

Programme de la khôlle n°7

Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire

IV. Matrice d'une application linéaire

V. Polynômes d'endomorphismes et matricielles

VI. Matrices par blocs et sous-espaces stables

VII. Matrices semblables et trace

VIII. Déterminants

1. Définitions

Déterminant matriciel. $\det(\lambda A), \det(A^\top) = \det(A), \det(AB)$. $\det$ est un invariant de similitude. A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme. $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de E si et seulement si $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme. $\det(f \circ g), \det(\lambda f)$. $f \in \text{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$.

2. Calcul de déterminants

Principe de calcul par pivot de Gauss. Déterminant d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne / ligne. Formule de l'inverse pour une matrice d'ordre 2. Formule du déterminant par blocs. Déterminant de Vandermonde. Interpolation de Lagrange.

3. Compléments (HP)

Caractérisation du rang comme le plus grand ordre des matrices inversibles extraites de A . Comatrice. Formule : $A \times \text{com}(A)^\top = \text{com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n$. Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^\top$.

Savoirs-faire associés

- ☐ Montrer qu'une famille est une base : libre et génératrice (une seule propriété si bon nb de vecteurs), image d'une base par un isomorphisme.
- ☐ Savoir étudier une application linéaire : déterminer sa matrice, son noyau et son image (une famille génératrice comme image de la base, la dimension par le th du rang), caractériser un projecteur (par la formule ou la somme directe) et symétrie.
- ☐ Calculer les puissances d'une matrice : par conjecture et récurrence, avec la formule du binôme, à l'aide d'un polynôme annulateur.

Remarque

Cette semaine tout exercice jusqu'au VII inclus et uniquement du cours à partir sur le VIII.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : Propriété de la trace et trace d'un projecteur.
- Preuve 2 : Déterminant de Vandermonde : $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.
- Preuve 3 : Tout sur l'interpolation de Lagrange : tous les énoncés + 1 preuve au choix de l'examineur.
- Exercice 1 : Montrer que dans un ev de dimension finie deux sev de même dimension admettent un supplémentaire commun.
- Exercice 2 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée alors f est une homothétie.
- Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n et f un endomorphisme nilpotent d'indice p . Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f^k(x_0))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre dans E ; en déduire que $f^n = \tilde{0}$.
- Exercice 4 : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- Exercice 5 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que A est inversible.
- Exercice 6 : Le rang de A est le plus grand ordre des matrices inversibles extraites de A .
- Exercice 7 : $A \times \text{com}(A)^\top = \text{com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n$.

Prévisions

- Chapitre 4 : Calcul intégral.
- Chapitre 5 : Algèbre bilinéaire.