

R

ENDEZ-VOUS

P.72 Logique & calcul
 P.78 Art & science
 P.80 Idées de physique
 P.84 Chroniques de l'évolution
 P.88 Science & gastronomie
 P.90 À picorer

DES GRAPHES AU SECOURS DES NOMBRES

Un petit problème de dénombrement portant sur des ensembles finis de nombres entiers se révèle d'une complexité insoupçonnée, et dévoile d'intéressants liens avec la théorie des graphes.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye
 a également publié :
**Aux frontières
 des mathématiques :
 Kurt Gödel
 et l'incomplétude**
 (Dunod, 2025).

Les puissances de 2, qui jouent aujourd'hui un rôle central en informatique, ont de longue date suscité l'intérêt en arithmétique. En 2021, les mathématiciens Stan Wagon et Daniel Ullman ont proposé un petit jeu, d'apparence simple, au sujet de ces nombres. Les cas les plus faciles fournissent des exercices pour les jeunes élèves qui apprennent à compter, mais dès qu'on considère des cas plus complexes le jeu se révèle délicat. Il n'est, aujourd'hui, que très partiellement résolu. Une avancée inattendue s'est récemment produite lorsqu'on a découvert que l'étude de cette question pouvait bénéficier de résultats issus de la théorie des graphes.

Le problème de départ consiste simplement à trouver des ensembles de nombres entiers (positifs ou négatifs) distincts tels qu'en additionnant deux d'entre eux, on obtienne le plus souvent possible une puissance de 2 (c'est-à-dire 1, 2, 4, 8, 16, etc.). L'ensemble de trois nombres $\{-1; 3; 5\}$ permet, par exemple, d'obtenir trois fois une puissance de 2 quand on additionne deux de ses éléments : $(-1) + 3 = 2$; $(-1) + 5 = 4 = 2^2$; $3 + 5 = 8 = 2^3$. On ne peut pas faire mieux, car un ensemble de trois nombres ne possède que trois sous-ensembles à deux éléments.

Plus généralement, un ensemble de n nombres possède exactement $n \times (n-1)/2$ sous-ensembles à deux éléments. En effet, pour construire une telle paire, on choisit le premier élément (il y a alors n possibilités), puis le second, différent du premier (il reste donc

$n-1$ possibilités), ce qui fournit un total de $n \times (n-1)$ choix, mais comme on ne souhaite pas compter deux fois une même paire dont les éléments ont simplement été inversés, il faut diviser par 2 ce décompte. Dans le cadre de notre problème, cela signifie bien sûr que dans un ensemble de n nombres, on ne pourra jamais obtenir plus de $n \times (n-1)/2$ paires de nombres dont la somme est une puissance de 2.

Pour un ensemble de 4 nombres, on ne pourra donc pas obtenir plus de $4 \times 3/2 = 6$ fois une puissance de 2. Mais peut-on atteindre ce maximum ? La réponse est non : il n'existe pas d'ensemble de 4 nombres tels qu'en prenant 6 paires différentes parmi eux, on obtienne toujours des nombres dont la somme est une puissance de 2. Peut-on, alors, obtenir 5 fois une puissance de 2 ? Là encore, la réponse est négative – on le démontre un peu plus loin. En piochant des paires dans des ensembles de 4 nombres, on obtiendra donc au plus quatre fois des éléments dont la somme est une puissance de 2. L'ensemble $\{-3; -1; 3; 5\}$ montre que cette valeur de 4 peut être atteinte, car $3 + (-1) = 2$; $5 + (-3) = 2$; $5 + (-1) = 4$ et $3 + 5 = 8$.

MYSTÉRIEUSES FONCTIONS

Pour formuler clairement les questions qui nous intéressent, on définit la fonction f qui associe à tout ensemble d'entiers (positifs ou négatifs) le nombre de paires d'éléments distincts de cet ensemble dont la somme est égale à une puissance de 2. Les exemples

PREMIÈRES VALEURS

1

On recherche pour chaque entier n , un ensemble E de n nombres entiers, positifs ou négatifs, tel qu'on puisse en tirer le plus possible de paires d'entiers dont la somme est une puissance de 2. Robert Pratt, un spécialiste des calculs avec des entiers, a lancé les meilleurs programmes disponibles pour traiter le problème, et propose de bonnes solutions jusqu'à $n = 100$. Jusqu'à $n = 21$, il est prouvé que les ensembles trouvés sont optimaux : on présente ces solutions exactes dans le tableau ci-dessous. Pour $n \geq 22$, les calculs de Robert Pratt ne recherchent des solutions que parmi des sous-ensembles de taille limitée : ils ne garantissent donc pas que les ensembles trouvés soient optimaux. On peut trouver la liste des solutions obtenues pour $22 \leq n \leq 100$ à : https://oeis.org/A352178/a352178_5.txt

Taille de l'ensemble	Nombre de paires d'éléments dont la somme est une puissance de 2	Ensemble
1	0	{0}
2	1	{3; 5}
3	3	{-1; 3; 5}
4	4	{-3; -1; 3; 5}
5	6	{-3; -1; 3; 5; 11}
6	7	{-9; -3; -1; 3; 5; 11}
7	9	{-5; -1; 1; 3; 7; 9; 13}
8	11	{-7; -3; -1; 3; 5; 7; 9; 11}
9	13	{-7; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11}
10	15	{-5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 13; 19}
11	17	{-5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 19}
12	19	{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 15; 21}
13	21	{-13; -9; -7; -5; -1; 3; 5; 9; 11; 13; 15; 17; 21}
14	24	{-11; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 19}
15	26	{-11; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 19; 21}
16	29	{-11; -9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19}
17	31	{-11; -9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21}
18	34	{-13; -11; -9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21}
19	36	{-15; -11; -9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 23; 25}
20	39	{-17; -13; -11; -9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 25}
21	41	{-15; -13; -11; -9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 29}

donnés ci-dessus établissent que $f(\{-1; 3; 5\})=3$ et $f(\{-3; -1; 3; 5\})=4$.

Notons que, si pour un ensemble E donné, on a $f(E)=k$, alors il existe une infinité d'ensembles F différents de E tels que $f(F)=k$. En effet, en construisant un ensemble E' dont les éléments sont les doubles de ceux de E , $E'=\{2e \mid e \in E\}$, on obtient bien $f(E)=f(E')$ (et $E' \neq E$). En effet, chaque paire $\{a; b\}$ d'éléments de E telle que $a+b=2^k$ fournit une paire $\{2a; 2b\}$ dans E' dont la somme est également une puissance de 2, car $2a+2b=2(a+b)=2^{k+1}$. Inversement si une paire $\{2a; 2b\}$ d'éléments de E' est telle que $2a+2b=2^m$, alors on a nécessairement $m>0$ car $2a+2b$ est pair, et ne peut donc pas valoir 1. Par conséquent, $a+b=2^{m-1}$ est aussi une puissance de 2, donc la paire $\{a; b\}$ d'éléments de E répond à nos exigences. Les ensembles E et E' vérifient donc bien $f(E)=f(E')$. En construisant un nouvel ensemble E'' constitué des doubles des éléments de E' , on obtient un nouvel ensemble tel que $f(E'')=f(E')=f(E)$, etc.

Venons-en au problème posé par Stan Wagon et Daniel Ullman en 2021, qui depuis a suscité l'intérêt de nombreux amateurs d'énigmes numériques. On définit une nouvelle fonction g qui, à tout entier k , associe le nombre maximal de paires d'entiers dont la somme est une puissance de 2, dans un ensemble à k éléments. Autrement dit, si pour un entier fixé k , le maximum de la fonction f sur des ensembles à k éléments est m , on écrit $g(k)=m$. En admettant que les exemples

donnés précédemment sont optimaux, on a donc $g(3)=3$ et $g(4)=4$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on a $g(k) \geq k-1$. En effet, $f\{-1; 2^2+1; 2^3+1; 2^4+1; \dots; 2^k+1\} = k-1$, car dans cet ensemble toutes les paires de la forme $\{-1; 2^i+1\}$ sont bien constituées d'éléments dont la somme est une puissance de 2, et pour toute paire d'éléments de la forme $\{2^i+1; 2^j+1\}$, on a $2^i+1+2^j+1 = 2^i+2^j+2 = 2(2^{i-1}+2^{j-1}+1)$. Comme $(2^{i-1}+2^{j-1}+1)$ est impair et supérieur ou égal à 3, la somme des éléments de la paire en question ne peut donc pas être une puissance de 2.

En exploitant, avec des arguments similaires, l'ensemble $\{-1; 3; 5\}$ on obtient un peu mieux : si $k \geq 3$, alors $g(k) \geq k$, car $f\{-1; 3; 5; 2^4+1; 2^5+1; \dots; 2^k+1\} = k$.

On a donc établi un premier encadrement : pour tout entier $k \geq 3$, $k \leq g(k) \leq k \times (k-1)/2$.

Plus généralement, dès qu'on connaît un ensemble E de k éléments tel que $f(E) = k+m$, on peut l'exploiter pour montrer que $g(n) \geq n+m$ pour tout $n \geq k$. Pour cela, on construit un ensemble E' à n éléments en prenant tous les éléments de E et en leur adjoignant $n-k$ nombres de la forme 2^i-e , où e est un élément fixé de E , en s'arrangeant pour que les nombres ajoutés soient tous différents des éléments de E et différents entre eux. De la sorte, on vérifie que $f(E') \geq n+m$, donc que $g(n) \geq n+m$.

On peut par ailleurs obtenir, par un calcul par force brute, des minorants de $g(k)$ jusqu'à $k=30$, car en trouvant un ensemble de k éléments contenant n paires dont la somme des éléments est une puissance de 2, on sait que $g(k) \geq n$ (voir l'encadré 1).

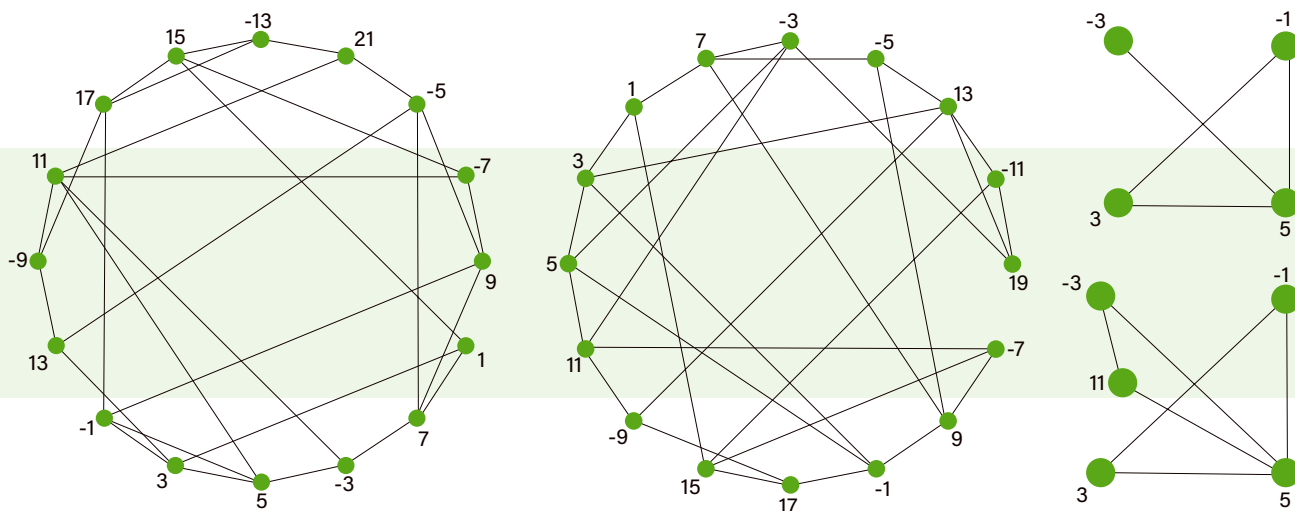
Obtenir de meilleurs encadrements et déterminer les valeurs précises de la fonction g

s'est cependant révélé redoutablement difficile, et les outils nécessaires pour identifier ses premières valeurs ont surpris.

CALCULABLE PAR PROGRAMME

Notons que le seul fait que g soit une fonction calculable par programme informatique n'est pas une évidence. Chaque valeur de g donne en effet une information qui porte sur une infinité de possibilités : affirmer que $g(k) = m$ signifie qu'aucun ensemble de k nombres – il y en a une infinité – ne contient plus de m paires d'entiers dont la somme est une puissance de 2. Il se pourrait donc que la fonction g ne soit pas calculable par programme, de la même manière que la fonction qui indique le nombre maximum d'étapes de calcul d'une machine de Turing à k états qui s'arrête n'est pas calculable.

Cependant, un raisonnement proposé par Christoph Haase, professeur associé à l'université d'Oxford et spécialiste de vérification automatique, exploite des considérations sur les systèmes axiomatiques utilisés en arithmétique pour établir que g est bel et bien calculable par programme. Toutefois, l'algorithme qui pourrait être tiré des raisonnements logiques de Christoph Haase est d'une si grande complexité que personne, à ce jour, n'a tenté de le programmer. Il est à peu près certain que les calculs qu'engendrerait cet algorithme ne permettraient pas, en pratique, d'aller bien loin : être calculable en théorie ne signifie pas toujours être calculable en pratique, à cause de possibles explosions combinatoires. Comme nous allons le voir, ce sont en fait des méthodes s'appuyant sur la théorie des graphes qui ont permis des progrès.



LA VARIANTE SANS NOMBRES NÉGATIFS

2

Dans les énoncés évoqués dans cet article, on considère des ensembles de nombres entiers positifs ou négatifs. Quand on se restreint à des ensembles de nombres entiers seulement positifs, le problème reste intéressant, mais devient beaucoup plus accessible et un raisonnement général permet d'obtenir une solution complète.

Définissons $g'(n)$ comme la plus grande valeur possible de $f(E)$ (le nombre de paires d'éléments d'un ensemble E dont la somme est une puissance de 2) quand E est un ensemble de n entiers positifs. Alors, on peut affirmer que pour tout entier $n \geq 1$, $g'(n) = n - 1$.

La démonstration exploite deux résultats intermédiaires.

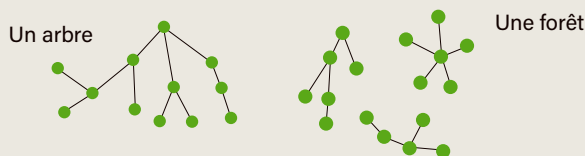
Résultat intermédiaire n° 1. Soit a un nombre entier strictement positif. Il existe un unique entier b tel que $0 \leq b \leq a$ et tel que $a + b$ soit une puissance de 2.

Démonstration. Soit k l'unique entier strictement positif tel que $2^{k-1} \leq a < 2^k$. Posons $b = 2^k - a$. Alors $0 \leq b \leq a$, et $a + b$ est bien une puissance de 2. Supposons qu'il existe un autre entier $b' \leq a$ tel que $a + b' = 2^{k+i}$, avec $i > 0$. Alors $b' = 2^{k+i} - a$ donc $b' \geq 2^{k+1} - a$. Or, $2^{k+1} - a = (2^k - a) + 2^k > 2^k > a$, c'est-à-dire $b' > a$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Il n'y a donc bien qu'un seul entier $0 \leq b \leq a$ tel que $a + b$ soit une puissance de 2, et cet entier vaut $b = 2^k - a$.

Résultat intermédiaire n° 2. Le graphe de Ullman-Wagon d'un ensemble E d'entiers positifs tous différents ne comporte aucun cycle.

Démonstration. Les cycles de longueur 2 sont impossibles dans un graphe non orienté. Supposons qu'il existe $\{e_1; e_2; \dots; e_k\}$ un ensemble de k éléments différents de E , $k > 2$, formant un cycle dans le graphe de Ullman-Wagon de E : e_1 est lié à e_2 , e_2 est lié à e_3 , ..., et e_k est lié à e_1 . Soit $1 \leq i \leq k$ tel que e_i soit le plus grand entier du cycle. Alors $e_i + e_{i-1}$ est une puissance de 2, et $e_i + e_{i+1}$ également. Or, $e_{i-1} \neq e_{i+1}$, $e_{i-1} < e_i$ et $e_{i+1} < e_i$: cela contredit le résultat intermédiaire n° 1. Il n'existe donc pas de cycle dans le graphe de Ullman-Wagon d'un ensemble E d'entiers positifs tous différents. Par conséquent, un graphe de Ullman-Wagon est soit ce qu'on appelle un arbre (un graphe sans cycle d'un seul tenant) soit ce qu'on appelle une forêt (un graphe sans cycle possédant plusieurs composantes connexes).

Il est facile de montrer qu'un arbre à n sommets possède exactement $n - 1$ arcs, et qu'une forêt de k composantes connexes (k arbres), avec $k \geq 2$, en comporte exactement $n - k$. Cela démontre que $g'(n) \leq n - 1$. Comme on vérifie par ailleurs que pour tout $n \geq 2$, $f(\{1; 3; 7; \dots; 2^n - 1\}) = n - 1$, cela achève de démontrer que $g'(n) = n - 1$.



Graphes de Ullman-Wagon des ensembles $\{-3; -1; 3; 5\}$, $\{-3; -1; 3; 5; 11\}$, $\{1; 7; -3; 5; 3; -1; 13; -9; 11; 17; 15; -13; 21; -5; -7; 9\}$ et $\{-7; 9; -1; 17; 15; -9; 11; 5; 3; 1; 7; -3; -5; 13; -11; 19\}$

Notons que la possibilité d'utiliser des entiers négatifs dans l'ensemble E est essentielle, car c'est ce qui rend le problème intéressant et difficile : si l'on n'acceptait que des entiers positifs dans E , alors la fonction g serait facile à calculer (voir l'encadré 2).

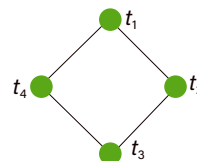
Le problème initial posé par Daniel Ullman et Stan Wagon consiste à démontrer que $g(10) \geq 14$. Il s'agit donc de trouver 10 entiers parmi lesquels on peut identifier 14 paires dont la somme des éléments donne une puissance de 2. Ce cas particulier a été résolu par des lecteurs du journal dans lequel a été soumis le problème en 2021 : Jim Henle, Mark Rickert et Freddy Barrera. Mieux : d'autres lecteurs, Barry

Cox, Chris Hanusa, Joseph DeVincentis, Al Zimmerman, Piotr Zielinski, Jim Tilley, Nagendra Gd, Robert Pratt et Witold Jarnicki, ont réussi à démontrer que $g(10) \geq 15$, en identifiant l'ensemble $\{-5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13\}$, dont on vérifie sans mal qu'on peut en tirer 15 paires d'éléments dont la somme est une puissance de 2. Les amateurs Matthew Bolan et Firas Melaih ont en fait démontré qu'on avait l'égalité $g(10) = 15$, et aussi que $g(11) = 17$. Les méthodes utilisées pour obtenir ces premiers résultats, aussi astucieuses soient-elles, ne se généralisent malheureusement pas. Cependant, elles se basent sur une traduction du problème en questions de théorie des graphes, et nous allons voir que cette méthode est un outil particulièrement puissant pour aborder le cas général.

GRAPHES

Pour aborder notre problème avec des objets dont la vision est immédiate et qui facilitent la recherche, on associe à chaque ensemble fini de nombres entiers E un graphe non orienté (c'est-à-dire un graphe dans lequel il n'y a pas de flèche sur les arcs, et où il y a au plus un arc entre deux sommets), que nous appellerons « graphe de Ullman-Wagon de E ». Ce graphe a pour sommets les éléments de E , et ses arcs relient les paires de nombres dont la somme est une puissance de 2 (voir les figures page 74).

Le mathématicien américain Neil Sloane a présenté le problème général du calcul de g et le principe des graphes de Ullman-Wagon dans une petite vidéo sur YouTube sur la chaîne Numberphile. Le succès de cette vidéo a eu pour effet qu'une propriété fondamentale des graphes de Ullman-Wagon a été découverte par un certain M. S. Smith (dont on ne connaît rien), qui l'a communiquée à Neil Sloane dans un courrier électronique le 6 mars 2022. Le résultat, qui a joué un rôle central dans la suite des recherches sur ce problème, affirme qu'un graphe de Ullman-Wagon ne peut comporter aucun cycle de taille 4. Autrement dit : dans un tel graphe il ne peut jamais y avoir quatre sommets différents t_1, t_2, t_3 et t_4 tels que t_1 est lié à t_2 , t_2 est lié à t_3 , t_3 est lié à t_4 et t_4 est lié à t_1 .



La démonstration de ce résultat est assez simple et astucieuse. Supposons qu'il soit faux, et considérons donc un ensemble de nombres entiers E dont le graphe de Ullman-Wagon contient un cycle de taille 4 : t_1, t_2, t_3, t_4 .

3

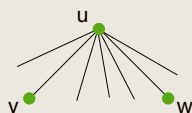
GRAPHES SANS CARRÉ

En 1958, István Reiman propose la belle démonstration suivante, remarquablement astucieuse, qui établit une majoration du nombre d'arcs m d'un graphe de n sommets sans cycle de taille 4 :

$$m \leq (n/4) \times (1 + (4n - 3)^{1/2}).$$

Soit G un graphe comportant m arcs et n sommets notés $s_1, \dots, s_n$. On appelle « degré du sommet s_i », et on note $d(s_i)$, le nombre d'arcs arrivant à ce sommet. Le nombre total d'extrémités des arcs est bien sûr $2m$, mais c'est aussi $\sum_i d(s_i)$. On a donc :

$\sum_i d(s_i) = 2m$.
Supposons que G ne possède aucun cycle de taille 4. Le nombre de structures $(u; \{v; w\})$ de G du type :



est alors $\sum_i d(s_i) \times (d(s_i) - 1) / 2$, car pour tout sommet u il y a $d(u) \times (d(u) - 1) / 2$ façons de choisir une paire de sommets adjacents $\{v; w\}$.

À chacune des $n \times (n - 1) / 2$ paires $\{v; w\}$ possibles de sommet de G correspond au plus un sommet u donnant la structure considérée – car s'il y en avait deux ou plus, cela

donnerait au moins un cycle de taille 4 dans G . Cela signifie donc que $\sum_i d(s_i) \times (d(s_i) - 1) / 2 \leq n \times (n - 1) / 2$, qui équivaut à :

$$\sum_i d(s_i)^2 \leq n \times (n - 1) + \sum_i d(s_i) \quad (*)$$

Une inégalité classique (l'inégalité de Cauchy-Schwarz) assure que pour

tous ensembles de

nombre $(a_1; \dots; a_n)$ et $(b_1; \dots; b_n)$,

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \times (b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

En appliquant ce résultat avec les

ensembles $(d(s_1); \dots; d(s_n))$ et $(1; \dots; 1)$,

on obtient l'inégalité

$$(\sum_i d(s_i))^2 \leq n \sum_i d(s_i)^2.$$

En injectant l'inégalité (*) dans ce

résultat, cela donne :

$$(\sum_i d(s_i))^2 \leq n^2 \times (n - 1) + n \sum_i d(s_i).$$

Comme on a établi plus haut

que $\sum_i d(s_i) = 2m$, on obtient donc

$$4m^2 \leq n^2 \times (n - 1) + 2nm.$$

Autrement dit :

$$m^2 - n/2 \times m - n^2 \times (n - 1) / 4 \leq 0.$$

C'est une inégalité du second degré

en m . Cela permet d'utiliser les

techniques classiques sur le second

degré pour en déduire, finalement,

$$m \leq (n/4) \times (1 + (4n - 3)^{1/2}).$$

Les travaux de C. R. J. Clapham,

A. Flockhart et J. Sheehan permettent

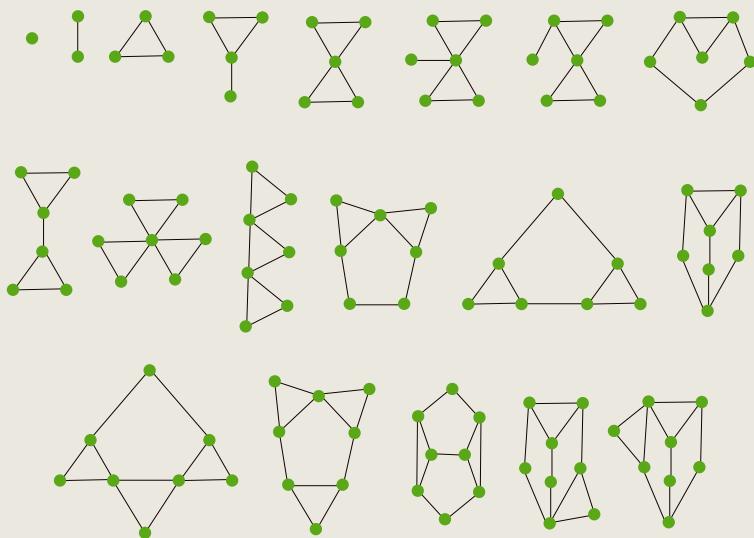
de savoir bien plus précisément

quels sont les graphes connexes sans

cycle de taille 4. La figure ci-dessous

représente une partie de ceux qui ont

8 sommets ou moins.

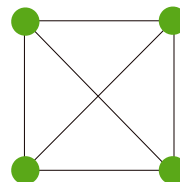


Par définition cela signifie que $b_1 = t_1 + t_2$, $b_2 = t_2 + t_3$, $b_3 = t_3 + t_4$ et $b_4 = t_4 + t_1$ sont des puissances de 2. Le fait que les nombres t_1, t_2, t_3 et t_4 soient différents les uns des autres implique que $b_1 \neq b_4$ (car $b_1 = b_4$ impliquerait que $t_2 = t_4$). De même on démontre facilement que : $b_2 \neq b_1$, $b_3 \neq b_2$ et $b_4 \neq b_3$. On a aussi : $b_1 + b_3 = b_2 + b_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

Supposons, sans perte de généralité, que b_1 est la plus grande des valeurs b_1, b_2, b_3 et b_4 . Alors b_2 et b_4 sont deux puissances de 2 strictement inférieures à b_1 (car inférieures ou égales à b_1 , et qu'on a établi que $b_1 \neq b_2$ et $b_1 \neq b_4$), donc inférieures ou égales à $b_1/2$. Par conséquent, $b_2 + b_4 \leq b_1$. Comme par ailleurs $b_1 + b_3 = b_2 + b_4$, cela implique que $b_3 \leq 0$, ce qui est impossible car b_3 est une puissance de 2.

Un graphe de Ullman-Wagon ne peut donc pas contenir de cycle de taille 4.

Cela permet de démontrer ce dont nous avons parlé plus tôt : dans un ensemble de 4 entiers, on ne peut pas avoir 5 paires d'entiers distinctes, ni même quatre paires d'entiers distinctes, dont les sommes des éléments soient des puissances de 2. En effet, le graphe représentant toutes les paires possibles de nombres dans un ensemble de 4 entiers est le graphe complet à 4 sommets, qui comporte 6 arcs.



Si on conserve tous ces arcs, il y a un cycle de taille 4, ce qui contredit le résultat de M. S. Smith. Donc $g(4) \leq 5$. De même, si l'on enlève un unique arc de ce graphe, on vérifie sans mal qu'il reste toujours un cycle de taille 4. Donc $g(4) \leq 4$. Comme par ailleurs $f(\{-3; -1; 3; 5\}) = 4$, on en déduit que $g(4) = 4$.

ENCADREMENT

Dès lors, les graphes sans cycle de taille 4 (on dit aussi « graphes sans carré ») sont apparus comme un outil de base pour aborder le calcul de $g(n)$. Cela incite à introduire une nouvelle fonction, h , telle que $h(n)$ compte le nombre maximum d'arcs que peut comporter un graphe sans carré à n sommets. Les premières valeurs de cette fonction sont : $h(1) = 0$; $h(2) = 1$; $h(3) = 3$; $h(4) = 4$; $h(5) = 6$; $h(6) = 7$; $h(7) = 9$; $h(8) = 11$; $h(9) = 13$; $h(10) = 16$; $h(11) = 18$; $h(12) = 21$; $h(13) = 24$; $h(14) = 27$; $h(15) = 30$; $h(16) = 33$; $h(17) = 36$; $h(18) = 39$; $h(19) = 42$; $h(20) = 46$; $h(21) = 50$; etc. On connaît les valeurs de h de manière certaine jusqu'à $h(40)$.

Le résultat de Smith signifie que, pour tout entier $n \geq 1$, $g(n) \leq h(n)$. On remarque d'ailleurs

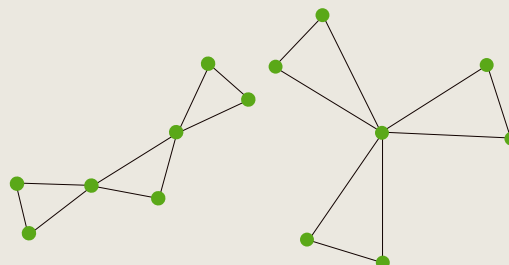
4

SOUS-GRAPHES INTERDITS

Un graphe de Ullman-Wagon ne peut pas contenir de cycle de taille 4. Autrement dit, le graphe carré dessinant un cycle de taille 4 est interdit comme sous-graphe d'un graphe de Ullman-Wagon. Le mathématicien Max Alekseyev a mené une recherche systématique de tous les sous-graphes interdits de tels graphes, et obtenu les résultats suivants.

- Parmi les graphes à 4 sommets, seul le graphe du cycle de taille 4 est interdit comme sous-graphe.
- Il n'existe aucun sous-graphe interdit à 5 ou 6 sommets à part ceux contenant le cycle de taille 4.
- Il existe deux sous-graphes interdits à 7 sommets, en plus de ceux contenant un cycle de taille 4.
- Il n'existe aucun sous-graphe interdit à 8 ou 9 sommets, à part ceux contenant les graphes interdits plus petits déjà identifiés.
- Il existe 15 sous-graphes interdits à 10 sommets et 77 sous-graphes interdits à 11 sommets, toujours en

plus de ceux contenant des graphes interdits plus petits. La connaissance de ces sous-graphes interdits aide à déterminer les formes possibles des graphes de Ullman-Wagon, ce qui accélère la recherche systématique de ces graphes, et permet de calculer davantage de valeurs de la fonction g .



(voir l'encadré 1) que les premières valeurs de g et de h coïncident. Cependant, à partir du dixième terme, les deux suites deviennent différentes.

Une troisième fonction, que nous noterons i , a été introduite pour étudier ce problème: $i(n)$ désigne le nombre maximum de paires d'entiers dont la somme est une puissance de 2, quand on ne pioche ces paires que dans des ensembles de n entiers compris entre $(-n-3)$ et $(n+3)$. Cette fonction a été retenue car il semble que pour calculer $g(n)$, rechercher des paires parmi tous les sous-ensembles possibles d'entiers positifs ou négatifs de n nombres est souvent inutile. Bien sûr, par définition, pour tout entier $n \geq 1$, $g(n) \geq i(n)$. On a donc, pour tout $n \geq 1$, l'encadrement: $i(n) \leq g(n) \leq h(n)$. Étudier h ou i plutôt qu'étudier directement g présente aussi l'avantage que $h(n)$ et $i(n)$ peuvent être calculés grâce à des recherches finies.

Robert Pratt, un spécialiste d'arithmétique et de recherche opérationnelle, a mené un gros calcul utilisant les meilleures méthodes connues pour aborder ce genre de questions (les méthodes «MILP», pour *Mixed integer linear programming*) pour trouver les cent premières valeurs de $i(n)$. Il a ainsi fourni une minoration assez fine de $g(n)$ jusqu'à $n=100$, ainsi que des ensembles candidats pour réaliser la véritable valeur de $g(n)$.

UNE MAJORATION INTÉRESSANTE

Puisque le résultat de M. S. Smith assure que pour tout entier $n \geq 1$, $g(n) \leq h(n)$, toute majoration de $h(n)$ fournit donc aussi une majoration de $g(n)$. Or, les graphes sans carré font l'objet d'études depuis assez longtemps et l'on connaît en particulier la belle majoration: $h(n) \leq (n/4) \times (1 + (4n-3)^{1/2})$. Pour les premières valeurs de n , cela donne: $h(1) \leq 0$; $h(2) \leq 1$; $h(3) \leq 3$; $h(4) \leq 4$; $h(5) \leq 6$; $h(6) \leq 8$;

$h(7) \leq 10$; $h(8) \leq 12$; $h(9) \leq 15$; $h(10) \leq 17$; $h(11) \leq 20$; $h(12) \leq 23$; $h(13) \leq 26$; $h(14) \leq 28$; $h(15) \leq 32$; $h(16) \leq 35$; $h(17) \leq 38$; $h(18) \leq 41$; $h(19) \leq 45$; $h(20) \leq 48$; $h(21) \leq 52$; etc.

On constate que ces majorations sont assez bonnes, et en particulier bien meilleures que celles proposées plus haut avec $n \times (n-1)/2$.

Cette majoration de $h(n)$ a été démontrée par le mathématicien hongrois István Reiman en 1958. Sa preuve (voir l'encadré 3) est si astucieuse qu'elle a été reproduite dans le fameux livre *Raisonnements divins*, de Martin Aigner et Günter Ziegler, qui réunit les démonstrations mathématiques jugées les plus surprenantes et élégantes par les deux auteurs.

Cependant, les progrès les plus importants sur ce problème, qui ont permis de déterminer avec certitude les valeurs de $g(n)$ jusqu'à $n=21$, proviennent d'un article de 2024 du professeur Max Alekseyev, de l'université George-Washington, à Washington, aux États-Unis. Il propose une première série d'énoncés qui généralisent le résultat sur l'impossibilité de trouver un cycle de longueur 4 dans un graphe de Ullman-Wagon. Max Alekseyev a élaboré des algorithmes et mené grâce à eux une série de calculs pour savoir si d'autres formes de sous-graphes étaient interdites dans les graphes de Ullman-Wagon. C'est effectivement le cas, et il a pu identifier tous les sous-graphes interdits possédant 11 sommets ou moins (voir l'encadré 4). Grâce à ces informations, le chercheur a pu calculer les valeurs exactes de $g(n)$ jusqu'à $n=21$ (voir l'encadré 1).

Les encadrements et les quelques valeurs exactes qu'on a réussi à obtenir pour la fonction g ont exigé des trésors d'astuces, de démonstrations et de calculs. Pourtant ces résultats semblent encore assez maigres. La petite énigme a dévoilé des questions mathématiques véritablement difficiles... et peut-être n'est-on encore qu'au début de l'aventure. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Alekseyev, On computing sets of integers with maximum number of pairs summing to powers of 2, *Lecture Notes in Computer Science*, 2024.

N. Sloane et B. Haran, *Problem with Powers of Two – Numberphile*, vidéo YouTube, 2022.

H. A. ShahAli et S. Wagon, 12272, *The American Mathematical Monthly*, 2021.

M. Aigner et G. Ziegler, *Raisonnements divins*, Springer, 2001.

C. R. J. Clapham et al., Graphs without four-cycles, *Journal of Graph Theory*, 1989.

I. Reiman, Über ein Problem von K. Zarankiewicz, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 1958.