

R

ENDEZ-VOUS

P.72 Logique & calcul
 P.78 Art & science
 P.80 Idées de physique
 P.84 Chroniques de l'évolution
 P.88 Science & gastronomie
 P.90 À picorer

PLONGÉE DANS LES MAGMAS

Les magmas sont les structures algébriques les plus simples. Pourtant, l'étude des relations entre les équations qu'ils vérifient est un immense défi qui se révèle mathématiquement fécond.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)

N

ous l'évoquions déjà il y a deux mois dans cette rubrique, dans un article au sujet du «cinquième castor affairé»: nous vivons actuellement un tournant dans la pratique de la recherche en mathématiques. Le projet dont nous allons parler ici confirme l'idée que, de plus en plus souvent, un travail collectif de grande envergure utilisant des outils numériques doit être envisagé. Lancé le 25 septembre 2024 à l'initiative de Terence Tao, lauréat de la médaille Fields en 2006, le projet des théories équationnelles (*Equational theories project*) a pour objet la recherche systématique de relations entre des équations rencontrées en algèbre. Comme dans le projet autour du «castor affairé», les personnes impliquées dans ce travail sont nombreuses, et réparties aux quatre coins du globe. Elles ont largement exploité des outils numériques pour faciliter leur collaboration, mais aussi au cœur même de leur travail mathématique avec des démonstrateurs automatiques de théorèmes et des logiciels vérificateurs de démonstrations. Grâce à cette approche, les objectifs fixés par Terence Tao ont été atteints en quelques mois.

Un magma est la plus simple des structures algébriques, car il s'agit simplement d'un ensemble d'objets mathématiques muni d'une loi de composition interne: un ensemble non vide M muni d'une opération $\bullet$ est un magma si et seulement si, pour tous éléments x et y dans M , $x \bullet y$ est également élément de M . Si l'on exige de plus que la loi $\bullet$ vérifie un certain

nombre de relations, on obtient des structures plus riches, par exemple celle de groupe.

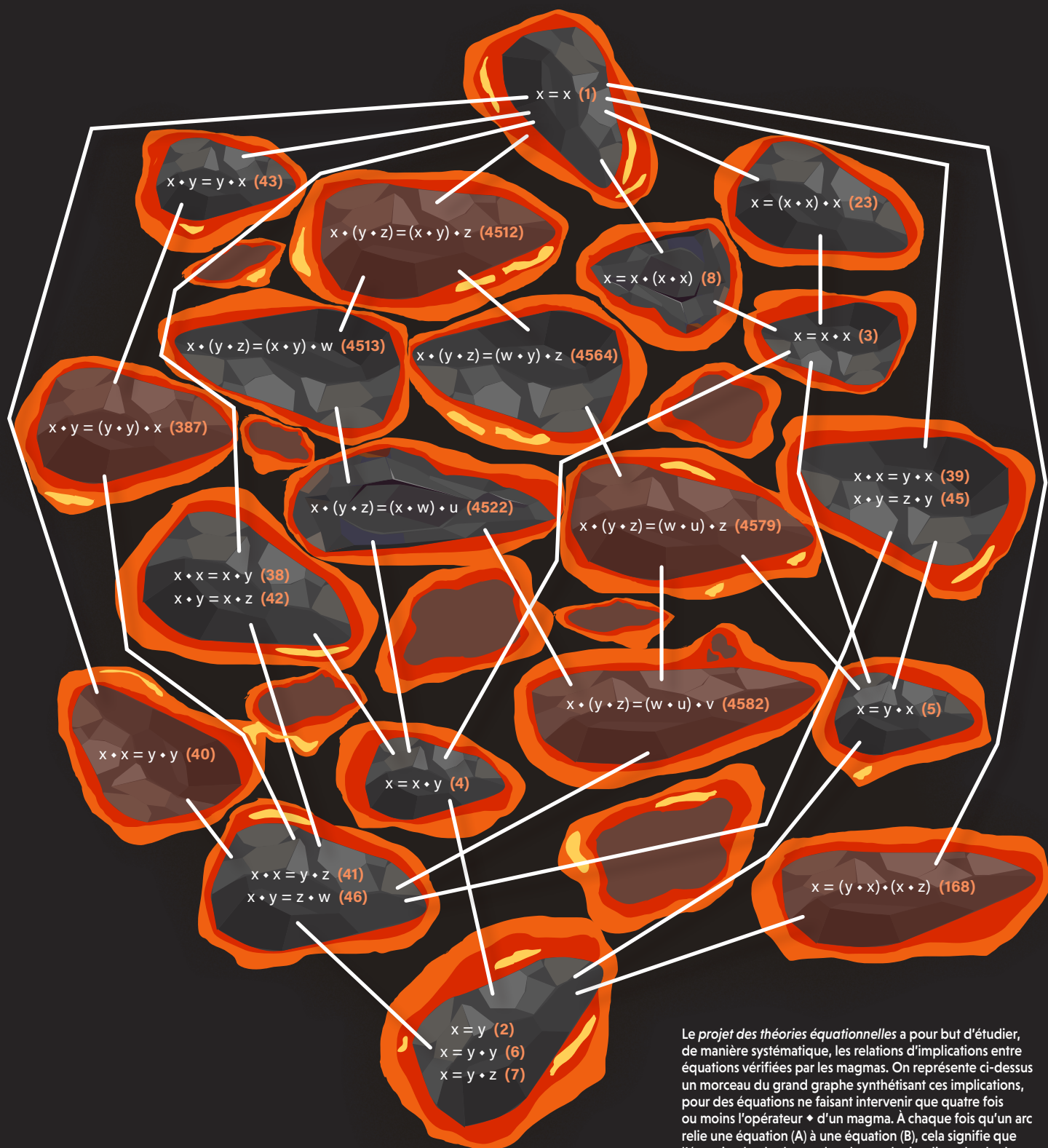
MAGMAS ET LOI

Un magma M muni de la loi de composition $\bullet$ est un groupe si et seulement si cette loi $\bullet$ est associative (autrement dit si $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$, pour tous x, y et z dans M), s'il existe un élément neutre e pour la loi $\bullet$ (c'est-à-dire s'il existe un élément e de M tel que, pour tout x dans M , $e \bullet x = x \bullet e = x$) et s'il existe un inverse au sens de la loi $\bullet$ pour tout élément de M (i.e. si, pour tout élément x de M , il existe un élément y de M tel que $x \bullet y = y \bullet x = e$). Un groupe est dit «commutatif» si, de plus, la loi $\bullet$ est commutative (c'est-à-dire si, pour tous éléments x et y de M , $x \bullet y = y \bullet x$). On vérifie, par exemple, que l'ensemble des entiers relatifs muni de l'opération d'addition est un groupe commutatif, car pour tous entiers relatifs x, y et z , on a bien $x+y$ qui est un entier relatif (donc l'opération d'addition est une loi de composition interne); $(x+y)+z = x+(y+z)$ (donc la loi $+$ est associative); $x+0=0+x=x$ (donc l'entier 0 est neutre au sens de la loi $+$); $x+(-x)=(-x)+x=0$ (tout entier relatif a un inverse au sens de la loi $+$); et, enfin, $x+y=y+x$ (donc la loi $+$ est commutative).

On peut cependant exiger de la loi $\bullet$ d'un magma qu'elle vérifie bien d'autres équations, ce qui définit d'autres structures algébriques. Selon leur intérêt, ces équations sont étudiées



Jean-Paul Delahaye
 a notamment publié:
**Aux frontières
 des mathématiques:
 Kurt Gödel
 et l'incomplétude**
 (Dunod, 2025)



Le projet des théories équationnelles a pour but d'étudier, de manière systématique, les relations d'implications entre équations vérifiées par les magmas. On représente ci-dessus un morceau du grand graphe synthétisant ces implications, pour des équations ne faisant intervenir que quatre fois ou moins l'opérateur $\cdot$ d'un magma. À chaque fois qu'un arc relie une équation (A) à une équation (B), cela signifie que l'équation la plus basse dans le graphe implique la plus haute, mais que l'implication inverse est fautive : un magma dont tous les éléments vérifient l'équation la plus basse est tel que tous ses éléments vérifient aussi l'équation la plus haute, mais pas réciproquement. Les équations placées dans un même bloc sont équivalentes : elles s'impliquent mutuellement.

1

MAGMAS ET ÉQUATIONS

Le projet des théories équationnelles (*Equational theories project*), lancé à l'initiative du mathématicien Terence Tao, recherche les relations entre équations définies sur des magmas, la structure algébrique la plus élémentaire.

Un magma est un ensemble M ayant au moins un élément, qu'on munit d'une loi de composition interne qu'on notera $\diamond$ dans le cas général. Les éléments d'un magma $(M, \diamond)$ peuvent vérifier ou non certaines équations, comme la commutativité (pour tous les éléments x et y de M , $x \diamond y = y \diamond x$) ou l'associativité (pour tous les éléments x , y et z de M , $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$). Bien sûr les ensembles usuels de nombres munis des opérations classiques d'addition ou de multiplication vérifient la commutativité et l'associativité. Mais bien d'autres structures algébriques sont étudiées en mathématiques et bien d'autres équations reliant leurs éléments sont envisagées. Un exemple particulièrement simple est donné par le magma défini par l'ensemble à trois éléments $\{0, 1, 2\}$ et dont l'opération $\diamond$ est fixée par la table ci-dessous.

$\diamond$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

On constate en lisant cette table que, pour tous éléments x et y de ce magma, on a l'égalité $x = x \diamond y$. On dit que ce magma « vérifie l'équation $x = x \diamond y$ ». Dans le projet des théories équationnelles, cette équation est appelée « équation n° 4 ». Ce projet concerne les relations d'implication entre équations sur les magmas. On dit qu'une équation (A) implique une équation (B) si tous les magmas qui vérifient (A) vérifient également (B). Par exemple, on démontre que l'équation n° 4 implique l'équation $x = (x \diamond y) \diamond x$, numérotée 25 dans le projet. En revanche, l'équation n° 4 n'implique pas l'équation n° 28, $x = (y \diamond x) \diamond x$.

avec plus ou moins de soin, depuis longtemps. Cela constitue la théorie des magmas, ou algèbre générale.

L'équation $x = x \diamond x$, qu'on appellera équation (a), peut surprendre, mais elle est vraie si l'on prend pour ensemble d'objets les nombres réels, $M = \mathbb{R}$, et que $x \diamond y$ désigne le plus grand des deux nombres x ou y , noté $\max(x, y)$ – car, bien sûr, pour tout nombre réel x , $\max(x, x) = x$. On dit que le magma défini par $M = \mathbb{R}$ et $\diamond = \max$ vérifie l'équation (a). C'est également vrai de beaucoup d'autres ensembles de nombres munis de l'opération $\max$. Mais il y a des magmas très différents vérifiant aussi l'équation (a)! Par exemple, les entiers positifs non nuls munis de l'opération $\diamond = \text{ppcm}$ (qui désigne le plus petit multiple commun de deux nombres), ou encore l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble A , noté $\mathcal{P}(A)$, muni de l'opération intersection ($\diamond = \cap$) ou de l'opération réunion ($\diamond = \cup$).

L'équation $x = x \diamond (x \diamond x)$, qu'on appellera équation (b), est plus rarement envisagée. Pourtant, elle est vérifiée par tous les magmas $(M, \diamond)$ qui vérifient (a), car, si pour tout

élément x de l'ensemble M , $x = x \diamond x$, alors $x \diamond x = x \diamond (x \diamond x)$, donc $x = x \diamond (x \diamond x)$, ce qui donne bien l'équation (b). Tout magma qui vérifie (a) vérifie donc aussi (b) : on dit que (a) implique (b), et on note $(a) \Rightarrow (b)$.

L'inverse est-il vrai : est-ce que $(b) \Rightarrow (a)$? La réponse est non. Considérons en effet le magma défini par l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de l'opération de soustraction : pour tous entiers relatifs x et y , $x \diamond y = x - y$. Ce magma vérifie l'équation (b), car, pour tout entier relatif x , $x \diamond (x \diamond x) = x - (x - x) = x$. L'équation (a), en revanche, n'est pas valable pour tous les entiers relatifs (elle n'est d'ailleurs vérifiée que pour $x=0$). Puisqu'il existe au moins un magma, vérifiant l'équation (b) mais pas l'équation (a), cela signifie que (b) n'implique pas (a).

TITANESQUE

On peut envisager une infinité d'équations comme (a) et (b), très différentes les unes des autres. Connaître les relations entre ces équations – autrement dit, savoir lesquelles impliquent ou non lesquelles – est donc un immense projet : c'est précisément celui des théories équationnelles. L'objectif est d'obtenir un grand schéma synthétisant toutes les implications vraies. Bien sûr, l'infinité d'équations possibles complique la tâche et risque même de la rendre impossible. Sans compter que des résultats d'indécidabilité algorithmique, démontrés en 1967 par Peter Perkins, établissent qu'il n'existe pas de méthode algorithmique permettant de traiter toutes les implications de manière systématique. Le projet s'est donc limité à certaines équations, entre lesquelles les chercheurs ont tenté de lister exhaustivement les implications vraies.

Même en se limitant à certaines équations, la tâche reste le plus souvent titanesque. Pour en saisir l'ampleur, on peut calculer le nombre de magmas définissables à partir d'un ensemble M à n éléments – autrement dit, le nombre de lois de compositions qu'on peut définir sur un tel ensemble. Chacun de ces magmas est un potentiel contre-exemple à une implication. Pour construire une loi de composition sur M , il faut attribuer, à chaque paire d'éléments de M , un autre élément de M (qui sera le résultat obtenu quand on applique la loi aux deux premiers). Il y a donc exactement n^n lois de composition sur M , donc n^n magmas sur M . Pour $n=2$, ce sont donc 16 magmas possibles ; pour $n=3$, 19683 magmas ; pour $n=4$ ce sont 4 294 967 296 magmas ; ou encore 298 023 223 876 953 125 magmas pour $n=5$ et $1,031 \times 10^{28}$ magmas pour $n=6$.

Pour prendre la mesure de la difficulté du projet, on peut aussi se pencher sur certains cas particuliers d'apparence assez simple. Considérons l'équation $(x \diamond x) \diamond y = y \diamond x$, que

nous nommerons équation (c), et l'équation $x \star y = y \star x$, que nous nommerons équation (d). Nous allons démontrer que (c) $\Rightarrow$ (d), puis que l'implication réciproque est fausse.

Supposons donc qu'un magma $(M, \star)$ vérifie (c), et essayons de montrer qu'il vérifie aussi (d). En utilisant deux fois l'équation (c), on obtient que, pour tous les éléments x et y de M , $(x \star x) \star (x \star x) = (x \star x) \star x = x \star x$. En réinjectant ce résultat dans l'équation (c), on obtient à présent que $(x \star x) \star y = ((x \star x) \star (x \star x)) \star y = y \star (x \star x)$. Cela signifie que $(x \star x)$ commute avec tout y . En utilisant de nouveau l'équation (c) deux fois d'affilée, on obtient l'équation $(x \star x) \star (y \star y) = (y \star y) \star x = x \star y$, qu'on nommera (e). En utilisant le fait que $(x \star x)$ commute avec tout élément de M , puis en appliquant de nouveau deux fois l'équation (c), on obtient que $(x \star x) \star (y \star y) = (y \star y) \star (x \star x) = (x \star x) \star y = y \star x$, ce qu'on nommera l'équation (f). De (e) et (f), on tire enfin (d) : $x \star y = y \star x$.

On a donc bien l'implication (c) $\Rightarrow$ (d). Contredire l'implication réciproque est plus facile, puisqu'on dispose d'un contre-exemple simple : le magma des entiers naturels munis de l'addition vérifie (d), mais pas (c).

Notons que, lorsqu'on dit que « l'équation $x \star y = y \star x$ est vérifiée par un magma $(M, \star)$ », cela signifie : « Pour tout couple d'éléments x et y de M , on a l'égalité $x \star y = y \star x$. » De même, quand on écrit que « (A) $\Rightarrow$ (B) », où (A) et (B) sont deux équations, cela signifie que « pour tous les magmas, si l'équation (A) est vérifiée alors

l'équation (B) est elle aussi vérifiée ». Dans la suite de ce texte, nous adopterons donc une convention usuelle en logique : en l'absence de précision, dire « l'affirmation P est vraie » signifiera que « pour tous les éléments X, Y , etc., $P(X, Y, \dots)$ est vraie ». Cela permet d'alléger les notations, et témoigne du fait que, fondamentalement, les objets étudiés ici sont bien les relations entre équations, et non les propriétés des éléments d'un magma en particulier. Ainsi, on écrira simplement « $x = (y \star x) \star ((x \star z) \star z) \Rightarrow x = y$ », et non « dans tous les magmas $(M, \star)$, si pour tous les éléments x, y et z de M on a l'égalité $x = (y \star x) \star ((x \star z) \star z)$, alors on a aussi l'égalité $x = z$ pour tous les éléments x et z de M . »

THÉORIES ÉQUATIONNELLES

Une première partie du *projet des théories équationnelles* a consisté à envisager les 4694 équations n'utilisant que quatre fois ou moins l'opérateur $\star$ (voir l'encadré 1). Il y a $4694 \times 4693 = 22\,028\,942$ questions du type « est-ce que (A) $\Rightarrow$ (B) ? », où (A) et (B) sont des équations de ce type. L'étude systématique de ces équations recèle un certain nombre de subtilités, qui illustrent clairement l'intérêt mathématique du projet.

La première chose à remarquer est que certaines implications d'apparence assez simple sont d'une grande difficulté à démontrer. L'exemple le plus remarquable est sans doute celui que le mathématicien polonais Andrzej Kisielewicz a découvert en 1997 : $x = (y \star x) \star ((x \star z) \star z) \Rightarrow x = y$. Les démonstrateurs automatiques parviennent à prouver

2

ÉQUATIONS REMARQUABLES

Parmi toutes les équations soigneusement étudiées dans le projet, certaines jouent des rôles très particuliers ou possèdent des propriétés remarquables.

L'équation (1) : $x = x$. Elle est aussi appelée « équation triviale », et est vérifiée par tout magma. Elle est impliquée par toute autre équation. Dans le graphe synthétisant les relations entre équations, elle est donc située tout en haut (voir le diagramme page 73).

L'équation (2) : $x = y$. Elle signifie que deux éléments quelconques d'un magma qui la vérifie sont égaux, autrement dit qu'il n'y a qu'un seul élément dans le magma. Elle implique toutes les autres équations : elle est donc située tout en bas du graphe des implications.

L'équation (46) : $x \star y = z \star w$. Aussi appelée « loi constante », elle signifie que le résultat de l'opération $\star$ entre deux éléments quelconques d'un magma qui la vérifie est toujours le même élément – autrement dit, que la table

de l'opération $\star$ ne comporte qu'un seul élément. Elle est équivalente à 417 autres équations du projet, dont par exemple l'équation (3361) : $(x \star y) = y \star (y \star (z \star w))$.

Les deux équations (65), et (1491), $x = y \star (x \star (y \star x))$, aussi appelée (**Asterix**), $x = (y \star x) \star (y \star (y \star x))$, aussi appelée (**Obelix**). Elles constituent la plus délicate et intéressante des paires d'équations étudiées dans le cadre du projet. Elles sont équivalentes si l'on ne considère que les magmas finis, mais ne le sont pas dans le cas général. Autrement dit, il existe des contre-exemples infinis où (**Asterix**) est vraie mais pas (**Obelix**) et réciproquement, en revanche, il n'existe aucun contre-exemple fini à ces implications.

L'équation (168) : $x = (y \star x) \star (x \star z)$. C'est une loi étonnante, qui a la propriété que tout magma fini qui la vérifie comporte un nombre d'éléments qui est un carré parfait (comme 1, 4, 9, 16, 25...). Elle a été étudiée en 1967 par Trevor Evans, de l'université Emory, à Atlanta, aux États-Unis, puis en 1970 par le célèbre informaticien Donald Knuth.

L'équation (543) : $x = y \star (z \star (x \star (y \star z)))$. Elle est appelée « axiome d'Alfred Tarski ». Ce logicien et philosophe polonais a démontré en 1938 qu'un magma $(M, \star)$ vérifie cette équation si et seulement si on peut munir M d'une structure de groupe commutatif telle que, pour tous éléments x et y de M , $x \star y = x + y$, où $+$ est la loi du groupe et où y' désigne l'opposé de y au sens de cette loi $+$. Cet axiome caractérise donc, en une seule équation, la structure de groupe commutatif.

cette implication, mais elle s'est révélée particulièrement résistante aux assauts humains.

Il faut aussi noter une autre subtilité, assez étonnante. Établir l'implication $(A) \Rightarrow (B)$ entre deux équations (A) et (B) peut, *a priori*, vouloir dire deux choses différentes. Plus haut, on a défini cette implication comme signifiant : « Tout magma qui vérifie (A) vérifie aussi (B). » Mais en pratique, on utilise cette affirmation comme signifiant : « En partant de l'équation (A) et en opérant des substitutions et des changements de variables dans les expressions en jeu, on obtient l'équation (B). » C'est, par exemple, ce qu'on a fait précédemment pour démontrer que $(c) \Rightarrow (d)$. Heureusement, le « théorème de complétude de Birkhoff », démontré en 1935, assure que ces deux interprétations sont équivalentes. Ce beau résultat établit l'équivalence entre une notion syntaxique – celle qui utilise les jeux d'écriture – et une notion sémantique – celle qui traite des magmas. Notons qu'il s'agit bien d'un « théorème de complétude », comme il en existe un grand nombre en logique mathématique.

En lien avec cette subtilité, un autre constat essentiel a conduit à reformuler le *projet des théories équationnelles*. Se contenter de rechercher les implications $(A) \Rightarrow (B)$ vraies pour tous les magmas finis, ce que nous noterons $(A) \Rightarrow_f (B)$, n'est pas équivalent à rechercher les implications vraies pour tous les magmas. Autrement dit, il existe des implications vraies

SUR LE WEB

Présentation du projet des théories équationnelles par Terence Tao :

<https://terrytao.wordpress.com/2024/10/12/the-equational-theories-project-a-brief-tour>

Le site regroupant l'ensemble des informations sur le projet :

https://github.com/teorth/equational_theories

pour tous les magmas finis, mais pour lesquelles il existe un contre-exemple infini (un magma infini ne vérifiant pas l'implication).

Un contre-exemple particulièrement intéressant a d'ailleurs été mis en évidence dans le projet. Il concerne les deux équations assez simples (dont je soupçonne que les noms aient été proposés par des chercheurs français) :

$$(\text{Asterix}) \quad x = y \star (x \star (y \star x))$$

$$(\text{Obelix}) \quad x = (y \star x) \star (y \star (y \star x))$$

L'équation Asterix n'implique pas l'équation Obelix, mais les seuls magmas contre-exemples possèdent tous une infinité d'éléments. Le même constat est vrai pour l'implication réciproque. On a donc $(\text{Asterix}) \Rightarrow_f (\text{Obelix})$ et $(\text{Obelix}) \Rightarrow_f (\text{Asterix})$, pourtant on n'a aucune implication $\Rightarrow$ entre ces deux équations.

Cette remarque stipulant qu'il faut distinguer $\Rightarrow_f$ et $\Rightarrow$ a eu pour conséquence un dédoublement du projet initial : il s'agit maintenant de répondre aux 22 millions de questions portant sur des implications $\Rightarrow$ et aux 22 millions de questions portant sur des implications $\Rightarrow_f$. Notons qu'il n'y a pas de théorème de complétude connu pour $\Rightarrow_f$: on ne connaît pas de définition purement syntaxique qui permette de caractériser la relation $(A) \Rightarrow_f (B)$.

OUTILS NUMÉRIQUES

Le *projet des théories équationnelles* a réuni un très grand nombre de personnes à travers le monde – des spécialistes de mathématiques ou d'informatique, amateurs ou professionnels, et notamment de nombreux étudiants et étudiantes – à qui l'on a demandé de communiquer leurs découvertes. Pour éviter les redondances et surtout vérifier l'ensemble des résultats, ces démonstrations ont été regroupées, classées et simplifiées sur un même site internet. Pour ce faire, il a été demandé aux participants de rédiger leurs démonstrations de sorte qu'elles soient vérifiables par l'assistant de preuve Lean (voir l'encadré 3).

Pour faciliter l'exploitation des très nombreux résultats, divers outils ont été conçus, notamment pour permettre de dessiner des parties du grand réseau d'implications démontrées, ou de rechercher systématiquement des contre-exemples en explorant les petits magmas. Tous ces programmes sont regroupés sur le site du projet en utilisant le gestionnaire GitHub, bien connu des développeurs de logiciels.

Terence Tao, à l'initiative du projet, commente : « Sur le plan scientifique, nous avons identifié de nouvelles techniques et constructions pour montrer qu'une théorie équationnelle donnée n'en implique pas une autre, et nous avons également découvert des structures algébriques exotiques, telles que la paire d'équations "Asterix" et "Obelix", qui présentent des

3

INFORMATIQUE ET NOUVELLES MATHÉMATIQUE

Le *projet des théories équationnelles* est symptomatique d'un changement de mœurs dans la pratique de la recherche mathématique, en particulier concernant le rôle de l'informatique.

Les logiciels de démonstration automatique de théorèmes, capables de démontrer des résultats de manière complètement autonome, ont joué un rôle important dans le projet. Plusieurs de ces outils ont été utilisés, notamment le logiciel Vampire, développé par le département d'informatique de l'université de Manchester. Cependant les deux principaux outils informatiques ayant contribué au succès de l'entreprise sont le logiciel Lean et le site GitHub. Développé à partir de 2013, Lean est un langage de programmation et un assistant de preuve : on peut écrire des démonstrations en Lean, et le logiciel vérifie rigoureusement leur validité. Cela assure le caractère correct des démonstrations avec un

fort niveau de confiance, puisqu'une erreur d'un tel logiciel est hautement improbable. C'est lui qui a été choisi comme langage pour formaliser et vérifier toutes les démonstrations du *projet des théories équationnelles*. Cette centralisation assure, avec un très haut niveau de confiance, qu'aucune erreur n'est présente dans les résultats de ce projet titanesque. D'un point de vue pratique, le projet a été organisé et coordonné avec la plateforme de développement logiciel GitHub. Elle permet aux développeurs informatiques de créer, stocker, gérer et organiser leurs travaux. Basée en Californie, aux États-Unis, elle est aujourd'hui une filiale de Microsoft. Elle est utilisée par plus de 100 millions de développeurs et constitue le plus grand hébergeur de code source du monde.

4

UNE LONGUE CHAÎNE D'IMPLICATIONS

Parmi les chaînes d'implications les plus spectaculaires découvertes dans le cadre du projet des théories équationnelles, il y a celle-ci :

$$\begin{aligned} [x = y] &\Rightarrow [x = y \diamond x] \Rightarrow [x = (y \diamond ((x \diamond x) \diamond z))] \diamond x \Rightarrow [x = (y \diamond (z \diamond (w \diamond x))) \diamond x] \Rightarrow \\ [x = (y \diamond (z \diamond x)) \diamond x] &\Rightarrow [x = ((y \diamond x) \diamond (z \diamond x)) \diamond x] \Rightarrow [x = (y \diamond x) \diamond x] \Rightarrow \\ [x = ((y \diamond (z \diamond x)) \diamond x) \diamond x] &\Rightarrow [x = ((y \diamond x) \diamond x) \diamond x] \Rightarrow [x = x \diamond x] \Rightarrow \\ [x \diamond y = (x \diamond x) \diamond (y \diamond y)] &\Rightarrow [x \diamond y = (x \diamond x) \diamond y] \Rightarrow [x \diamond x = (x \diamond x) \diamond x] \Rightarrow \\ [x \diamond x = ((x \diamond x) \diamond x) \diamond x] &\Rightarrow [x = x] \end{aligned}$$

Notons que, dans cette chaîne, chaque implication $(A) \Rightarrow (B)$ de la chaîne signifie que (A) implique (B) mais que, réciproquement, (B) n'implique pas (A) !

caractéristiques intéressantes, et qui n'auraient probablement pas été repérées sans la recherche systématique conduite par le projet. » Le chercheur confesse cependant qu'il s'attendait que l'intelligence artificielle générative, qui fait tant parler d'elle aujourd'hui, jouerait un rôle plus important dans le projet : « La seule chose que j'attendais et qui ne s'est pas encore produite, c'est une contribution significative des nouveaux outils d'IA. Ces outils ont été utilisés de plusieurs façons, mais de manière assez secondaire dans le projet. L'outil GitHub Copilot a accéléré l'écriture de certaines démonstrations Lean. Le plan général synthétisant les résultats (Blueprint) est basé sur LaTeX et a bénéficié d'autres logiciels. Plusieurs de nos outils de visualisation ont été largement coécrits à l'aide des grands modèles de langage (LLM) tels que le logiciel Claude. Cependant, pour la tâche principale de résolution des implications, les bons vieux démonstrateurs de théorèmes automatisés se sont jusqu'à présent révélés supérieurs aux LLM. »

Le graphe synthétisant toutes les implications entre équations à 4 symboles $\diamond$ ou moins est désormais connu à 100% :

- 10657 implications ont été démontrées explicitement et sont disponibles dans le formalisme de Lean ;
- 8167622 implications sont déduites des précédentes par transitivité : si $(A) \Rightarrow (B)$ et $(B) \Rightarrow (C)$, alors $(A) \Rightarrow (C)$;
- 586925 implications fausses ont été contredites à l'aide de contre-exemples ;
- 13268432 implications ont été contredites à partir des précédentes en utilisant le raisonnement suivant : si l'implication $(A) \Rightarrow (B)$ est fausse et que l'implication $(A) \Rightarrow (C)$ est vraie, alors l'implication $(C) \Rightarrow (B)$ est fausse. En effet, un contre-exemple pour l'implication $(A) \Rightarrow (B)$ est un magma pour lequel (A) est vérifiée mais pas (B) . Donc si l'implication $(A) \Rightarrow (C)$ est vraie, ce même contre-exemple sera un magma pour lequel (C) est vérifiée, mais pas (B) .

Il ne reste donc aucune implication au statut indéterminé.

Pour le graphe des implications $\Rightarrow$, concernant les magmas finis, il reste deux implications au statut indéterminé, pour lesquelles il n'y a pas de conjecture claire.

Ces résultats permettent de regrouper les équations en classes d'équivalences : des ensembles d'équations qui s'impliquent toutes mutuellement, dans un sens et dans l'autre. Il y a 1415 classes d'équivalence pour $\Rightarrow$ et 1370 pour $\Rightarrow_r$.

RÉFUTATIONS

Il existe des méthodes puissantes permettant d'obtenir rapidement un grand nombre de réfutations. Par exemple, on a démontré que si les deux membres d'une équation (A) utilisent le même nombre de fois le symbole de l'opération et que ce n'est pas le cas pour l'équation (B) , alors il est impossible que $(A) \Rightarrow (B)$. Une autre méthode de réfutation repose sur le fait que les magmas comportant quatre éléments ou moins peuvent être facilement énumérés, et qu'il est rapide de savoir si un tel magma vérifie ou non une équation donnée. Cela fournit très rapidement une multitude de magmas vérifiant une équation (A) et sans vérifier une équation (B) , contredisant l'implication $(A) \Rightarrow (B)$. En ne considérant que les magmas ayant quatre éléments ou moins, 13632566 équations ont ainsi été réfutées, soit 96,3% du total des implications réfutées ! Notons d'ailleurs que seuls 524 magmas différents sont vraiment nécessaires pour l'ensemble de ces réfutations.

Ce magnifique travail collectif se poursuivra sans doute par l'exploration, au moins partielle, des équations utilisant cinq fois ou moins l'opérateur $\diamond$, puis celle des équations l'utilisant six fois ou moins, etc. Mais surtout, il s'ajoute à la liste des succès d'une nouvelle manière de pratiquer les mathématiques, plus collaborative et exploitant de manière centrale les outils informatiques. Cette approche est particulièrement efficace pour aborder certaines questions de manière systématique, comme c'est le cas ici et comme le succès autour du « cinquième castor affairé » l'avait déjà démontré. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Bolan et al., The equational theories project : Advancing collaborative mathematical research at scale, *GitHub preprint*, 2025.

A. Bentkamp et al., Mechanical mathematicians, *Communications of the ACM*, 2023.

S. Wolfram, The Physicalization of Metamathematics and Its Implications for the Foundations of Mathematics, *arXiv preprint*, 2022.

F. Baader et T. Nipkow, *Term rewriting and all that*, Cambridge University Press, 1998.

A. Kisielewicz, Austin identities, *Algebra Universalis*, 1997.

D. Knuth et P. Bendix, Simple word problems in universal algebras, *Automation of Reasoning*, 1983.

P. Perkins, Unsolvable problems for equational theories, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1967.

A. K. Austin, Finite models for laws in two variables, *Proceeding of the AMS*, 1966.