

Programme de la khôlle n°8

Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire

VI. Matrices par blocs et sous-espaces stables

VII. Matrices semblables et trace

VIII. Déterminants

Chapitre 4 : Calcul intégral

I. Intégration sur un segment

1. Fonctions en escalier et continues par morceaux

Subdivisions, pas, subdivision régulière, fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Intégrale d'une fonction en escalier. Fonctions continues par morceaux (cpm) sur $[a, b]$. Stabilité par combinaison linéaire et produit. Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier (admis). Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Interprétation géométrique, indépendance par rapport aux valeurs prises par f en les points de subdivision.

2. Propriétés de l'intégrale.

Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance. Valeur moyenne, inégalité de la moyenne. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski.

3. Cas des fonctions continues

Théorème de l'intégrale nulle. Cas d'égalité dans les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski. Sommes de Riemann $S_n(f)$, cas des méthodes des rectangles à gauche/droite/médians, programmation en Python. Si f est continue sur $[a, b]$ alors $(S_n(f))$ converge vers $\int_a^b f$.

II. Primitives d'une fonction continue et EDL1

1. Primitives d'une fonction continue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un segment de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est continue par morceaux [resp. continue] sur I un segment alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue sur I [resp. C^1 sur I et $F'_a = f$].

Définition d'une primitive de f sur I . Toute fonction continue sur un segment I admet une infinité de primitives qui diffèrent entre elles d'une constante. Théorème fondamental de l'intégration. Cas des fonctions C^1 .

2. Calculs de primitives

Primitive liée à la dérivée d'une composée. Formule d'intégration par parties. Formule de changement de variables. Intégrale et parité, intégrale et périodicité.

Savoirs-faire associés

- ☐ Montrer qu'une famille est une base : libre et génératrice (une seule propriété si bon nb de vecteurs), image d'une base par un isomorphisme, déterminant non nul.
- ☐ Savoir étudier une application linéaire : déterminer sa matrice, son noyau et son image (une famille génératrice comme image de la base, la dimension par le th du rang), caractériser un projecteur (par la formule ou la somme directe) et symétrie.
- ☐ Calculer les puissances d'une matrice : par conjecture et récurrence, avec la formule du binôme, à l'aide d'un polynôme annulateur.
- ☐ Calculer un déterminant : par CL, par Dvpt par rapport à une ligne/colonne, par récurrence (SRL2), par blocs, reconnaissance d'un Vandermonde.

Remarque

Cette semaine tout exercice sur le chapitre 3 et plus particulièrement du VI au VIII. Uniquement du cours sur le chapitre 4.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : Déterminant de Vandermonde : $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.
- Preuve 2 : Tout sur l'interpolation de Lagrange : tous les énoncés + 1 preuve au choix de l'examineur.
- Preuve 3 : Si f est continue sur $[a, b]$ alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $F'_a = f$.
- Preuve 4 : Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.
- Exercice 1 : Montrer que dans un ev de dimension finie deux sev de même dimension admettent un supplémentaire commun.

- Exercice 2 : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

- Exercice 3 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que A est inversible.

- Exercice 4 : Le rang de A est le plus grand ordre des matrices inversibles extraites de A .

- Exercice 5 : $A \times \text{com}(A)^\top = \text{com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n$.

- Exercice 6 : Montrer que $T_n = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Expliciter T_n dans le cas $b = c = 1$ et $a = 2 \cos \theta$.

- Exercice 7 : Soient $n \geq 2$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $b \neq c$. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{pmatrix}$. Soit

U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\det(xU + A)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 puis en déduire $\det(A)$.

Prévisions

- Chapitre 4 : Calcul intégral.
- Chapitre 5 : Algèbre bilinéaire.