Lycée Leconte de Lisle - PSI*

# Programme de la khôlle n°12

## Chapitre 5 : Algèbre bilinéaire

### I. Espaces préhilbertiens réels

### II. Espaces vectoriels euclidiens

## Chapitre 6 : Suites de fonctions

### I. Modes de convergence

### II. Théorèmes d'interversion et régularité de la limite

## Chapitre 7 : Intégrales à paramètre

Définition d'une intégrale à paramètre. Théorème de continuité. Théorème de convergence dominée à paramètre continu. Théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^n$.
Étude de la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ; $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Tableau de variations, graphe.

**Savoirs-faire associés**

- ☐ Produit scalaire : connaître parfaitement les 4 axiomes, l'identité de polarisation, les inégalités et cas d'égalités de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité triangulaire (pour 2 et $n$ vecteurs)
- ☐ Savoir déterminer l'orthogonale d'un sev de dimension finie.
- ☐ Procédé de Gram-Schmidt : connaître parfaitement la formule (celle faisant intervenir la projection orthogonale est plus facile et plus intéressante à retenir) et savoir l'appliquer.
- ☐ Projection orthogonale : savoir calculer son expression suivant les cas (notamment sur une droite et un hyperplan) et connaître toute la méthode pour calculer la distance à un sev de dim finie.

- ☐ Faire la différence entre les différents modes de convergence : CV et CVA d'une suite numérique, CVS et CVU d'une suite de fonctions.
- ☐ CVU d'une suite de fonctions : en trouvant le sup par étude des variations, par majoration uniforme

**Remarque**

> Cette semaine tout exercice sur les chapitres 5 et 6 et uniquement du cours sur le chapitre 7.

## Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : Théorème de continuité pour les suites de fonctions.
- Preuve 2 : Théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ pour les suites de fonctions.
- Preuve 3 : Théorème de continuité pour les intégrales à paramètre.
- Preuve 4 : $\Gamma$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Preuve 5 : $\forall x>0, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \Gamma(n)=(n-1)!$.
- Preuve 6 : $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
- Exercice 1 : Soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. On considère le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux tels que $\forall n\in\mathbb{N}, \deg(P_n)=n$ et $\|P_n\|=1$. Montrer que $P_n$ possède exactement $n$ racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $[a,b]$.

## Prévisions

- Chapitre 8 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.
- Chapitre 9 : Séries de fonctions.