Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Programme de la khôlle n°6

Rappels de cours : Polynômes

I. **Définitions et opérations sur les polynômes**

II. **Arithmétique**

III. **Racines et factorisation d'un polynôme**

Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire

I. **Familles de vecteurs**

II. **Bases adaptées, applications linéaires**

III. **Matrice d'une application linéaire**

1. **Définitions**
   Matrice d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Interprétation matricielle de l'égalité $y = f(x)$. Application linéaire canoniquement associée. Toute matrice ligne de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est canoniquement associée à une unique forme linéaire de $\mathbb{K}^p$.
2. **Compatibilité avec les opérations matricielles.**
   Somme et produit par un scalaire, produit matriciel. Matrice inverse. Caractérisation des bases.
3. **Noyau et image d'une matrice**
   Définitions d'image et du noyau d'une matrice. Théorème du rang matriciel. Caractérisation des matrices inversibles. Invariance du rang par produit par une matrice inversible.
4. **Changements de bases**
   Matrice de passage. Formule de changement de bases pour un vecteur, pour un endomorphisme.

IV. **Polynômes d'endomorphismes et matricielles**

Polynôme d'endomorphisme. Opérations. Si g commute avec f alors g commute avec tout polynôme en f et $\ker(P(f)$ et $\mathrm{Im}\,(P(f))$ sont stables par g.
Polynôme matriciel ; lien avec les polynômes d'endomorphismes.
Polynôme annulateur d'un endomorphisme/d'une matrice : définition, existence pour une matrice et en dimension finie pour un endomorphisme. Application au calcul de f^{-1} et de f^n par division euclidienne.

V. Matrices par blocs et sous-espaces stables

1. **Matrices par blocs**
   Matrice définie par blocs, triangulaire/diagonale par blocs. Interprétation des colonnes et des lignes de A.
2. **Opérations par blocs**
   Produit par un scalaire, somme et produit. Puissance et produit de matrices carrées triangulaires par blocs ayant des blocs diagonaux de même ordre.
3. **Lien entre sous-espace stable et matrice par blocs**
   Sev stable. Stablilité du noyau et de l'image d'un endomorphisme par cet endomorphisme. Interprétation matricielle, lien avec les matrices diagonales par blocs. Deux exemples fondamentaux : projecteur et symétrie.

VI. Matrices semblables et trace

1. **Matrices semblables**
   Matrices semblables. Matrice semblable à une matrice scalaire. Caractérisation de la similitude des matrices. Le rang est un invariant de similitude. Puissances et polynômes de matrices semblables.
2. **Trace**
   Trace d'une matrice. Linéarité, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$. La trace est un invariant de similitude. Trace d'un endomorphisme. Linéarité, $\mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(f \circ g)$. Trace d'un projecteur.

Savoirs-faire associés

- ☐ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$: recherche de racine évidente/multiple, utiliser les racines de l'unité, les identités remarquables, les formes (pseudo)canoniques, changement de variables (équations bicarrées).
- ☐ Exprimer une dérivée n^{e} à l'aide d'une famille de polynômes définis par récurrence.

- ☐ Montrer qu'une somme est directe ou des sev sont supplémentaires : par analyse/synthèse, à l'aide des dimensions.
- ☐ Montrer qu'une famille est libre : fonctions (évaluation, dérivation, DL, limite en $\pm\infty$), polynômes (échelonnement en degré, raisonner sur le degré).
- ☐ Montrer qu'une famille est une base : libre et génératrice (une seule propriété si bon nb de vecteurs), image d'une base par un isomorphisme.
- ☐ Savoir étudier une application linéaire : déterminer sa matrice, son noyau et son image (une famille génératrice comme image de la base, la dimension par le th du rang), caractériser un projecteur (par la formule ou la somme directe) et symétrie
- ☐ Calculer les puissances d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur

Remarque

> Cette semaine tout exercice jusqu'au V inclus et uniquement du cours à partir du VI.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
- Preuve 2 : $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$ (fonctions paires/impaires).
- Preuve 3 : Formule de Grassmann.
- Preuve 4 : Théorème noyau/image + Théorème du rang.

• Preuve 5 : Caractérisation des hyperplans en dimension finie.
• Preuve 6 : Deux formes linéaires non nulles sur E sont proportionnelles ssi elles ont même noyau.
• Preuve 7 : Propriété de la trace et trace d'un projecteur.
• Exercice 1 : Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=18 \end{cases}$.
• Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée alors f est une homothétie.
• Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n et f un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f^k(x_0))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre dans E ; en déduire que $f^n = \tilde{0}$.
• Exercice 4 [DS1] : Soit $x \in \mathbb{R}$,.
Déterminer l'écriture trigonométrique de $1+\frac{ix}{n}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}$.
On pose pour tout $n \geqslant 2$, $Q_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\frac{iX}{2n}\right)^{2n}\right)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x)$.
• Exercice 5 [DS1] : Pour tout $n \geqslant 2$, on considère $Q_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\frac{iX}{2n}\right)^{2n}\right)$.
Montrer que $\deg(Q_n) = 2n-1$ et que pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $2n\tan\frac{k\pi}{2n}$ est racine de Q_n. En déduire que $Q_n = X\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{X^2}{4n^2\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$.

Prévisions

• Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire (calcul matriciel et déterminants).
• Chapitre 4 : Calcul intégral.