Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Khôlle n°01

Exercice 1 (Centrale)

Soient l'espace $E=\left\{f\in C^1([0;1],\mathbb{R})\mid f(0)=0\right\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f)=N_\infty\left(3f+f'\right)$$

1. Montrer que (E,N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha>0$ tel que $N_\infty(f)\leqslant \alpha N(f)$.
2. Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 2

Soient $n\in\mathbb{N}$ et E l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs à n. Montrer qu'il existe $\lambda>0$ vérifiant

$$\forall P\in E,\int_0^1|P(t)|\mathrm{d}t\geqslant \lambda \sup_{t\in[0;1]}|P(t)|$$

Exercice 3 (Mines-Ponts)

Soient $E=C([0;1],\mathbb{R})$ et $E^{+}1'$ ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi\in E^{+}$et pour toute fonction $f\in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi=\int_0^1|f(t)|\varphi(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E
2. Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^{+}alors les normes associées sont équivalentes.
3. Les normes $\|.\|_x$ et $\|.\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 4

Étudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{u_n}+\mathrm{e}^{v_n})=2$$

Exercice 5

Soit

$$u_n=\sum_{k=1}^{np}\frac{1}{n+k}$$

où $p\in\mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$u_n+\frac{1}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2$$

Étudier la limite de (u_n).

Exercice 7

Soient C et C' deux sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$. On note

$$C+C' := \left\{x+y, (x,y) \in C \times C'\right\}$$

Montrer que $C+C'$ est convexe.

Exercice 8 Un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.
3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ avec $\ell \leqslant -1$.
4. Quelle est la limite de $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$?

Exercice 9

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit $N_1 : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N_2 : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Démontrer qu'elles sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 10

Soit $a \geqslant 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\, \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geqslant 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a,b) \in [0,1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 11

On considère l'espace vectoriel E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et bornées sur $[1, +\infty[$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[1,+\infty[} |f|$.

1. Montrer que l'application $N(f) = \sup\limits_{x \in [1,+\infty[} \dfrac{|f(x)|}{x}$ est une norme sur E.
2. Montrer que les normes $\|\cdot\|$ et N ne sont pas équivalentes.

   On pourra utiliser la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [1, n-1] \\ (x-n+1) & si \quad x \in [n-1, n] \\ -(x-n-1) & si \quad x \in [n, n+1] \\ 0 & si \quad x \in [n+1, +\infty[\end{cases}$.

Exercice 12

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et les applications définies sur E par

$$N_1(P) = \sup_{[0,\frac{1}{2}]} |P| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 13 (5/2)

On considère une matrice A symétrique réelle. On note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Prouver $\forall k \in \mathbb{N}^*, \rho\left(A^k\right) = \rho(A)^k$.
2. Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
   (a) Montrer que $AB \in\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.
4. Soit $\|.\|$ une norme vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad AB = BA \Rightarrow \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

   Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \rho(A) \leqslant \|A\|$. (Autrement dit, ρ est la plus petite norme vérifiant la propriété (1).

Exercice 14

Soient $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ et $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'|$. Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|.\|_\infty$.

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel réel et $N : E \to \mathbb{R}_+$une application vérifiant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$,

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \text{ et } N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$$

Exercice 16

Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), f\,(0 = f'(0) = 0\right\}$ et $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\|$ est une norme sur E. Soir $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$.
2. Montrer que $\forall t \in [0,1], f(t) = e^{-t} \int_0^t (t-x) e^x g(x) dx$.
3. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant a\|f\|$. Trouver le plus petit a verifiant la relation précédente.
4. Existe-t-il un réel $b > 0$ tel que $\forall \in E, \|f\| \leqslant b\|f\|_\infty$?

Exercice 17

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Soit $R > 0$ et $A(R) = \{x \in E, d(x,A) \leqslant R\}$. Montrer que si A est convexe alors $A(R)$ est convexe et fermé.

Exercice 18

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Que peut-on dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 19

Montrer que N définit une norme si et seulement l'ensemble $B = \{x \in E, N(x) \leqslant 1\}$ est une partie convexe de E.

Exercice 20

Montrer que le simplexe de $\mathbb{R}^n, \Delta_n = \left\{\alpha = (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\right\}$ est un convexe. TB.

Exercice 21

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1;1]} |P(t)|$$

1. Montrer qye N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Etudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général $P_n = \frac{1}{n}X^n$.

Exercice 22

Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\right\}$

1. Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ dé finit une norme sur E.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|$ pour toute $f \in E$.
3. Les normes $\|\|$ et $\|\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Khôlle n°02

Exercice 1 (Centrale)

Soient l'espace $E = \left\{ f \in C^1([0;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f) = N_\infty\left(3f + f'\right)$$

1. Montrer que (E,N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.
2. Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs à n. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant

$$\forall P \in E, \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t \geqslant \lambda \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$$

Exercice 3 (Mines-Ponts)

Soient $E = C([0;1],\mathbb{R})$ et $E^{+}1'$ ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\varphi(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E
2. Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+alors les normes associées sont équivalentes.
3. Les normes $\|.\|_x$ et $\|.\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 4

Étudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n}) = 2$$

Exercice 5

Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$u_n + \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Étudier la limite de (u_n).

Exercice 7

Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.
On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1,3]$ et montrer que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Démontrer que (w_n) est décroissante.
4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 8

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$;
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Que se passe-t-il si on choisit $u_0 = 2$?

Exercice 9

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = (1-u_n)^2$.
2. $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$.

Exercice 10

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 11

Soient $f : x \mapsto \frac{x(1+2x)}{1+3x}$ et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier (u_n).
2. Déterminer la limite de la suite de terme general $\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}$.
3. Si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ tend aussi vers ℓ
4. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 12

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation
$$x + \mathrm{e}^x = n$$
possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n.
3. Former un développement asymptotique à trois termes de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 13

On introduit une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant $\|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ et on note S l'ensemble formé des colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme égale à 1 .

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $\max_{X\in S}\|AX\|$.
2. On pose $N(A) = \sup_{X\in S}\|AX\|$. Justifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leqslant N(A)\|X\|$.
3. Vérifier que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $N(A) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_i, j|$.

Exercice 14

Soit (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}_+^*$, et $u_n = u_n + \frac{1}{u_n}$. Démontrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 15

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 16

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$.
On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx + (1-s)y; x \in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 17

(u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Khôlle n°03

Exercice 1

Nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$.

Exercice 2

Nature de la série $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 3

Nature de la série $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$.

Exercice 4

Nature de la série de terme général $\dfrac{n^\alpha}{\sum_{k=1}^n \ln^2(k)}$ en fonction du réel α.

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$
3. Nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

Exercice 6

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que u converge vers 0.
2. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.
3. On pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.
4. On pose $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Déterminer la nature de la série $\sum x_n$.

Exercice 7

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

$$1.\, u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n} \quad 2.\, u_n = \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right) \quad 3.\, u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Exercice 8

Montrer que la série des inverses des nombres dont l'écriture décimale ne font apparaître aucun chiffre 9 est convergente.

Exercice 9

Déterminer $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Exercice 11

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \quad v_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right) \quad w_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

Exercice 12

Nature de la série de terme général $u_n - \ln(n+2) + a\ln(n+1) + b\ln n$ en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer sa somme le cas échéant.

Exercice 13

Solt (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}\,(u_n)$.

1. Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. Chercher un réel α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie non nulle.
3. En déduire un équivalent de u_n puis la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 14

Etudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad v_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad w_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. Chercher un réel α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie non nulle.
3. En deduire un équivalent de u_n.

Exercice 16

Étudier la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right) \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \quad w_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right) \quad (a \in \mathbb{Z})$$

Exercice 17

Solt (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.
2. Montrer que $\forall n \in N^*, F_nF_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
3. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 18

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$v_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha}, \text{ et } w_n = (-1)^n \binom{n+p}{p}^{-\alpha}.$$

Exercice 19 (X)

Trouver un équivalent de $u_n = 1! + 2! + \cdots + n!$.

Exercice 20

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)\sqrt{n}}, n \geqslant 1$.

Exercice 21

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite (A^n) converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer que $B^2 = B$.

Exercice 22 (Centrale)

Nature de la série de terme général $u_n = (\ln n)^{-\ln(\ln n)}$.

Exercice 23

Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{\cos\left(n^2\pi\right)}{n \ln n}$$

Exercice 24 (Centrale)

Soit la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Etudier la convergence de cette suite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$
3. Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2. Etudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

Exercice 25

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha}$. Discuter selon α de la limite de (u_n) et de la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 26

Pour $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n \geqslant 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

Exercice 27

Nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{n^{an}}$$

où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 28 (X)

Déterminer un équivalent en $+\infty$ du nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n!$.

Exercice 29

Soit (u_n) à valeurs strictement positive. On pose pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. On suppose la série de termine général u_n converge. Nature des séries de termes généraux $\frac{u_n}{S_n}$ et $\frac{u_n}{S_n^2}$?
2. On suppose la série de termine général u_n diverge. Nature des séries de termes généraux $\frac{u_n}{S_n}$ et $\frac{u_n}{S_n^2}$?

Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Khôlle n°04

Exercice 1

Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Exercice 2

Montrer la sommabilité et calculer la somme de la famille $\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ avec $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3 (Centrale)

Soit $j \in \mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geqslant j$$

1. Justifier la définition de Φ_j.
2. Démontrer que $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.
3. Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \mathrm{e}$.

Exercice 4

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) \qquad v_n = a^{H_n} \text{ avec } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 5

Soit u la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} - \ln n$.

1. Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ.
2. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n - \ell$.
3. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n (u_n - \ell)$.

Exercice 6

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right) \quad (a \in \mathbb{R}) \quad v_n = \frac{j^n}{\sqrt{n}} \quad j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$$

Exercice 7

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
2. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 8

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad v_n = \tan\left(\pi(7+4\sqrt{3})^n\right)$$

Exercice 9

Pour quelles valeurs de α la famille $\left(\dfrac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Exercice 10

En utilisant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18 - 24\ln 2$.

Exercice 11

On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$. et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Etablir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrez que $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrez la série $\sum u_n^3$ diverge.

Exercice 12

Montrer que $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme :

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$. Discuter selon α de la limite de (u_n) et de la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 14

Soit, pour $n \geqslant 2, u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$.

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{u_n - 1}{n}$.

Exercice 15 (Centrale)

Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

Exercice 16

Soit $n \geqslant 2$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $u_n = v_n - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ où $\forall n \geqslant 2, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. Déterminer la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$.
3. Montrer que $v_n \sim u_n$. Conclusion ?

Exercice 17

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 18

Nature de la série de terme général $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Exercice 19

Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 20

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer la limite de (u_n) et de (nu_n).
2. Nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$?

Exercice 21

On pose $S_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

1. Montrer que pour tout $n \in ?$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $S_p \leqslant n \leqslant S_{p+1}$.
2. Soient A et B deux ensembles dénombrables, $(\ x_i\ )$ et $(\ y_j\ )$ deux énumérations de A et B respectivement. Montrer que l'application $\phi : (x_i, y_j) \mapsto \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ est une bijection de $A \times B$ sur $\mathbb{N}$.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 22

Montrer que la série de terme $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$ est convergente

Exercice 23

Soit $x \in]-1,1[$, montrer que $\left(x^{kl}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{+\infty} x^{kl} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$

avec $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

Exercice 24

Nature de la série de terme général $\frac{n!}{n^n}$.

Exercice 25

La famille $\left(\frac{1}{pq(p+q)}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ? (on pourra considérer $I_n = \left\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p+q=n\right\}$)).

Exercice 26

1. Justifier l'existence, pour $n\in\mathbb{N}$ de
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$
2. Montrer que
$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$
3. Déterminer un équivalent de R_n.
4. Donner la nature de la série de terme général R_n.

Exercice 27

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum\frac{\sigma(n)}{n^2\ln n}$ diverge.

Exercice 28

Pour $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha(n-k)^\alpha}$$

1. Montrer que $u_n \geqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ pour $\alpha\leqslant 1$.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge pour $\alpha>1$. Préciser la somme. reconnait un produit de Cauchy.

Exercice 29

Soit $x\in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $\left(x^{kl}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 30

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent du reste de certaines séries alternées. On considère $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0 , et on considère la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ dont on rappelle qu'elle est convergente. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ son reste. On suppose de plus que la suite (u_n)

vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall n \geqslant 0, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0, |R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$.
2. Démontrer que la suite ($|R_n|$) est décroissante.
3. En déduire que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}u_n}{2}$.

Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Khôlle n°05

Exercice 1

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln(n)}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation : $P \circ P = P$.

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Exercice 4

Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n^2 - p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2, n\neq p}$ n'est pas sommable.

Exercice 5

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle et

$$F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin) \quad \text{et} \quad G = \{g \in E, g(0) = g(\pi/2) = 0\}$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 6

En utilisant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18 - 24\ln 2$.

Exercice 7

Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = (1+X)^{2n} - (1-X)^{2n}$.
Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$.

Exercice 8

Montrer que la famille $\left(P_k = X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puis exprimer $1, X, X^2, \ldots, X^n$ dans cette base.

Exercice 9

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+(-1)^n)}}$.

Exercice 10

Dans un espace vectoriel E, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = id_E$. Montrer que

$$E = \ker(u - id_E) \oplus \ker\left(u^2 + u + id_E\right).$$

Exercice 11

On considère $a_0, a_1, \dots, a_n, n+1$ réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note

$$F_i = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \forall j \in [\![0, n]\!] - \{i\}, P(a_j) = 0\right\}$$

Montrer que $F_0, F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'il vérifient :

$$R_n[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_n$$

Exercice 12

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 13 Déterminer les racines sachant que...

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les racines de polynômes de degré 3 ou 4 connaissant des informations sur ces racines.

1. Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.
2. Soit $Q(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q. On sait que $x_1 + x_2 = 2$.
   (a) Déterminer la valeur de x_1x_2, x_3x_4 et $x_3 + x_4$.
   (b) En déduire les valeurs des racines.

Exercice 14 Racines n-ièmes de l'unité

1. Rappeler la décomposition en produits d'irréductibles de $X^n - 1$.
2. En déduire la décomposition en produits d'irréductibles de $1 + X + \dots + X^{n-1}$.
3. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Exercice 15 Somme des racines

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note, pour $p < n, u_p$ la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \dots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

Exercice 16 Série des restes des factorielles

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 17 Trouver un supplémentaire !

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Exercice 18 (ENSEA)

Soit $n > 1$ entier. On considère le polynôme P tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

1. Déterminer les racines de P.
2. Montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$.
3. En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Khôlle n°06

Exercice 1

Soient E un ev de dimension finie et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui vérifient

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^6)$ telle que $\operatorname{rg}(f^2) = 3$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\operatorname{rg}(f)$?

Exercice 3

Soit E un ev de dimension finie tel que $f^2 = \tilde{0}$.
Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists g \in \mathscr{L}(E),\, f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E \iff \operatorname{Im}(f) = \ker(f)$$

Exercice 4 (CCINP)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Traduire " 0 est racine simple de P " en écrivant des relations sur les coefficients de P.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.
3. Montrer que si u est nilpotent alors $u = 0$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 6

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 7

Montrer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x), \cdots, x \mapsto \cos(nx), x \mapsto \sin(nx)$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 8 (CCINP)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E. On suppose que $p + q = Id_E$ et $rg(p) + rg(q) \leqslant \dim(E)$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs

Exercice 9

Déterminer les racines de $P = (X-1)^{2n+1} - 1$.
En déduire $Q_n = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 10

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $L(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$ si et seulement s'il existe $a \in L(E)$ tel que $v = a \circ u$.

Exercice 11

Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce encore une famille libre si on voit les vecteurs dans $\mathbb{C}^3$?

Exercice 12 (CCINP)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $rg(u) = 2$ et $u^2 = 0$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit u un endomorphisme de E tel que $rg(u) = 3$ et $u^4 = 0$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Soit, pour $k \in \mathbb{N}$: $P_k = (X-1)^k (X+1)^k$.

1. Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille libre.
2. Trouver les racines de $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$.

Exercice 14

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer M^{10}

Exercice 15

Soient E un espace de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que $\text{rg}(u) = \text{rg}\left(u^2\right)$. Montrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaires. Étudier la réciproque.

Exercice 16 Polynôme cyclotomique

Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 17 Matrice inverse et application linéaire sur les polynômes

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leqslant j, a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 18 Décomposer

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$
2. $X^8 - 1$
3. $\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$

Exercice 19 Puissance d'une matrice et polynôme d'endomorphisme

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1 . Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geqslant 2$.

Exercice 20 Calcul de puissance

1. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geqslant 2$.