Lycée Leconte de Lisle - PSI*

Programme de la khôlle n°14

Chapitre 7 : Intégrales à paramètre

Chapitre 8 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I. Éléments propres

II. Polynôme caractéristique

III. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1. **Endomorphisme et matrices diagonalisables**
2. **CNS et CS de diagonalisation**
3. **Polynômes annulateurs**
   Si P est un polynôme annulateur de u alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P. Théorème de Cayley-Hamilton. CNS de diagonalisation : u est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. u est diagonalisable ssi $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u. L'endomorphisme induit sur un sev stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Caractérisation des sev stables par un endomorphisme diagonalisable.
   Si deux endomorphismes commutent et sont diagonalisables, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre. Exercice classique : Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes qui commutent et sont diagonalisables.
4. **Pratique et application de la réduction**
   Exposé de la méthode.

IV. Trigonalisation

Définition d'un endomorphisme [resp. une matrice] trigonalisable. CNS de trigonalisation : Un endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Trace et déterminant d'un endomorphsime trigonalisable.

V. Applications de la réduction

1. **Calcul des puissances d'une matrice carrée**
   Si $A = PDP^{-1}$ alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A^m = PD^mP^{-1}$ avec $D^m = \mathrm{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$.

2. **Systèmes différentielles linéaires à coefficients constants**
   Définition.
   (a) **Cas où A est diagonalisable**
   Méthode de résolution : on fait le changement de bases pour aboutir à $X' = AX + B \Longleftrightarrow Y' = DY + P^{-1}B$ où $A = PDP^{-1}$ et $Y = P^{-1}X$

(b) **Cas où A est trigonalisable**
Méthode de résolution : on fait le changement de bases pour aboutir à $X' = AX + B \Longleftrightarrow Y' = TY + P^{-1}B$ où $A = PTP^{-1}$ et $Y = P^{-1}X$

3. **Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre $p \geqslant 3$ [HP]**
Définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre p. Méthode de résolution sous forme matricielle.

Chapitre 9 : Séries de fonctions

I. Modes de convergence

Série de fonctions, convergence simple. Lien avec la suite des restes. Un exemple fondamental : La série géométrique.
Convergence uniforme. Lien avec la suite des restes. $\sum f_n$ CVU sur I alors (f_n) CVU vers $\tilde{0}$ sur I.
Convergence normale. Lien entre les 3 modes de convergence. $\sum f_n$ CVN sur I ssi il existe une suite de réels positifs (α_n) telle que $\|f_n\|_{\infty,I} \leqslant \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ CV.

II. Théorèmes d'interversion et régularité de la somme

Théorèmes de continuité, d'intégration sur un segment, de dérivation $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^k$, de la double limite.
Etude complète de la fonction ζ.
Théorème d'intégration terme à terme (Intégrabilité).

Savoirs-faire associés

- ☐ Connaître les techniques pour calculer une intégrale : décompo en élts simples pour une fraction rationnelle, règle de Bioche pour s'y ramener, faire disparaitre les racines en utilisant la trigo, utiliser l'IPP et le changement de variable (C^1 suffit pour une intégrale sur un segment), utiliser la dérivée pour une intégrale à paramètre (des fois plus facile à calculer puis l'intégrer ou équat diff à résoudre).
- ☐ Calculer la limite en un point a d'une intégrale à paramètre : par th de continuité, par encadrement, par th de CVD à paramètre continu.
- ☐ Trouver un équivalent d'une intégrale à paramètre en a : en se ramenant à un calcul de limite, par IPP.

- ☐ Lien entre spectre et racine d'un polynôme annulateur, spectre et inversibilité.
- ☐ Déterminer le spectre : résoudre l'équation $u(x) = \lambda x$, utiliser le polynôme caractéristique, un polynôme annulateur, la trace et le déterminant, trouver un vecteur propre évident, trouver un λ tel que $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) < n$.
- ☐ Montrer qu'une matrice est DZ : symétrique réelle ? Déterminer les éléments propres, utiliser un polynôme annulateur,
- ☐ Maîtriser le th spectral : valeurs propres réelles, sous-espaces propres en somme directe orthogonale,
- ☐ Applications de la DZ ou TZ : Calcul des puissances d'une matrice, système différentiel et SRL.

Remarque

> Cette semaine tout exercice sur les chapitres 7 et 8 et uniquement du cours sur le chapitre 9.

Preuves et exercices de cours

- Preuve 1 : Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme en directe.
- Preuve 2 : $\chi_u(X) = X^n - \operatorname{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
- Preuve 3 : CNS de diagonalisation : $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ ssi $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$ ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.
- Preuve 4 : Si P est un polynôme annulateur de u alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.
- Preuve 5 : Théorème de Cayley-Hamilton (Uniquement pour les volontaires).
- Preuve 6 : u est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (Uniquement pour les volontaires).
- Preuve 7 : ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}$.
- Preuve 8 : $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$ et $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.
- Exercice 1 : Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes qui commutent et sont diagonalisables.

Prévisions

- Chapitre 10 : Topologie.
- Chapitre 11 : Séries entières.