Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Programme de la khôlle n°10

Chapitre 4 : Calcul intégral

I. Intégration sur un segment

II. Intégrales généralisées

Chapitre 5 : Algèbre bilinéaire

I. Espaces préhilbertiens réels

1. **Produit scalaire**
   Définitions de produit scalaire, ev préhilbertien/euclidien, ps usuels dans $\mathbb{R}^n$, $C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **Norme euclidienne**
   Définition, identités remarquables, identité du parallélogramme et de polarisation. Inégalité de Cauchy-Schwarz et triangulaire. Étude des cas d'égalité.
3. **Orthogonalité**
   Définition. Théorème de Pythagore pour deux vecteurs. Famille orthogonale/orthonormale. Si $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, c'est une famille libre. Théorème de Pythagore généralisé. Définitions de l'orthogonalité entre sev. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

II. Espaces vectoriels euclidiens

1. **Existence de bases orthogonales**
   Théorème de la base orthonormale incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire, de la norme et du coefficient général de la matrice d'un endomorphisme dans une b.o.n., écriture matricielle.
2. **Orthogonal d'un sous-espace vectoriel**
   Orthogonal d'une partie d'un ev. $F^\perp$ sev de E, $F^\perp = \mathrm{vect}\,(F)^\perp$, $\{0_E\}^\perp = E$, $F \subset (F^\perp)^\perp$, si F est sev de E, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
   Si E préhilbertien réel et F sev de dimension finie alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.
   Si E est ev euclidien alors $F \oplus F^\perp = E$. Si E ev euclidien alors $(F^{\perp)})^\perp = F, E^\perp = 0_E, (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. **Projection et symétrie orthogonales**
   Définition de la projection orthogonal sur F un sev de dimension finie de E noté p_F. Expression de $p_F(x)$ en b.o.n.
   Théorème de la distance à un sev de dimension finie. Définition de la symétrie orthogonal par rapport à F notée s_F.
4. **Hyperplans vectoriels d'un ev euclidien**
   Théorème de représentation des formes linéaires.
   Tout hyperplan H de E a une équation de la forme $\langle a,x\rangle = 0$ où a est un vecteur normal à H, $H = \mathrm{vect}\,(a)^\perp$.
   Expression de la projection sur une droite et sur un hyperplan.

Savoirs-faire associés

- ☐ Connaître les techniques pour calculer une intégrale : décompo en élts simples pour une fraction rationnelle, règle de Bioche pour s'y ramener, faire disparaitre les racines en utilisant la trigo, utiliser l'IPP et le changement de variable (C^1 suffit pour une intégrale sur un segment).
- ☐ Sommes de Riemann : savoir l'exprimer connaissant l'intégrale et réciproquement.
- ☐ Intégrale dépendant de ses bornes : penser à poser une primitive pour étudier la régularité et calculer la dérivée.

- ☐ Montrer la cv ou dv d'une intégrale : par th de comparaison ($\leqslant$, O, o ou $\sim$) voire par décomposition (DL), par la définition (limite d'une primitive), comme intégrale faussement impropre (prolongement par continuité), par IPP, par th de changement de variable (C^1 + bijectif).

Remarque

> Cette semaine tout exercice sur le chapitre 4 et uniquement du cours sur le chapitre 5.

Preuves et exercices de cours

• Preuve 1 : Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire avec cas d'égalité sur un espace préhilbertien.
• Preuve 2 : Si F sev de dimension finie de E alors F et $F^{\perp}$ sont en somme directe, si E de dimension finie ils sont supplémentaires dans E.
• Preuve 3 : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
• Preuve 4 : Théorème de la distance à un sev de dimension finie.
• Preuve 5 : Théorème de représentation des formes linéaires.
• Exercice 1 : CV de $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.
• Exercice 2 : Non CV absolue de $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ pour $0 < \alpha \leqslant 1$.

Prévisions

• Chapitre 6 : Suites de fonctions.
• Chapitre 7 : Inégrales à paramètres.