

Programme de la khôlle n°9

Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire

VI. Matrices par blocs et sous-espaces stables

VII. Matrices semblables et trace

VIII. Déterminants

Chapitre 4 : Calcul intégral

I. Intégration sur un segment

1. Calculs de primitives

2. EDL1

Définition d'une EDL1, équation homogène associée et second membre. Cas d'une équation non normalisée. Structure de l'ensemble des solutions.

Solution générale de l'équation homogène. Recherche d'une solution particulière. Problème de Cauchy.

II. Intégrales généralisées

1. Généralités

Fonction cpm sur un intervalle quelconque. Intégrale impropre en une borne, intégrale convergente/divergente. Intégrales de référence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}, \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}, \int_0^1 \ln t \, dt \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-at} \, dt.$$

Intégrale faussement impropre. Intégrale doublement impropre, généralisation.

2. Propriétés

Linéarité, positivité et croissance, relation de Chasles, théorème de changement de variables, intégrale et parité, intégration par parties.

3. Cas des fonctions positives

Théorème fondamental. Théorèmes de comparaison.

4. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente et fonction intégrable sur I , ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$. La convergence absolue implique la convergence, contre-exemple pour la réciproque : $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, dt$ pour $0 < \alpha \leq 1$. Théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité. Théorème de l'intégrale nulle.

Savoirs-faire associés

- ☐ Calculer un déterminant : par CL, par Dvpt par rapport à une ligne/colonne, par récurrence (SRL2), par blocs, reconnaissance d'un Vandermonde.
- ☐ Connaître les techniques pour calculer une intégrale : décompo en élts simples pour une fraction rationnelle, règle de Bioche pour s'y ramener, faire disparaître les racines en utilisant la trigo, utiliser l'IPP et le changement de variable (C^1 suffit pour une intégrale sur un segment).
- ☐ Sommes de Riemann : savoir l'exprimer connaissant l'intégrale et réciproquement.

Remarque

Cette semaine tout exercice sur le chapitre 3 VI au VIII, cours et exercices sur le chapitre 4 sur les intégrales sur un segment et uniquement du cours sur les intégrales impropres.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : Si f est continue sur $[a, b]$ alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $F'_a = f$.
- Preuve 2 : Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.
- Exercice 1 : Montrer que $T_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Expliciter T_n dans le cas $b = c = 1$ et $a = 2 \cos \theta$.

- Exercice 2 : Soient $n \geq 2$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $b \neq c$. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{pmatrix}$. Soit

U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\det(xU + A)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 puis en déduire $\det(A)$.

- Exercice 3 : CV de $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ pour $\alpha > 0$.
- Exercice 4 : Non CV absolue de $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ pour $0 < \alpha \leq 1$.

Prévisions

- Chapitre 5 : Algèbre bilinéaire.
- Chapitre 6 : Suites de fonctions.