Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Programme de la khôlle n°5

Chapitre 2 : Procédés sommatoires discrets

IV. **Dénombrabilité et familles sommables**

Rappels de cours : Polynômes

I. **Définitions et opérations sur les polynômes**

II. **Arithmétique**

III. **Racines et factorisation d'un polynôme**

Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire

I. **Familles de vecteurs**

1. **Familles génératrices et familles libres**
   Combinaison linéaire finie, sous-espace vectoriel engendré. Définition et propriétés sur les familles génératrices et libres. Base. Extension à une famille quelconque de vecteurs.
2. **Étude en dimension finie**
   Espace vectoriel de dimension finie, théorèmes des bases incomplète/extraite, dimension. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Inégalités entre cardinal d'une famille libre, génératrice et $\dim E$. Dimension d'un sev, droite vectorielle, hyperplan vectoriel.

II. **Somme et produit de sev**

1. **Produit cartésien d'un nombre fini de sev**
   Définition, structure d'ev, dimension. Exemple fondamental : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.
2. **Somme de sev**
   Somme et somme directe d'un nombre fini de sev. Caractérisation de la somme directe de n sev, cas particulier de deux sev. Supplémentaire.

III. **Bases adaptées, applications linéaires**

1. **Bases adaptées**
   Existence d'un supplémentaire en dimension finie, dimension. Formule de Grassmann. Concaténation et fractionnement de bases. Extension à n sev.
2. **Applications linéaires en dimension finie**
   Caractérisation. Liens entre surjectivité, injectivité et bijectivité et image d'une base. Théorème noyau/image. Théorème du rang. Théorème de prolongement sur une somme directe.

3. **Projecteur et symétrie**
   Définitions et caractérisations.
4. **Formes linéaires**
   Définition, caractérisation des hyperplans en dimension finie et équation cartésienne. Proportionnalité de deux formes linéaires non nulles, cas d'égalité entre deux hyperplans.

Savoirs-faire associés

- ☐ Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant : CV absolue, TSA voire transformation d'Abel (tout à refaire car HP).
- ☐ Maîtriser les conséquences du TSA : encadrement et signe de la somme, majoration et signe du reste.
- ☐ Calcul de la somme d'une série : somme télescopique (décomposition en éléments simples), passage en complexe (séries géométriques), produit de Cauchy (CV absolue)

- ☐ Montrer la dénombrabilité : par opérations ensemblistes, en créant une bijection/injection à partir d'un ensemble dénombrable, connaître la non/dénombrabilité des ensembles de référence $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

- ☐ Maîtriser le théorème de sommation par paquets : dans les cas les plus classiques (verticale, horizontale et diagonale), faire attention aux bornes lorsqu'on échange des sommes non indépendantes.

- ☐ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$: recherche de racine évidente/multiple, utiliser les racines de l'unité, les identités remarquables, les formes (pseudo)canoniques, changement de variables (équations bicarrées).
- ☐ Exprimer une dérivée n^{e} à l'aide d'une famille de polynômes définis par récurrence.

- ☐ Montrer qu'une somme est directe ou des sev sont supplémentaires : par analyse/synthèse, à l'aide des dimensions.
- ☐ Montrer qu'une famille est libre : fonctions (évaluation, dérivation, DL, limite en $\pm\infty$), polynômes (échelonnement en degré, raisonner sur le degré).
- ☐ Montrer qu'une famille est une base : libre et génératrice (une seule propriété si bon nb de vecteurs).

Remarque

> Cette semaine tout exercice sur les familles sommables, les polynômes et les sev en algèbre linéaire. Pas d'exercices mais uniquement du cours sur les applications linéaires. Merci de demander à chaque étudiant lors de la question de cours un énoncé sur les familles sommables.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
- Preuve 2 : $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$ (fonctions paires/impaires).
- Preuve 3 : Formule de Grassmann.
- Preuve 4 : Théorème noyau/image + Théorème du rang.
- Preuve 5 : Caractérisation des hyperplans en dimension finie.
- Preuve 6 : Deux formes linéaires non nulles sur E sont proportionnelles ssi elles ont même noyau.
- Exercice 1 : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ et non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.
- Exercice 2 : Montrer que $\displaystyle\sum_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{np(n+p-1)} = \frac{\pi^2}{3}$.

• Exercice 3 : Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=18 \end{cases}$.

• Exercice 4 [DM2] : Soit $f \in C^1([0,1],[0,1])$ telles que $f' \geqslant 0$. On suppose $f(1)=1$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une plus petite solution et qu'elle est égale à ℓ.

• Exercice 5 [DS1] : Soit $x \in \mathbb{R}$,.
Déterminer l'écriture trigonométrique de $1+\frac{ix}{n}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}$.
On pose pour tout $n \geqslant 2$, $Q_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\frac{iX}{2n}\right)^{2n}\right)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x)$.

• Exercice 6 [DS1] : Pour tout $n \geqslant 2$, on considère $Q_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\frac{iX}{2n}\right)^{2n}\right)$.
Montrer que $\deg(Q_n) = 2n-1$ et que pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $2n\tan\frac{k\pi}{2n}$ est racine de Q_n. En déduire que $Q_n = X\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{X^2}{4n^2\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$.

Prévisions

• Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire (application linéaire, calcul matriciel et déterminant).
• Chapitre 4 : Calcul intégral.