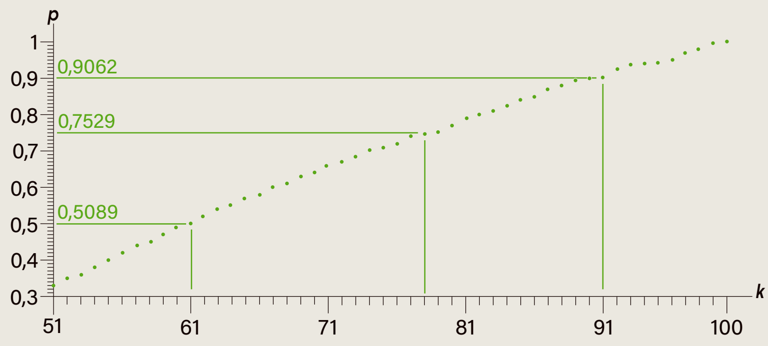
Nous avons désormais tous les éléments pour justifier, à l'aide d'un raisonnement combinatoire, la formule donnée précédemment pour la probabilité p. En effet, il existe un beau et simple résultat assurant que, pour tout entier $k > n$, la probabilité qu'une permutation des entiers de 1 à $2n$ comporte, dans sa décomposition, un cycle de longueur k est exactement $1/k$. Pour le démontrer, considérons un entier k tel que $n < k \leq 2n$. Le nombre de permutations ayant un cycle de longueur k parmi les $(2n)!$ permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ est $(2n)!/k$. En effet, il y a $(2n)!/((2n-k)!\ k!)$ façons de choisir les k entiers composant un cycle, car c'est le nombre de sous-ensembles à k éléments pris dans un ensemble à $2n$ éléments – nombre donné par le coefficient binomial $\mathrm{cb}(2n, k)$, qu'on trouve dans le triangle de Pascal. Notons qu'il ne peut pas y avoir plusieurs cycles de taille k. Il y a par ailleurs $(k-1)!$ manières d'ordonner les k entiers choisis en un cycle de longueur k, car chacune des $k!$ listes de k entiers donne un cycle, mais dans ce décompte chaque cycle est obtenu k fois: le nombre de cycles de longueur k est donc bien $k!/k = (k-1)!$ Comme il y a $(2n-k)!$ façons de classer les $2n-k$ entiers restants dans la permutation, cela fournit le nombre de permutations des entiers de 1 à $2n$ possédant un cycle de longueur k: $((2n)!/((2n-k)!\ k!)) \times (k-1)! \times (2n-k)! = ((2n)!/k!) \times (k-1)! = (2n)!/k$.

Il en résulte que, pour tout $n < k \leq 2n$, en prenant au hasard uniformément une des $(2n)!$ permutations des entiers de 1 à $2n$, on a bien une chance sur k de trouver une permutation ayant un cycle de longueur k.

Or, on a compris que la stratégie *Suivre* est gagnante si et seulement si la permutation déterminée par les cartes mises dans les boîtes ne contient aucun cycle de longueur

2 EN OUVRANT PLUS DE BOÎTES

Une variante du jeu des 100 prisonniers qui augmente la probabilité qu'ils soient libérés consiste à autoriser l'ouverture de plus de la moitié des boîtes. Le graphe ci-dessous présente la probabilité que les 100 prisonniers parviennent à se libérer en appliquant la stratégie *Suivre* en fonction du nombre $k > 50$ de boîtes que chacun est autorisé à ouvrir. Le raisonnement pour établir ces valeurs est le même que celui développé dans le texte courant. On constate que, pour avoir une chance sur deux au moins de réussir, les prisonniers doivent avoir la possibilité d'ouvrir chacun 61 boîtes. Pour avoir 75 % de chances de réussir, il faut les autoriser à ouvrir chacun 78 boîtes. Pour atteindre 90 % de réussite, on doit leur permettre d'ouvrir chacun 91 boîtes.



Probabilité que 100 prisonniers parviennent à se libérer en appliquant la stratégie *Suivre*, en fonction du nombre k de boîtes que chacun est autorisé à ouvrir.

strictement supérieure à n. La probabilité de succès de la stratégie est donc bien : $p = 1 - 1/(n+1) - 1/(n+2) - \ldots - 1/2n$.

Le résultat peut sembler paradoxal. En effet, chaque prisonnier a une chance sur deux d'ouvrir la bonne boîte, puisqu'il ne sait rien de la distribution des cartes que chacune contient, même quand il utilise la stratégie *Suivre*. De plus, les n prisonniers agissent sans communiquer entre eux une fois l'épreuve commencée. Il est donc contre-intuitif qu'ils puissent disposer d'une probabilité de tous réussir meilleure que $1/2^{2n}$.

La réalité est qu'en convenant de tous adopter la stratégie *Suivre*, les prisonniers se coordonnent pour regrouper leurs pertes, ce qui leur permet de gagner collectivement avec une probabilité supérieure à $1/2^{2n}$. On le voit clairement dans l'exemple donné plus haut, avec 8 prisonniers : la permutation est mauvaise, puisque sa décomposition comporte un cycle de taille 5 et un cycle de taille 3, ce qui a pour conséquence que 5 des 8 prisonniers échouent, soit plus de la moitié ! Si la permutation avait un cycle de longueur 8, ce serait encore plus net : chacun des prisonniers échouerait. La clé de l'histoire – qui fait qu'il n'y a pas de paradoxe – est que la stratégie *Suivre* a pour effet que les prisonniers, ayant bien une chance sur deux individuellement d'échouer, regroupent leurs échecs : cela accroît la probabilité du succès collectif.

Précisons que Eugen Curtin et Max Warshauer, du département de mathématiques de l'université du Texas, aux États-Unis, ont démontré en 2006 que la stratégie *Suivre* est optimale, pour les $2n$ prisonniers.

PLUS OU MOINS DE BOÎTES

Certaines variantes du jeu confèrent aux prisonniers une probabilité de succès plus élevée. C'est en particulier le cas lorsqu'on autorise chaque prisonnier à ouvrir plus de la moitié des boîtes (*voir l'encadré 2*). À l'inverse, on peut réduire ce nombre d'ouvertures autorisées, pour diminuer les chances de succès des prisonniers. Dans le cas où l'on n'autorise que k ouvertures de boîtes avec, cette fois-ci, $k<n$, le raisonnement mené plus haut ne fonctionne plus. En effet, ce raisonnement s'appuie sur le fait que lorsque $k>n$, il existe au plus un cycle de longueur k dans la décomposition d'une permutation des entiers de 1 à $2n$, ce qui n'est plus vrai lorsque $k \leq n$. Il est pourtant intéressant de savoir si, dans ce cas, la stratégie *Suivre* reste meilleure que la stratégie *Aléatoire*.

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons effectué des simulations, en menant les calculs avec 16 prisonniers ($n = 8$) pouvant ouvrir 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 boîtes chacun (*voir l'encadré 3*). Notons qu'en appliquant la stratégie *Suivre*, dans le cas où les prisonniers peuvent ouvrir 8 boîtes chacun, on retrouve le résultat précédemment établi : ils seront libérés avec la probabilité $p = 1 - 1/9 - 1/10 - \ldots - 1/15 - 1/16 = 0{,}337128\ldots$ À l'inverse, si chacun ne peut ouvrir qu'une seule boîte, ils sont libérés avec la probabilité $1/16! = 4{,}8 \times 10^{-14}$. En effet, dans ce cas, seule la permutation qui place chaque carte dans la boîte portant son numéro garantit la victoire. C'est un peu mieux que la probabilité qu'ils réussissent en suivant la stratégie *Aléatoire*, qui est de $1/16^{16} = 5{,}4 \times 10^{-20}$. Il est remarquable que, même dans ce cas extrême, la stratégie *Suivre* coordonne un peu les tentatives en amenant les prisonniers à choisir chacun une boîte différente, ce que le choix au hasard ne fait pas !

On constate que, dans ces simulations, *Suivre* est toujours meilleure qu'*Aléatoire*. La stratégie *Suivre* semble donc toujours apporter un gain par rapport à la stratégie *Aléatoire*, même quand les prisonniers ne peuvent ouvrir qu'un nombre limité de boîtes.

Une autre variante favorable aux prisonniers consiste à ne pas exiger que tous trouvent leur numéro en ouvrant les boîtes, mais que seulement k d'entre eux réussissent, avec $k<2n$.

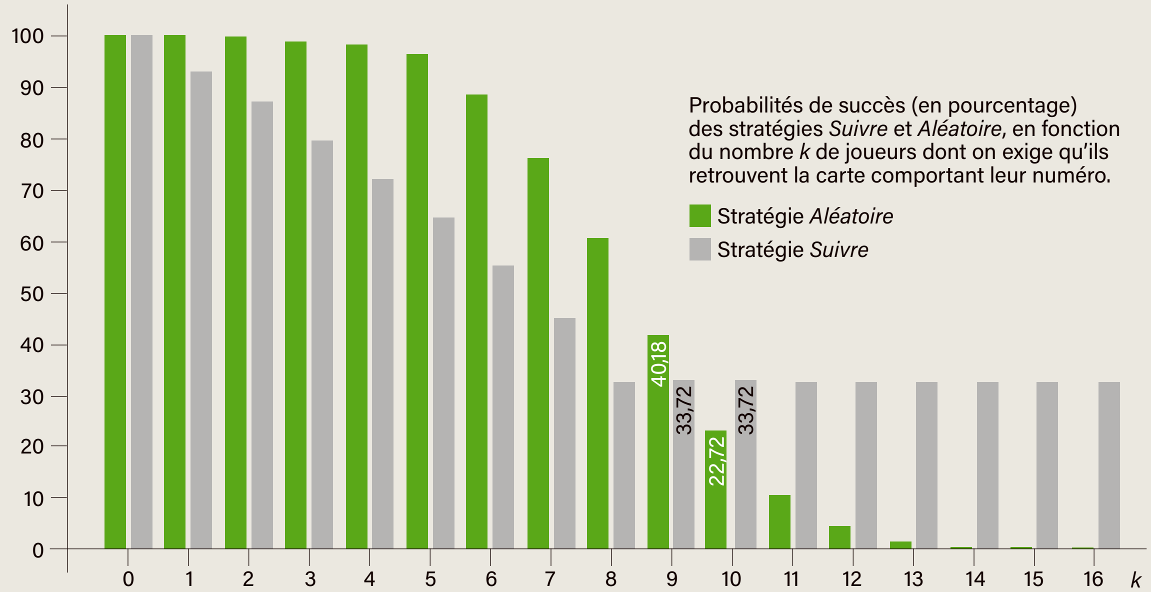
3

EN OUVRANT MOINS DE BOÎTES

Une variante du jeu qui, cette fois, diminue la probabilité de succès des prisonniers consiste à leur autoriser l'ouverture d'un nombre $k < n$ de boîtes. Comme dans le cas de base, la stratégie *Suivre* se révèle meilleure que la stratégie *Aléatoire*.
Le tableau ci-dessous présente les probabilités de succès de chacune des deux stratégies, pour différentes valeurs de k. Ces probabilités ont été calculées pour le cas $n = 8$ (16 prisonniers), à l'aide d'une simulation informatique qui effectue dans chaque cas 1 million de tirages aléatoires définissant la répartition des cartes dans les boîtes. Pour chaque résultat, le risque d'erreur est au plus de 5 %.
On constate que l'avantage de la stratégie *Suivre* est toujours significatif.

Nombre k d'ouvertures de boîtes autorisées	2	3	4	5	6	7
Probabilité de victoire avec *Aléatoire*	$3{,}15 \times 10^{-15}$	$2{,}33 \times 10^{-12}$	$2{,}32 \times 10^{-10}$	$8{,}27 \times 10^{-9}$	$1{,}53 \times 10^{-7}$	$1{,}80 \times 10^{-6}$
Probabilité de victoire avec *Suivre*	$2{,}2 \times 10^{-6}$	$7{,}24 \times 10^{-4}$	$1{,}06 \times 10^{-2}$	$4{,}80 \times 10^{-2}$	$1{,}21 \times 10^{-1}$	$2{,}20 \times 10^{-1}$

4 EN EXIGEANT UN PETIT NOMBRE DE RÉUSSITES



À nouveau, on peut se demander si la stratégie *Suivre* produit un avantage par rapport à la stratégie *Aléatoire*. Les résultats, dans ce cas, sont remarquables, car il arrive alors que la coordination créée par la stratégie *Suivre* s'avère contre-productive, par rapport à l'indépendance engendrée par la stratégie *Aléatoire*.

Commençons par traiter les cas les plus simples. Si l'on exige seulement qu'il y ait au moins un prisonnier ($k = 1$) qui trouve la carte comportant son numéro en ouvrant n boîtes, la probabilité de perdre est, bien sûr, très faible. Si les prisonniers optent pour la stratégie *Aléatoire*, chacun a une chance sur deux d'échouer, donc le cas où tous échouent se produira avec une probabilité $1/2^{2n}$. La probabilité de succès est donc $1-1/2^{2n}$. Si les prisonniers appliquent la stratégie *Suivre*, la seule situation les faisant tous perdre est celle dans laquelle la permutation définie par la répartition des cartes dans les boîtes est composée d'un unique cycle de longueur $2n$. Nous allons en effet démontrer que, dans toutes les autres situations, il y a un cycle de longueur $m \leq n$.

Deux cas sont à envisager. Dans le premier cas, il y a un cycle de longueur l, avec $n \leq l \leq 2n-1$. Le reste de la permutation, pour les nombres qui ne sont pas dans le cycle de longueur l, comporte donc m éléments avec $m \leq n$, et se décompose alors en cycles qui ont tous une longueur inférieure ou égale à m, donc inférieure ou égale à n. Dans ce cas, tous les prisonniers dont le numéro n'appartient pas au cycle de longueur l réussissent l'épreuve, donc il y en a au moins un. Dans le second cas, il n'y a pas de tel cycle de longueur l avec $n \leq l \leq 2n-1$. C'est donc que tous les cycles dans la décomposition de la permutation ont une longueur inférieure ou égale à n, et l'on se trouve ainsi dans un cas où tous les prisonniers réussissent l'épreuve. Par conséquent, le seul cas défavorable est celui dans lequel la permutation est réduite à un unique cycle de longueur $2n$, ce qui, on l'a vu, se produit avec la probabilité $1/2n$. La probabilité de succès est donc $1-1/2n$.

Or, pour tout entier $n \geq 1$, on montre sans peine que $1-1/2^{2n} > 1-1/2n$: cela signifie que, dans cette variante, la stratégie *Aléatoire* est toujours meilleure que la stratégie *Suivre*! L'indépendance des choix dans la stratégie *Aléatoire* est ici préférable à la coordination que procure *Suivre*, car cette dernière fait perdre tous les prisonniers ensemble dès lors qu'il y a un cycle de longueur $2n$, ce qui n'est pas très rare.

RENVERSEMENT DE SITUATION

Le renversement de situation dans ce cas particulier, où l'on n'exige le succès que d'un seul prisonnier ($k = 1$), se confirme-t-il pour $k = 2$, $k = 3$, etc.? Si oui, jusqu'à quelle valeur de k?

Considérons le cas $k = 2$: les prisonniers sont libérés si et seulement si au moins deux d'entre eux trouvent la carte présentant leur numéro en ouvrant n boîtes parmi les $2n$. Si les prisonniers emploient la stratégie *Aléatoire*, chacun trouve son numéro avec une probabilité $1/2$. Deux scénarios peuvent faire rater l'épreuve: soit tous les prisonniers échouent à retrouver leur carte – ce qui se produit avec une probabilité $1/2^{2n}$ – soit un seul d'entre eux parvient à retrouver sa carte. Ce second cas se produit avec une probabilité $2n/2^{2n}$, car il y a $2n$ façons de choisir le prisonnier qui trouve son numéro, chacune conduisant à un cas de probabilité $1/2^{2n}$. La probabilité de succès est

Une autre variante favorable aux prisonniers consiste à n'exiger le succès que d'un petit nombre d'entre eux. Selon que les prisonniers appliquent la stratégie *Aléatoire* ou *Suivre*, les résultats sont bien sûr différents. Mais de manière surprenante, en fonction du nombre k de prisonniers auxquels on demande de retrouver la carte comportant leur numéro, c'est l'une ou l'autre des stratégies qui est à recommander. Par exemple, si $n = 8$ (16 prisonniers), *Aléatoire* est meilleure que *Suivre* pour tous les entiers k jusqu'à 9. À partir de $k = 10$, c'est l'inverse. Dans le cas $n = 50$ (100 prisonniers), des calculs informatiques indiquent que le basculement se produit entre $k = 52$ et $k = 53$. Le diagramme ci-contre compare les probabilités de succès des stratégies *Suivre* et *Aléatoire*, en fonction du nombre k de joueurs dont on exige qu'ils retrouvent la carte comportant leur numéro. Les valeurs utilisées pour la stratégie *Aléatoire* sont exactes. Pour la stratégie *Suivre*, elles sont obtenues en simulant au hasard 1 million de permutations définissant la répartition des cartes dans les boîtes, et la probabilité d'erreur sur les valeurs obtenues est inférieure à 1 %.

donc $1-1/2^{2n}-2n/2^{2n}$. Si les prisonniers appliquent la stratégie *Suivre*, le même raisonnement que celui exposé pour le cas $k = 1$ montre que la seule possibilité pour qu'ils échouent est que la permutation des cartes dans les boîtes se réduise à un cycle de longueur $2n$ ou qu'elle comporte un cycle de longueur $2n-1$. En effet, dans tous les autres cas il y aura un cycle de longueur m avec $2 \leq m \leq n$, ce qui fera réussir au moins deux prisonniers. La probabilité de réussite avec la stratégie *Suivre* est donc $1-1/2n-1/(2n-1)$. Là encore, la stratégie *Aléatoire* est donc meilleure que la stratégie *Suivre*.

Traitons à présent le cas général, où l'on exige que k prisonniers au moins trouvent la carte comportant leur numéro en ouvrant n boîtes parmi les $2n$.

Si les prisonniers adoptent la stratégie *Aléatoire*, les situations assurant la victoire sont les suivantes:

– Soit k prisonniers réussissent. Cela se produit avec une probabilité $\mathrm{cb}(2n, k) \times 1/2^{2n}$.

– Soit $k+1$ prisonniers réussissent. Cela se produit avec une probabilité $\mathrm{cb}(2n, k+1) \times 1/2^{2n}$.

– ...

– Soit $2n$ prisonniers réussissent. Cela se produit avec une probabilité $\mathrm{cb}(2n, 2n) \times 1/2^{2n}$.

Ainsi, en appliquant la stratégie *Aléatoire*, les prisonniers réussissent l'épreuve avec la probabilité $p = (\mathrm{cb}(2n, k) + \mathrm{cb}(2n, k+1) + ... + \mathrm{cb}(2n, 2n)) \times 1/2^{2n}$.

Si les prisonniers adoptent la stratégie *Suivre*, les calculs complets ne semblent pas aboutir à une formule simple. Par exemple, en prenant $k = 4$, un grand nombre de situations font échouer les prisonniers, et la probabilité de chaque cas est difficile à évaluer – ces situations, sont, par exemple, celle dans laquelle il n'y a aucun cycle de longueur inférieure ou égale à 4, celle dans laquelle il y a 3 points fixes et aucun autre cycle de longueur inférieure ou égale à 4, celle dans laquelle il y a un cycle de longueur 2 et aucun autre cycle de longueur inférieure ou égale à 4, etc. Pour conjecturer une réponse, nous avons donc écrit un programme informatique qui engendre au hasard des permutations des $2n$ cartes dans les boîtes et calcule, pour chaque permutation, le nombre de prisonniers qui retrouvent leur carte en ouvrant n boîtes, lorsqu'ils ont recours à la stratégie *Suivre*. À partir de la répartition des nombres trouvés pour 1 million de permutations aléatoires, on évalue la probabilité de succès quand on exige, pour libérer les prisonniers, qu'au moins k d'entre eux réussissent.

Pour 16 prisonniers ($n = 8$), on observe que l'avantage conféré par la stratégie *Aléatoire* semble se prolonger au-delà de $k = 1$ et $k = 2$, jusqu'à $k = 9$, valeur où la stratégie *Suivre* devient meilleure (*voir l'encadré* 4). Dans le cas de 100 prisonniers ($n = 50$), le programme indique que la stratégie *Aléatoire* semble meilleure jusqu'à $k = 52$, et que *Suivre* devient plus avantageuse à partir de $k = 53$.

Avec 16 prisonniers ($n = 8$), on remarque aussi qu'au-delà de $k = 8$, la probabilité de réussir pour la stratégie *Suivre* devient constante. Cela s'explique par le fait qu'exiger que $8+i$ prisonniers réussissent l'épreuve, avec $i \geq 0$, revient à exiger qu'il y ait au moins $8+i$ prisonniers dont le numéro appartient à un cycle de longueur inférieure ou égale à 8, dans la décomposition de la permutation des cartes dans les boîtes. Quand c'est le cas, cela implique que les numéros des prisonniers n'appartenant pas à de tels cycles sont en nombre $8-i \leq 8$. Leurs numéros font donc eux aussi partie des cycles de longueur inférieure ou égale à 8, par conséquent, tous les prisonniers réussissent l'épreuve. Ce raisonnement se généralise bien sûr au cas avec $2n$ prisonniers: la probabilité qu'ils soient libérés en appliquant la stratégie *Suivre*, dès lors qu'on requiert pour cela que n d'entre eux ou plus trouvent la carte correspondant à leur numéro, est la même que quand on exige qu'ils trouvent tous leur numéro.

Les questions que nous avons abordées ne sont que quelques-unes des pistes de réflexion que le jeu des 100 prisonniers a suscitées. On pourrait aussi citer une étude de la variante où l'on suppose qu'il y a plus de boîtes que de prisonniers, et où certaines boîtes restent donc vides. On peut aussi étudier le cas où seuls les prisonniers qui trouvent leur numéro sont libérés, et s'interroger sur la méthode optimale à mettre en œuvre pour maximiser leur nombre. Une version avec une infinité de prisonniers a aussi été proposée et étudiée. L'intérêt pour ce problème et ses variantes ne semble pas près de tarir! ■

BIBLIOGRAPHIE

A. Losonczi, On infinite versions of the prisoner problem, *arXiv preprint*, 2024.

I. Lodato *et al.*, On partial information retrieval : the unconstrained 100 prisoner problem, *Acta Informatica*, 2023.

A. Czumaj *et al.*, Combinatorial communication in the locker room, *preprint*, 2020.

D. Avis *et al.*, The locker problem with empty lockers, *International Journal of Computer and Information Engineering*, 2009.

A. Gál et P. Bro Miltersen, The cell probe complexity of succinct data structures, *Theoretical Computer Science*, 2007.

E. Curtin et M. Warshauer, The locker puzzle, *The Mathematical Intelligencer*, 2006.