Programme de la khôlle n°13

Chapitre 6 : Suites de fonctions

I. Modes de convergence

II. Théorèmes d'interversion et régularité de la limite

Chapitre 7 : Intégrales à paramètre

Chapitre 8 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I. Éléments propres

1. **Valeurs propres et vecteurs propres**
   Valeur/vecteur propre, spectre pour un endomorphisme puis une matrice carrée. Spectre et ensemble des racines d'un polynôme annulateur de u.
2. **Sous-espaces propres**
   Sous-espace propre $E_\lambda(u)$. $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant \dim(E)$. Différentes caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme. Lien avec la bijectivité. Spectre et sous-espace propre de l'endomorphisme induit sur un sev stable.
   Sous-espace propre $E_\lambda(A)$ pour une matrice carrée A. Deux matrices semblables ont le même spectre. Deux endomorphismes qui commutent laissent stables les sous-espaces de l'un sont stables par l'autre. Transfert des propriétés vues sur les endomorphismes sur les matrices carrées. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme en directe. Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre. Tout endomorphisme de E de dimension n admet au plus n valeurs propres et équivalent matriciel.
   $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \dim(E)$.

II. Polynôme caractéristique

1. **Généralités**
   Définition. $\chi_u(X) = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$. Cas $n = 2$.
   Les valeurs propres d'un endomorphisme u en dimension finie [resp. d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$] sont les racines de son polynôme caractéristique.
   Recherche pratique des éléments propres en dimension finie, exemple. Cas particulier des matrices triangulaires. Existence de valeur propre sur $\mathbb{C}$.
   Si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$ et $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$, $\chi_A = \chi_{A^\top}$ et $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.
   Si $\tilde{u}$ est l'induit de u sur un sev stable alors $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u.

2. **Multiplicité d'une valeur propre**

   Définition de la multiplicité m_λ d'une valeur propre λ. $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$. Si λ est une valeur propre simple de u alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

   Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ alors u admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité et $\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

III. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1. **Endomorphisme et matrices diagonalisables**

   Endomorphisme/matrice diagonalisable. Toute matrice qui admet une unique valeur propre est diagonalisable ssi elle est scalaire. u est diagonalisable ssi $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable.

2. **CNS et CS de diagonalisation**

   CNS de diagonalisation : Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ssi $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ ssi $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$ ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

   CS de diagonalisation : Si $\dim E = n$ et u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable. Cas particulier d'une matrice symétrique réelle.

Savoirs-faire associés

- ☐ Faire la différence entre les différents modes de convergence : CV et CVA d'une suite numérique, CVS et CVU d'une suite de fonctions.
- ☐ CVU d'une suite de fonctions : en trouvant le sup par étude des variations, par majoration uniforme
- ☐ Connaître les techniques pour calculer une intégrale : décompo en élts simples pour une fraction rationnelle, règle de Bioche pour s'y ramener, faire disparaitre les racines en utilisant la trigo, utiliser l'IPP et le changement de variable (C^1 suffit pour une intégrale sur un segment), utiliser la dérivée pour une intégrale à paramètre (des fois plus facile à calculer puis l'intégrer ou équat diff à résoudre).
- ☐ Calculer la limite en un point a d'une intégrale à paramètre : par th de continuité, par encadrement, par th de CVD à paramètre continu.
- ☐ Trouver un équivalent d'une intégrale à paramètre en a : en se ramenant à un calcul de limite, par IPP.

Remarque

> Cette semaine tout exercice sur les chapitres 6 et 7 et uniquement du cours sur le chapitre 8.

Preuves et exercices de cours

• Preuve 1 : Théorème de continuité pour les intégrales à paramètre.
• Preuve 2 : Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
• Preuve 3 : $\forall x>0, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \Gamma(n)=(n-1)!$.
• Preuve 4 : Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
• Preuve 5 : Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme en directe.
• Preuve 6 : $\chi_u(X)=X^n-\mathrm{tr}\,(u)X^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det(u)$.
• Preuve 7 : CNS de diagonalisation : $E=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda(u)$ ssi $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}\dim E_\lambda(u)=\dim(E)$ ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u), \dim E_\lambda(u)=m_\lambda$.

Prévisions

• Chapitre 8 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (Polynômes d'endom et DZ, trigonalisation, applications).
• Chapitre 9 : Séries de fonctions.