

R

ENDEZ-VOUS

P.72 Logique & calcul
 P.78 Art & science
 P.80 Idées de physique
 P.84 Chroniques de l'évolution
 P.88 Science & gastronomie
 P.90 À picorer

DES GRAPHS À LA FLÈCHE DU TEMPS

Des modèles-jouets issus de la théorie des graphes aident à appréhender la notion de temps. Et fournissent des pistes logiques pour résoudre certains paradoxes apparents.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)

Nous nous souvenons du passé, mais ne pouvons pas agir sur lui; nous ne connaissons pas le futur, mais pouvons intervenir pour le façonner. Pourtant les lois de la physique établissent une symétrie entre le passé et le futur: changer t en $-t$ laisse ces lois invariantes. C'est le fameux problème de la «flèche du temps», énoncé par l'astrophysicien britannique Arthur Eddington en 1928. Il est considéré aujourd'hui comme un problème mal résolu de la physique. De nombreuses idées ont été proposées pour se débarrasser de ce qui apparaît comme un paradoxe, pourtant aucun consensus ne s'est établi entre physiciens, philosophes et mathématiciens pour justifier cette orientation, pourtant si évidente en apparence, de la dimension temporelle de notre espace.

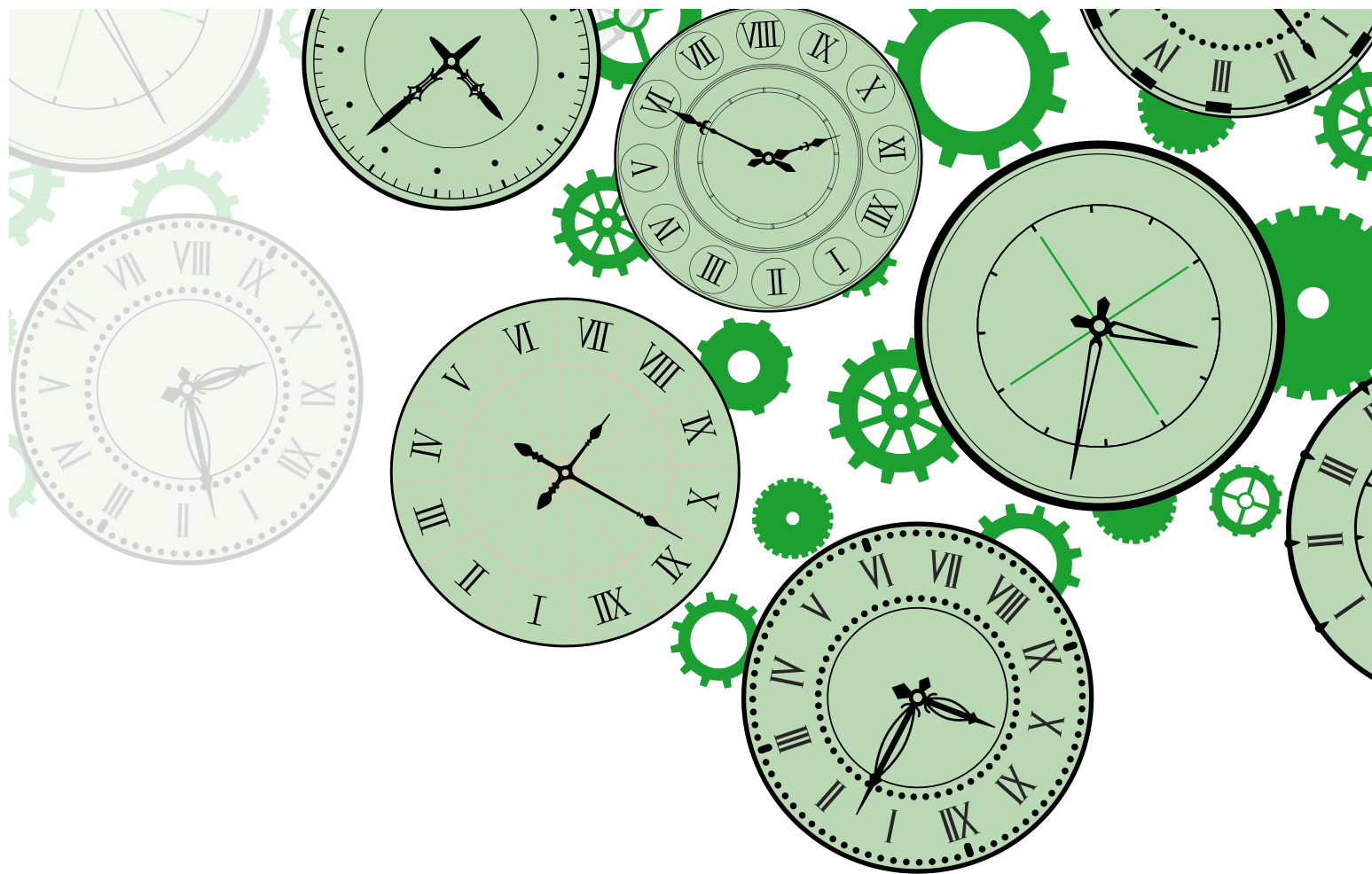
Dans un article récent, deux chercheurs et une chercheuse proposent une approche nouvelle de ce problème, qui repose sur des méthodes mathématiques utilisées en informatique et en théorie des graphes. Les coauteurs sont Pablo Arrighi, chercheur à Inria, à Paris-Saclay, spécialiste des automates cellulaires quantiques et de leurs applications à la physique théorique, Gilles Dowek, chercheur en informatique dans le même institut, qui a reçu en 2007 le Grand Prix de philosophie de l'Académie française pour son livre *Les Métamorphoses du calcul - Une étonnante histoire des mathématiques*, et Amélia Durbec, chercheuse

à l'Institut d'électronique et de microélectronique et de nanotechnologie de l'université de Lille. Pablo Arrighi explique: «Dans ma recherche, je travaille à donner une définition mathématique précise de ce qu'est un ordinateur quantique. Pour cela, j'étudie des superpositions de graphes quantiques. Or, cela ressemble beaucoup à ce que font les gens qui travaillent sur la gravité quantique, notamment aux travaux de Carlo Rovelli. Quand j'étais professeur à Marseille, juste à côté du Centre de physique théorique, j'entendais régulièrement parler de cette histoire de flèche du temps. Avec Amélia Durbec, qui était mon étudiante de thèse, nous avons pensé que nous tenions peut-être une piste pour résoudre le problème des physiciens.»

Précisons-le: le but des chercheurs n'est pas de résoudre définitivement le paradoxe, mais de montrer que, sur un plan strictement logique, il existe des modèles de mondes qui éclairent la situation. Les modèles proposés disposent de règles invariantes par changement du sens du temps et, malgré tout, l'évolution d'une variable assimilable à une entropie s'y fait de manière croissante, créant comme en thermodynamique une direction privilégiée de l'écoulement du temps. La simplicité des modèles proposés permet des démonstrations mathématiques complètes des propriétés mises en avant. Au moins à titre de jeu, décrire ces modèles-jouets et expliquer ce qui s'y

Jean-Paul Delahaye a également publié:
**Aux frontières
 des mathématiques:
 Kurt Gödel
 et l'incomplétude**
 (Dunod, 2025).





déroule est intéressant, et illustre que l'informatique et les mathématiques interviennent parfois sur des sujets où on ne les attend pas, et où la rigueur formelle qu'elles introduisent est susceptible de nourrir le débat.

ENTROPIE CROISSANTE

Pour réfléchir au problème du temps, nous mettrons à l'écart la mécanique quantique, dont certaines interprétations permettent effectivement d'orienter l'axe du temps, d'autres non.

Les idées présentées au XIX^e siècle par Ludwig Boltzmann méritent une attention particulière et vont servir de repère. Pour lui, au niveau microscopique, il n'y a pas de direction temporelle privilégiée – ce qui est cohérent avec la réversibilité des lois de la physique. Ce n'est qu'au niveau macroscopique, à cause de la croissance de l'entropie, que nous avons l'illusion d'un sens particulier d'écoulement du temps : le passé, de plus faible entropie, est différent du futur, de plus forte entropie. Cette conception s'appuie sur la seconde loi de la thermodynamique, ou principe de Carnot, qui affirme que « l'évolution d'un système thermodynamique conduit à un accroissement de l'entropie globale, somme de celle du système et de celle du milieu extérieur ». Rappelons que l'entropie d'un macroétat E – qui, pour un gaz parfait par exemple, dépend du volume, de la température et de la pression – est directement

UN PREMIER MODÈLE-JOUE NUMÉRIQUE

1

La fonction suivante associe à chaque entier positif ou nul un nombre entier positif ou nul :

$$f(1) = 0;$$

$$f(2n) = 2n + 2 \text{ pour tout } n \geq 0;$$

$$f(2n + 1) = 2n - 1 \text{ pour tout } n > 0.$$

Elle est bijective : chaque entier possède une image unique par f , et est l'image par f d'un point unique. Elle admet donc une fonction réciproque, qui défait ce qu'elle fait. C'est la fonction g définie par :

$$g(0) = 1;$$

$$g(2n) = 2n - 2 \text{ pour tout } n > 0;$$

$$g(2n + 1) = 2n + 3 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Partant d'un entier m quelconque, en appliquant de manière répétée la fonction f pour créer une chaîne d'entiers $m \rightarrow f(m) \rightarrow f(f(m)) \rightarrow \dots$ on obtiendra, au bout d'un moment, une suite de valeurs qui tendent vers l'infini. En effet, en partant d'un entier pair $2n$ et en appliquant f de manière répétée, on obtient la suite d'états : $2n \rightarrow 2n + 2 \rightarrow 2n + 4 \rightarrow \dots$ En partant, au contraire, d'un entier impair $2n + 1$, on obtient la suite d'états : $2n + 1 \rightarrow 2n - 1 \rightarrow 2n - 3 \rightarrow \dots \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \dots$ La dynamique de la fonction f , après une éventuelle période finie de décroissance, génère donc toujours une suite d'entiers croissant indéfiniment vers l'infini, et ce quel que soit le point de départ. Il en est de même pour la fonction g .

Il est donc bien clair qu'il n'est pas nécessaire de partir d'un entier de petite valeur pour voir, à la longue, augmenter les valeurs fournies par l'itération de f ou de g .



Dynamique d'itération de la fonction f . Tout point de départ conduit, en un temps fini, à une suite d'entiers croissant indéfiniment.

2

UN MONDE CIRCULAIRE

proportionnelle au logarithme du nombre de microétats compatibles avec E . Les microétats sont décrits de leur côté en précisant la vitesse et la position des particules qui constituent le gaz. Précisons aussi que l'augmentation de l'entropie décrite dans le second principe de la thermodynamique est une augmentation en moyenne : temporairement, de petites diminutions sont possibles.

« Je dois dire qu'initialement, je pensais que Boltzmann avait résolu le problème de la flèche du temps grâce à cette approche », confie Pablo Arrighi. Cependant, plusieurs problèmes persistent. « D'abord, pour que l'entropie augmente, il faut que l'état initial de l'Univers, au commencement du temps, soit un état de faible entropie. Or, ces états sont peu probables : c'est donc une hypothèse très forte ! Au fond, Boltzmann se contente de déplacer le problème avec une hypothèse *ad hoc* sur le point de départ de notre monde. » Un deuxième

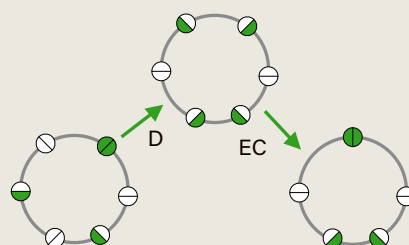
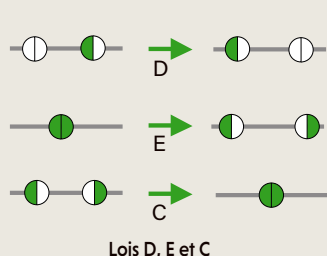
problème se cache dans le théorème de récurrence de Poincaré, un résultat mathématique qui a pour conséquence qu'un système physique de volume borné qui évolue en suivant des lois réversibles a nécessairement une évolution périodique. Autrement dit, il revient, de manière cyclique, arbitrairement près de son état initial... ce qui est incompatible avec l'idée d'un accroissement à long terme de l'entropie. Une première réponse, celle de Boltzmann, consiste à dire que le temps de retour est si grand que nous n'avons aucune chance de le voir se produire : l'entropie finira bel et bien par revenir près de son niveau initial, mais en pratique nous n'observerons jamais que son augmentation. Cette réponse est souvent jugée peu satisfaisante, et d'autres idées ont donc été recherchées. Une piste pour préserver la solution thermodynamique consiste à considérer que la taille du système n'est pas bornée, et qu'il n'est donc pas soumis au théorème de

Le modèle-jouet proposé par Pablo Arrighi, Gilles Dowek et Amélia Durbec est un graphe fini circulaire. Sa taille – i.e. son nombre de sommets – varie quand le temps avance. Chaque sommet est une bulle qui peut contenir zéro, une ou deux particules. Chaque bulle comporte une partie droite et une partie gauche, chacune regardant vers un des sommets connectés à la bulle. Les lois déterministes qui définissent la dynamique de ce monde sont simples. Elles fonctionnent à chaque fois en deux temps. D'abord toutes les particules situées dans la partie gauche d'une cellule se déplacent

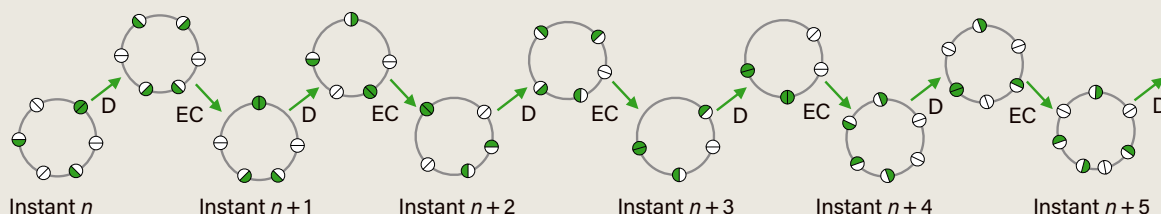
sur le sommet du graphe auxquelles elles font face, et se retrouvent dans la partie gauche de la nouvelle bulle occupée (loi D, comme Déplacement). Ensuite, en fonction des motifs présents dans le nouveau graphe, il se produit des contractions (loi C) ou au contraire des expansions (loi E) du graphe. C'est la succession de ces deux temps qui constitue l'écoulement d'une seconde.

On remarque que ces lois sont inversibles : connaissant un état de l'univers jouet, il n'existe qu'un seul état antérieur possible, facile à reconstituer. L'univers évolue donc sans perte

d'information : on peut retrouver son passé aussi loin qu'on le souhaite, de même que son futur, tous les deux parfaitement déterminés. En faisant pivoter légèrement le graphe à chaque seconde, on obtient que les particules à gauche des cellules tournent toujours vers la gauche (c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et que les particules à droite des cellules tournent toujours vers la droite. On obtient ainsi une variante du modèle disposant d'une dynamique qui est non seulement réversible, mais aussi invariante par inversion du sens du temps.



Exemple d'évolution d'un graphe circulaire sous l'effet des lois D, E et C.



Exemple d'évolution d'un graphe circulaire au cours du temps sous l'effet des lois D, E et C.



3

Poincaré – nous verrons que c’est la solution adoptée dans les travaux de Pablo Arrighi et de ses collaborateurs.

Les trois chercheurs ont en effet créé un modèle-jouet démontrant que ces deux problèmes sont, en théorie, surmontables. Leur modèle d’univers dispose de lois physiques réversibles, d’une entropie croissante (donc non cyclique)... et ceci, sans rien supposer sur l’entropie initiale. C’est précisément le point important et la nouveauté de leur travail: ils établissent mathématiquement une forme de second principe de la thermodynamique, sans hypothèse sur l’entropie de l’état initial.

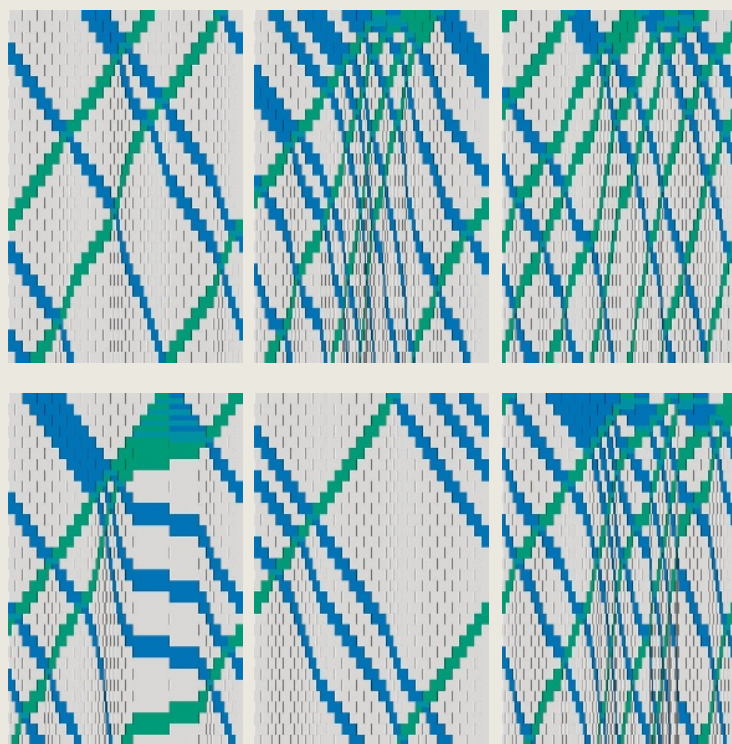
S’AFFRANCHIR DES PARADOXES

Comment ces modèles peuvent-ils s’affranchir des paradoxes qui semblent s’imposer aux physiciens? Une première étape, pour comprendre qu’il n’y a pas de contradiction logique entre réversibilité des lois de la physique et croissance de l’entropie à partir de tout point de départ, consiste à examiner la fonction définie sur les nombres entiers par $f(1)=0$; $f(2n)=2n+2$ pour tout $n \geq 0$ et $f(2n+1)=2n-1$ pour tout $n > 0$. Cette fonction est bijective, donc inversible. Pourtant si le monde étudié est décrit, à chaque instant, par un entier positif, et si c’est la fonction f qui détermine l’évolution de cet état de seconde en seconde, alors le nombre qui décrit le monde s’accroîtra vers l’infini au cours du temps, quel que soit le point de départ (voir l’encadré 1). Il n’est pas nécessaire, pour obtenir cette croissance, de faire la moindre hypothèse *ad hoc* sur l’origine.

Ce premier modèle est certes régi par une loi inversible, mais sa dynamique n’est pas invariante par changement de sens du temps: en effectuant ce changement de sens, la loi d’évolution dépend non plus de f mais de son inverse $g=f^{-1} \neq f$. La chose est facile à corriger: il suffit de considérer non pas un monde décrit par des nombres entiers dont l’évolution suit f , mais un monde décrit par des couples de nombres entiers (n, m) , dont la première composante évolue suivant f et la seconde suivant g . En changeant le sens du temps, on obtient alors un univers décrit par des couples de nombres entiers dont la première composante suit g et la seconde f , ce qui est un monde identique à celui de départ à l’ordre près des composantes. Ce monde numérique symétrisé possède, lui aussi, la propriété que, quel que soit son point de départ, l’écoulement du temps conduit à ce que ses deux composantes tendent vers l’infini puisque c’est le cas pour f et pour g . En définissant l’entropie d’un tel système à un instant donné comme la somme de ses composantes, $n+m$, on obtient donc bien une entropie qui croît vers l’infini.

Ces premiers modèles sont trop simples, trop éloignés de notre réalité: ils ne peuvent

EXPANSION DE L’UNIVERS



Ces images représentent l’évolution de l’univers décrit par une variante du modèle-jouet proposé par Pablo Arrighi, Gilles Dowek et Amélia Durbec. Chaque image correspond à une configuration initiale différente. Le temps s’écoule du haut vers le bas à partir d’une configuration choisie au hasard. Chaque ligne représente un état du graphe circulaire qu’on a ouvert et étalé horizontalement. Seuls les nœuds sont dessinés, chacun représenté par un rectangle. Remarquons que, pour maintenir une largeur constante en dépit des contractions et expansions du graphe, on « tasse » ou « dilate » les rectangles représentant les nœuds. Les rectangles verts représentent les nœuds contenant une particule dans son côté gauche. Les rectangles bleus représentent les nœuds contenant

une particule dans son côté droit. Quand deux particules se trouvent dans une même cellule (dessinée en bleu vert), celle-ci se dédouble. Dans d’autres configurations, il y a suppression locale d’un nœud. On observe que, quand le temps avance (donc en lisant le graphe du haut vers le bas), le nombre de nœuds du graphe circulaire augmente progressivement: c’est l’expansion de l’univers, qui s’accompagne d’un accroissement en moyenne de l’entropie. Sur le long terme, c’est l’expansion qui l’emporte sur la contraction. Cela s’explique, car les configurations créées lors d’une contraction sont instables – cela se démontre mathématiquement. Cette propriété est à l’origine du temps thermodynamique.

réglé le problème dans le cadre de la physique. Il faudrait proposer des modèles ressemblant de plus près à notre monde physique, dans lesquels on disposerait d'une notion d'entropie ressemblant à celle des physiciens, avec cette propriété de croissance en moyenne, quel que soit l'état initial de départ. C'est exactement ce qu'ont imaginé Pablo Arrighi, Gilles Dowek et Amélia Durbec, et ce que nous allons maintenant décrire: un modèle-jouet régi par des lois réversibles, dans lequel des «particules» circulent et entrent en collision, et où il existe une notion d'entropie calquée sur celle de la thermodynamique et qui vérifie le second principe. Tout ceci sans nécessiter d'hypothèse *ad hoc* sur une entropie initiale faible.

UN GRAPHE CIRCULAIRE

Les chercheurs décrivent plusieurs modèles-jouets, mais nous nous concentrerons sur le premier d'entre eux. Dans ce modèle, l'univers est un graphe circulaire fini où des particules circulent entre sommets. À chaque instant, l'univers peut se contracter – le nombre N de sommets diminue – ou au contraire se dilater – N augmente – suivant des règles réversibles.

Plus précisément, dans ce modèle, l'écoulement du temps est discret, et à chaque étape de temps se déroulent deux actions (voir l'encadré 2). La première consiste en un déplacement de certaines particules depuis le nœud du graphe où elles se trouvent vers un nœud voisin. Il y a ensuite une phase de modification du graphe circulaire qui, en fonction des positions

des particules, se contracte en certains points et se dilate en d'autres, tout en conservant la structure de graphe circulaire. Chacune de ces deux règles opère localement.

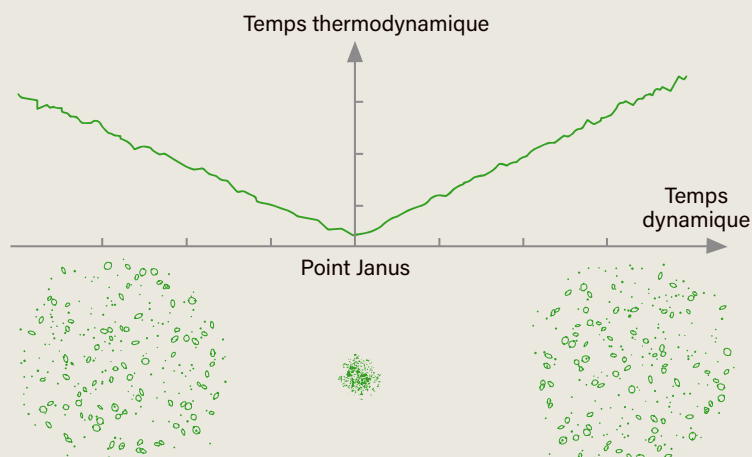
Ce modèle-jouet décrit un monde réversible: tout ce qui s'y produit peut être défait, aucune information n'est perdue. En faisant fonctionner les lois à l'envers à partir d'un instant quelconque, on revient à la situation de départ, quelle qu'elle soit. De plus, l'entropie de l'univers à un instant donné est définie, comme en thermodynamique, par le logarithme du nombre de configurations microscopiques compatibles avec la forme générale de l'univers – ici, cela sera le logarithme du nombre de configurations compatibles avec la taille du graphe circulaire et le nombre de particules présentes. La simplicité du modèle permet de démontrer mathématiquement que cette entropie globale, à la longue, croît vers l'infini, même s'il peut lui arriver de décroître temporairement au cours du processus. On retrouve donc bien une forme du second principe de la thermodynamique.

Si l'entropie globale de cet univers tend vers l'infini lors d'une évolution prolongée, c'est parce que la taille de l'univers s'accroît (voir l'encadré 3). C'est une propriété compatible avec les propriétés de notre Univers, dont on a découvert au siècle dernier qu'il est en expansion. En revanche, même si cela semble étonnant, l'entropie globale de cet univers jouet tend aussi vers l'infini quand on revient en arrière dans le temps. C'est d'ailleurs aussi

4

TEMPS DYNAMIQUE ET TEMPS THERMODYNAMIQUE

Dans le modèle-jouet de Pablo Arrighi, Gilles Dowek et Amélia Durbec, l'entropie d'un état du monde est définie comme le logarithme du nombre de configurations ayant la même taille et le même nombre de particules. C'est une méthode proche de celle utilisée en thermodynamique pour définir l'entropie de notre monde. On démontre que la taille du modèle-jouet étudié ici – et donc son entropie – est croissante en moyenne et cela, qu'on avance vers le futur ou qu'on recule vers le passé. Par conséquent, il faut distinguer le « temps dynamique », qui régit les lois définissant la dynamique du modèle (c'est lui dont on parle quand on évoque une transformation du graphe circulaire « à chaque seconde »), et le « temps thermodynamique », qui par définition avance quand l'entropie augmente. On observe une inversion du second quand on passe par un point d'entropie minimale, appelé « point Janus » – dont il a été démontré qu'il existe quelle que soit la configuration initiale. Notons que cette situation est comparable à ce qu'on obtient en étudiant la dynamique d'un nuage de particules projetées les unes contre les autres dans un monde parfaitement newtonien.



Représentation graphique des notions de temps dynamique et thermodynamique. Si l'on étudie l'évolution d'un nuage de particules, alors plus le temps thermodynamique s'écoule et plus le nuage est dispersé, indépendamment du sens d'écoulement du temps dynamique.

le cas dans l'univers décrit par la fonction f , présentée plus haut.

L'entropie locale – par exemple, celle d'un segment de longueur fixée de l'espace circulaire – va, à l'inverse, diminuer et tendre vers zéro. Ce n'est pas contradictoire avec la croissance globale, car l'univers du monde-jouet a une taille qui s'accroît, donc même si l'entropie locale tend vers zéro quand le temps passe, cela n'interdit pas que la somme des entropies locales tende vers l'infini. « Cette diminution de l'entropie locale n'est pas un défaut du modèle-jouet, mais bien un phénomène qui se produit aussi dans notre Univers réel, connu sous le nom de « mort thermique » », tient à souligner Pablo Arrighi.

Ce modèle-jouet possède diverses variantes avec des lois qui non seulement sont inversibles, mais sont aussi invariantes par changement du sens du temps – ce qui n'est pas vrai pour le modèle décrit ici. D'autres variantes permettent de retrouver encore plus de lois connues de notre Univers physique : existence d'une période d'inflation (phase où la croissance de la taille de l'univers est très rapide, au début de son existence), existence d'une flèche du temps locale (et pas seulement globale)...

POINT JANUS

Pour bien comprendre ces modèles-jouets et leurs propriétés, il faut distinguer le temps qui régit les lois physiques fondamentales, que nous appellerons le « temps dynamique », et le « temps thermodynamique », ou « temps perçu », qui avance quand l'entropie augmente (voir l'encadré 4). On se trouve alors face à une vision du monde très étrange, que le physicien russe Andreï Sakharov avait déjà envisagée dès 1980 (mais dans des travaux concernant le déséquilibre entre matière et antimatière, plutôt que la flèche du temps). Cette conception est aujourd'hui aussi défendue par Julian Barbour, un physicien britannique spécialiste du temps, qui l'illustre à travers une analyse de la dynamique du problème à n corps dans un monde newtonien. Notons cependant que ses travaux ne font pas l'unanimité dans sa communauté de recherche.

Si l'on remonte le temps dynamique depuis un point de départ quelconque, arrive un instant appelé « point Janus » – du nom du dieu romain possédant deux visages, l'un tourné vers le passé et l'autre vers l'avenir – où l'entropie est minimale. On peut voir cet instant comme le point de naissance d'un double temps thermodynamique : en remontant encore plus loin en arrière dans le temps dynamique, l'entropie y redevient, en effet, croissante ! Cela engendre un temps thermodynamique opposé à celui situé de l'autre côté du point Janus. Les perceptions du temps thermodynamique à droite et à gauche du point Janus seraient inverses l'une



Au point Janus, il se produirait une inversion du temps



de l'autre. C'est très difficile et étrange à imaginer, car comme l'écrit Julian Barbour dans un article de 2014 cosigné par Tim Koslowski et Flavio Mercati : « Tout observateur interne se trouve situé dans une moitié de la solution et ne peut être informé que des enregistrements de cette moitié. Il déduit de l'observation de ces enregistrements disponibles une direction du temps unique. »

La conséquence de cette vision en cosmologie serait qu'il n'y aurait pas un point singulier infiniment dense et contracté (l'instant 0 du Big Bang), mais un point d'entropie minimale non nulle, le point Janus, où se produirait une inversion du temps thermodynamique. Ce point peut être interprété comme le lieu d'un rebond de l'Univers (au sens du temps dynamique), ou comme un double point de départ (au sens du temps thermodynamique).

Notons que même dans le cadre de la mécanique quantique, que nous avons choisi d'écarter, des recherches récentes explorent l'idée d'un temps double avec un point donnant naissance à deux flèches du temps opposées. La question, naturelle, de savoir si cela aurait un sens de franchir le point Janus est difficile à formuler clairement. Bien des questions troublantes naissent de ces spéculations mathématiquement fondées !

L'intérêt d'un modèle-jouet comme celui-ci est qu'il démontre la possibilité de combiner, dans un monde très simplifié et néanmoins crédible, à la fois l'invariance des lois de la physique par changement du sens de l'écoulement du temps et des propriétés compatibles avec celles de notre monde physique : seconde loi de la thermodynamique, diminution de l'entropie locale, expansion cosmologique... « Je crois qu'un modèle comme le nôtre est susceptible d'aider les physiciens et physiciennes à mieux appréhender notre monde physique », assure Pablo Arrighi. Raisonner sur des modèles-jouets, c'est très utile pour n'importe quelle question de physique, car cela aide à appréhender les grands principes du phénomène, ses symétries fondamentales... Ce que l'on a apporté, en définitive, c'est une preuve de principe qu'il existe une solution aux problèmes de l'approche de Boltzmann. » ■

BIBLIOGRAPHIE

G. Berry, *Le Temps vu autrement*, Odile Jacob, 2025.

T. Guff et al., Emergence of opposing arrows of time in open quantum systems, *Scientific Reports*, 2025.

P. Arrighi et al., Time arrow without past hypothesis : a toy model explanation, *New Journal of Physics*, 2024.

J. Barbour et al., Identification of a gravitational arrow of time, *Physical Review Letters*, 2014.

J. Barbour, *The Janus Point - A New Theory of Time*, Basic Books, 2020.

A. Sakharov, Cosmological models of the Universe with reversal of time's arrow, *Soviet Physics (JETP)*, 1980.