

CONCOURS COMMUNS INP 2019

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Corrigé

Problème 1

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

Q1. Il s'agit de justifier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)} dt$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. L'application $t \mapsto e^{-t(1-ix)}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, en tant que composition de l'application polynomiale $t \mapsto -t(1-ix)$, continue sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$, et de l'application exponentielle, continue sur $\mathbf{C}$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence infini. Elle est donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbf{R}_+$, et le problème d'intégrabilité ne se pose qu'au voisinage de $+\infty$.

Pour tout nombre réel t on a : $|t^2 e^{-t(1-ix)}| = t^2 e^{-t}$ et donc, par croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 |e^{-t(1-ix)}| = 0.$$

On en déduit : $|e^{-t(1-ix)}| = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. Or la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc par comparaison on en déduit que l'application $t \mapsto e^{-t(1-ix)}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)} dt$ converge absolument, donc converge, et on en déduit que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Q2. Soit $p \in \mathbf{N}$. L'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$: le seul problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$. La fonction étant positive, on peut procéder par relation de comparaison. Or on a, d'après le théorème des croissances comparées : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot t^p e^{-t} = 0$. On en déduit :

$$t^p e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

La fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc l'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

On en déduit que l'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

Donnons à présent une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p : passer de t^{p+1} à t^p dans l'intégrande se fait en intégrant par parties. Soit, donc, a un réel positif ; l'application $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, a]$ et l'application $t \mapsto t^{p+1}$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\int_0^a t^{p+1} e^{-t} dt = \left[-t^{p+1} e^{-t} \right]_0^a - \int_0^a (-e^{-t})(p+1)t^p dt = -a^{p+1} e^{-a} + (p+1) \int_0^a e^{-t} t^p dt.$$

Or : $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^{p+1} e^{-a} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On en déduit, quand $a \rightarrow +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} t^{p+1} e^{-t} dt = (p+1) \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt,$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p.$$

Q3. On a immédiatement : $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^{+\infty} = 1$. Voyons comment, par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$, on en déduit l'égalité : $\Gamma_p = p!$. Si $p = 0$, cela vient d'être établi, vu que $0! = 1$ et $\Gamma_0 = 1$. Soit $p \in \mathbf{N}$, et supposons que $\Gamma_p = p!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p = (p+1)p! = (p+1)!,$$

donc l'égalité voulue est héréditaire. Nous l'avons initialisée, donc par principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \Gamma_p = p!.$$

Q4. Nous allons montrer que f est de classe C^p pour tout $p \in \mathbf{N}$, à l'aide du théorème de régularité C^p des intégrales à paramètre. Posons :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad g(x, t) = e^{-t(1-itx)} = e^{-t} e^{it^2 x}.$$

Alors :

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^p sur $\mathbf{R}$, puisqu'elle s'obtient en composant une application polynomiale et l'exponentielle complexe, et on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{d^p g}{dx^p}(x, t) = (it^2)^p e^{-t} e^{it^2 x};$$

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $t \mapsto \frac{d^p g}{dx^p}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ par un argument analogue à celui ci-dessus ;

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, on a :

$$\left| \frac{d^p g}{dx^p}(x, t) \right| = t^{2p} e^{-t};$$

et l'application $t \mapsto t^{2p} e^{-t} dt$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ d'après la question **Q2**, ce qui démontre à la fois, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{d^p g}{dx^p}(x, t)$ sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, et l'hypothèse de domination.

On en déduit, d'après le théorème de régularité C^p des intégrales à paramètre, que f est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d^p g}{dx^p}(x, t) dt = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t(1-ix)} dt.$$

Q5. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!} \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t} dt = \frac{i^p}{p!} \Gamma_{2p} = i^p \frac{(2p)!}{p!}.$$

Ce terme n'est jamais nul et on a, pour tout x non nul et p au voisinage de l'infini :

$$\frac{\left| \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} x^{p+1} \right|}{\left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \right|} = \frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \times \frac{p!}{(2p)!} |x| = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1} |x| \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 4p|x| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ non nul la série $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ diverge grossièrement d'après la règle de

D'Alembert. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est nul.

Si f est développable en série entière en 0, alors f est égale à sa série de Taylor dans un voisinage de 0 ; or sa série de Taylor diverge en tout réel non nul d'après ce qui précède, donc c'est impossible. On en déduit que f n'est pas développable en série entière en 0.

Q6. Nous allons vérifier que g est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$ grâce au théorème de dérivation terme à terme, démontrant au passage l'existence de la somme qui définit g . Posons :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k(x) = e^{-k(1-ikx)}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application g_k est manifestement de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$: à multiplication près par la constante e^{-k} , elle s'obtient en composant l'application polynomiale $x \mapsto k^2 x$, de classe C^∞

sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, avec l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{ix}$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ parce que sa partie réelle (le cosinus) et sa partie imaginaire (le sinus) le sont. On a de plus :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2 x},$$

avec la convention ici que pour $p = k = 0$, on a : $k^{2p} = 1$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, étudions le mode de convergence de la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} g_k$: pour tout $p \in \mathbf{N}$, tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$. On en déduit :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, \quad \|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}.$$

Montrons que pour tout $p \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{k \geq 0} \|g_k^{(p)}\|_\infty = \sum_{k \geq 0} k^{2p} e^{-k}$ converge : elle est à termes positifs, et on montre comme aux questions **Q1** et **Q2** que $k^{2p} e^{-k} = o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right)$, grâce au théorème des croissances comparées. Or la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} k^{2p} e^{-k}$ converge pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}$ la série $\sum_{k \geq 0} g_k^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément (et simplement)

sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, on en déduit que $g = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k$ est de classe C^p pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞ , et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{N}, \quad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}.$$

Q7. Soit $p \in \mathbf{N}$. D'après la question précédente :

$$|g^{(p)}(0)| = \left| i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = |i|^p \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right|.$$

Or $|i| = 1$, et la somme est positive, donc :

$$|g^{(p)}(0)| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} = p^{2p} e^{-p} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} k^{2p} e^{-k}}_{\geq 0} \geq p^{2p} e^{-p},$$

d'où le résultat.

Q8. Montrons que la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$ est de rayon de convergence nul. Pour tout réel x non nul, et pour tout p au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\left| \frac{(p+1)^{2(p+1)} e^{-(p+1)}}{(p+1)!} x^{p+1} \right|}{\left| \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p \right|} = \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{2p} (p+1) e^{-1} |x| \geq p e^{-1} |x| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ non nul : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(p+1)^{2(p+1)} e^{-(p+1)}}{(p+1)!} x^{p+1} \right|}{\left| \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p \right|} = +\infty$. D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$ diverge donc grossièrement pour tout x non nul, donc la série entière

$\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$ est de rayon de convergence nul.

Or : $\forall p \in \mathbf{N}$, $\left| \frac{g^{(p)}(0)}{p!} \right| \geq \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!}$. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries entières, le

rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est inférieur ou égal à 0, donc est nul.

Par le même argument que dans la question **Q5**, on en déduit que g n'est pas développable en série entière en 0.

Partie II – Le théorème de Borel

Q9. On a : $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$. La décomposition en éléments simples assure l'existence de deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{C}$ différent de i et $-i$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Pour les déterminer, notons que si l'on multiplie cette égalité par $x - i$, et qu'on pose $x = i$, on obtient :

$$\frac{1}{2i} = a,$$

et de même, en multipliant cette égalité par $x + i$ et en posant $x = -i$, on obtient $b = -\frac{1}{2i}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

Q10. Tout d'abord, ψ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, en tant qu'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. On doit montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Pour cela, notons qu'il s'agit d'une évidence si $p = 0$, par définition de ψ . À présent, soit $p \in \mathbf{N}$, et supposons que cette égalité soit vraie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Alors, en la dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi^{(p+1)}(x) = (\psi^{(p)})'(x) = (-1)^p p! \times \left(-\frac{p+1}{(x-i)^{p+2}} \right) = (-1)^{p+1} (p+1)! \times \frac{1}{(x-i)^{p+1+1}},$$

d'où l'hérédité de cette l'égalité. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ par principe de récurrence.

Q11. Un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet de montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p -ième de $x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est $x \mapsto \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$. Or, d'après la question **Q9**, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}.$$

Q12. Soient $p \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. Alors :

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| = |2i \operatorname{Im}((x+i)^{p+1})| \leq 2 |(x+i)^{p+1}| = 2|x+i|^{p+1} = 2(\sqrt{x^2+1})^{p+1},$$

d'où le résultat demandé en écrivant : $(\sqrt{x^2+1})^{p+1} = (x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}$.

En utilisant l'expression de $\varphi^{(p)}(x)$ trouvée dans la question précédente, on en déduit :

$$|\varphi_1^{(p)}(x)| = \frac{p!}{2} \times \frac{|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}|}{(x^2+1)^{p+1}} = p! \times \frac{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}},$$

et si x est non nul on peut même écrire :

$$\frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leq \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Finalement :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^*, \quad |\varphi_1^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Notons d'abord que si $\alpha = 0$, alors l'inégalité demandée est une évidence. Nous mettons donc ce cas de côté plus bas.

Pour tout réel α et tout réel x , on a : $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$. Ainsi φ_α n'est rien d'autre que la composition de la fonction $x \mapsto \alpha x$ et de φ_1 , ce qui permet d'écrire par une récurrence facile :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}^*, \quad \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| = \left| \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x) \right|, \quad (1)$$

et donc, d'après la question précédente (où l'on remplace x par αx), pour tous réels α et x non nuls on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad |\alpha| \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq |\alpha|^{p+1} \times \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}},$$

d'où le résultat.

Q14. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $u_n(x) = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$. Or $f_n : x \mapsto a_n x^n$ et φ_{α_n} sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. D'après la formule de dérivation de Leibniz, l'application u_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad u_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x), \end{aligned} \quad (2)$$

d'où le résultat.

Q15. Soient $n \geq 0$ un entier et $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors $x \mapsto x^{n-k}$ s'annule en 0 pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ (sous cette hypothèse, on a : $n-k \geq n-p \geq 1$). Donc, d'après la question précédente, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$. À présent, si l'on prend $p = n$ dans (2), on constate que le terme de la somme correspondant à $k = p = n$ est $n! \varphi_{\alpha_n}(x)$: il est égal à $n!$ quand $x = 0$. Tous les autres termes de cette somme s'annulent en 0 pour la même raison que ci-dessus. Donc :

$$u_n^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Q16. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x \in \mathbf{R}$. Si $x = 0$, alors ce cas fut déjà traité dans la question **Q15**, et on a bien $|u_n^{(p)}(0)| = 0 \leq \frac{|0|^{n-p-1}}{\sqrt{n}} p! 2^n$. Supposons donc $x \neq 0$. D'après (2) et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |a_n| \cdot \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right|.$$

D'après la question **Q13**, pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ on a :

$$|a_n| \cdot \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| = \frac{1}{\sqrt{n!}} |\alpha_n| \cdot \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}},$$

et on en déduit :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (p-k)! = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

car $n \geq p$ et nous sommes des termes positifs. Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

donc nous avons démontré :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n,$$

et c'est le résultat attendu.

Q17. Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de dérivation terme à terme sur tout segment de $\mathbf{R}$, dans le cas des applications de classe C^p .

Soit $a \in \mathbf{R}$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall n \geq p+1, \forall x \in [-a, a], \quad |u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \leq \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}},$$

donc, si l'on considère la norme infinie sur $[-a, a]$:

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall n \geq p+1, \quad 0 \leq \|u_n^{(p)}\|_{\infty} \leq \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3)$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, montrons que la série $\sum_{n \geq p+1} \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$ converge. C'est une série à termes positifs, et pour tout $p \in \mathbf{N}$, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\frac{p! 2^{n+1} |a|^{n-p}}{((n+1)!)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1,$$

donc la série $\sum_{n \geq p+1} \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$ converge d'après la règle de D'Alembert. On en déduit, d'après

(3) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série de fonctions $\sum_{n \geq p+1} u_n^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément (et simplement), sur tout segment de la forme $[-a, a]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, vérifié sur tout segment de $\mathbf{R}$ (on peut en effet inclure tout segment de $\mathbf{R}$ dans un segment de la forme $[-a, a]$), on en déduit que la somme

$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Il en est donc de même de $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on ajoute une somme finie de fonctions de classe C^∞), et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Q18. On a : $U(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$. Il est évident, d'après la définition de u_n , que $u_n(0) = a_n$ si $n = 0$ et $u_n(0) = 0$ si $n \geq 1$. Donc $U(0) = a_0$.

Soit $p \geq 1$ un entier. Alors :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0),$$

et d'après la question **Q15** on a $u_n^{(p)}(0) = 0$ dès que $p \leq n - 1$ (c'est-à-dire $n \geq p + 1$) et $u_p^{(p)}(0) = p!a_p$, donc :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^p u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p,$$

d'où le résultat.

Q19. Soit $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles. Inspirés par la question précédente, on cherche une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_0 & = & a_0, \\ b_1 & = & u'_0(0) + 1!a_1, \\ b_2 & = & u''_0(0) + u'_1(0) + 2!a_2, \\ & \vdots & \\ \forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, b_p & = & \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p. \end{array} \right.$$

Pour cela, on note qu'on peut construire une telle suite par récurrence ainsi, en posant successivement :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & b_0, \\ \alpha_0 & = & a_0, \\ \forall x \in \mathbf{R}, u_0(x) & = & a_0 \varphi_{\alpha_0}(x), \end{array} \right. \text{ puis : } \forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \left\{ \begin{array}{lcl} a_p & = & \frac{1}{p!} \left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right), \\ \alpha_p & = & \sqrt{p!} a_p, \\ \forall x \in \mathbf{R}, u_p(x) & = & a_p x^p \varphi_{\alpha_p}(x). \end{array} \right.$$

Il s'agit bien d'une construction par récurrence licite (la définition de a_p n'utilise que b_p et des fonctions déjà définies pour des rangs strictement inférieurs à p). Alors, d'après les questions **Q17**

et **Q18**, l'application $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) = b_p,$$

ce qui démontre bien l'existence d'une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Problème 2

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

Q20. Puisque x est un vecteur propre de $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ associé à la valeur propre λ , on a : $\lambda x = Ax$. Comparer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i -ième ligne de chaque membre de cette égalité matricielle donne bien :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j. \quad (4)$$

Q21. On reprend l'égalité de la question précédente avec $i = i_0$. On obtient, d'après l'inégalité triangulaire et le fait que $|x_j| \leq |x_{i_0}|$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$|\lambda| \cdot |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| \cdot |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|,$$

or $|x_{i_0}| > 0$ (sinon, toutes les coordonnées du vecteur x étant inférieures ou égales à x_{i_0} en valeur absolue, on aurait : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$, ce qui est impossible puisqu'un vecteur propre est non nul), donc en divisant par $|x_{i_0}|$ on obtient :

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$

On a bien sûr $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$, donc :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

- Q22.** La matrice $A_n(\alpha, \beta)$ est symétrique et à coefficients réels, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et ses valeurs propres sont donc réelles.
- Q23.** D'après la question **Q21** on a, en inspectant la somme des coefficients de chaque ligne de $A_n(\alpha, \beta)$ (attention à la première et à la dernière) :

$$|\lambda| \leq \max \{|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + 2|\beta|, |\beta| + |\alpha|\}.$$

On a évidemment $|\beta| \leq 2|\beta|$ car $|\beta| \geq 0$, donc :

$$\lambda \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$.

- Q24.** Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la question **Q23** montre que toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$ vérifie : $|\lambda| \leq 2$, c'est-à-dire : $\frac{\lambda}{2} \in [-1, 1]$. Or la fonction cosinus est surjective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, donc pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$ il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.
- Q25.** Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour calculer $\chi_{A_n}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n(0, 1))$, on développe par rapport à la dernière colonne ou ligne ce déterminant et on obtient :

$$\chi_{A_n(0,1)}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne : il égale $-\chi_{A_{n-2}(0,1)}(\lambda)$. Ceci vaut pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et on en déduit :

$$\chi_{A_n(0,1)} = X \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)} - \chi_{A_{n-2}(0,1)}.$$

En composant avec $2X$ cette relation, on obtient :

$$\forall n \geq 3, \quad U_n = 2X \cdot U_{n-1} - U_{n-2}.$$

- Q26.** Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \quad (5)$$

Pour $n = 1$, on a : $A_1(0, 1) = (0)$, donc $\chi_{A_1} = X$, et : $U_1 = 2X$. On en déduit : $\forall \theta \in]0, \pi[, U_1(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)$. Or :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 2 \cos(\theta),$$

d'où la proposition au rang $n = 1$.

À présent, soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, et supposons que (5) est vérifiée pour tout rang strictement inférieur à n . Alors, d'après la question précédente, pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on a :

$$U_n(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) U_{n-1}(\cos(\theta)) - U_{n-2}(\cos(\theta)),$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \cos(\theta) \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Or, d'après nos formules de trigonométrie préférées, nous avons pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2 \sin(n\theta) \cos(\theta),$$

donc :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

d'où la proposition au rang n .

Ayant l'initialisation et l'hérédité, par récurrence forte sur n nous avons démontré :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Les valeurs propres de $A_n(0, 1)$ sont exactement les racines de son polynôme caractéristique. Or, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a :

$$\chi_{A_n(0,1)}(2 \cos(\theta)) = U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Voyons à quelle condition sur θ cette quantité s'annule. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors :

$$U_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \exists j \in \mathbf{Z}, (n+1)\theta = j\pi \iff \exists j \in \mathbf{Z}, \theta = \frac{j\pi}{n+1}.$$

On en déduit que χ_{A_n} admet pour racines tous les réels de l'ensemble :

$$\left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

Notons que cet ensemble contient n éléments : en effet, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\frac{j\pi}{n+1} \in [0, \pi]$, et le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, donc il y est injectif. Ceci prouve que les $2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right)$, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont distincts.

Ainsi nous avons là n racines de χ_{A_n} ; or χ_{A_n} est de degré n , en tant que polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre n : il s'agit donc de l'intégralité des racines de χ_{A_n} . On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est $\left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$.

Puisque $A_n(0, 1)$ admet n valeurs propres distinctes, elles sont toutes simples, et on en déduit que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Q28. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$. On reprend l'égalité (4), en prenant soin de distinguer la première ligne (qui donne : $2 \cos(\theta_j)x_1 = x_2$), la dernière ligne (qui donne : $2 \cos(\theta_j)x_n = x_{n-1}$) et les lignes intermédiaires (qui nous donnent : $\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, 2 \cos(\theta_j)x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$). D'où :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0, \\ \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j)x_n = 0. \end{cases}$$

Q29. Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de E . L'équation caractéristique de sa relation de récurrence linéaire est : $r^2 - 2 \cos(\theta_j)r + 1 = 0$, qui est de discriminant :

$$4 (\cos(\theta_j))^2 - 4 = -4 (\sin(\theta_j))^2 < 0$$

car $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$. On en déduit que les racines de l'équation sont complexes, égales à :

$$\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j) = e^{i\theta_j}, \text{ et } \cos(\theta_j) - i \sin(\theta_j) = e^{-i\theta_j},$$

donc la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 nous dit que $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ appartient à E si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_k = \alpha \cos(k\theta_j) + \beta \sin(k\theta_j).$$

En particulier, $E = \text{Vect}_{\mathbf{R}} \{(\cos(k\theta_j))_{k \in \mathbf{N}}, (\sin(k\theta_j))_{k \in \mathbf{N}}\}$, et c'est un espace vectoriel de dimension 2.

Q30. Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E$ une suite telle que $u_0 = u_{n+1} = 0$. D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_k = \alpha \cos(k\theta_j) + \beta \sin(k\theta_j).$$

L'hypothèse $u_0 = 0$ implique $\alpha = 0$, tandis que $u_{n+1} = 0$ équivaut à : $\beta \sin((n+1)\theta_j) = 0$. Or $\sin((n+1)\theta_j) = 0$ d'après la résolution de la question **Q27**, donc $u_{n+1} = 0$ si et seulement si $0 = 0$: c'est toujours vérifié.

On en déduit que l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ est :

$$\{(\beta \sin(k\theta_j))_{k \in \mathbf{N}} \mid \beta \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}_{\mathbf{R}} \{(\sin(k\theta_j))_{k \in \mathbf{N}}\}.$$

Q31. D'après la question **Q28**, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}$ est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0, \\ \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j)x_n = 0. \end{cases}$$

c'est-à-dire, si l'on pose : $x_0 = x_{n+1} = 0$, si et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) x_k + x_{k+1} = 0.$$

Donc x est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$ si et seulement si ses coordonnées sont les premiers termes d'une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de E vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. Nous avons déterminé l'ensemble de ces suites dans la question précédente : on en déduit que l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$ est :

$$\text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ (\sin(k\theta_j))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right\}.$$

Q32. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Si $\beta = 0$, alors $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n$. Son unique valeur propre est α , et l'espace propre associé est $M_{n,1}(\mathbf{R})$. Supposons donc $\beta \neq 0$ à présent. On a :

$$A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0, 1).$$

On en déduit, après de menus calculs, que $x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}$ est un vecteur propre de $A_n(\alpha, \beta)$ associé à $\lambda \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$A_n(0, 1)x = \frac{\lambda - \alpha}{\beta} x,$$

si et seulement si x est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à $\frac{\lambda - \alpha}{\beta}$. Or nous avons démontré dans la question **Q27** que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est $\left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. Donc λ est une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$ si et seulement s'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\frac{\lambda - \alpha}{\beta} = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

L'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ est donc :

$$\left\{ \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

La question **Q31**, et la réflexion ci-dessus, montre alors que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le sous-espace propre de $A_n(\alpha, \beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$ est :

$$\text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ (\sin(k\theta_j))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right\}.$$

Partie II – Système différentiel

II.1 – Matrices par blocs

Q33. On a immédiatement : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix}$. Par hypothèse C et D commutent, donc $CD - DC = 0_n$, et on a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \quad (6)$$

Q34. Nous savons que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux, donc : $\det \left(\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} \right) = \det(D) \det(I_n) = \det(D)$. De même : $\det \left(\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC) \det(D)$. Prendre le déterminant dans l'égalité (6) donne donc :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) \det(D) = \det(AD - BC) \det(D),$$

et si D est inversible, alors $\det(D) \neq 0$ et on peut diviser cette relation par $\det(D)$ pour obtenir :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC). \quad (7)$$

Q35. Le polynôme caractéristique de $-D$ est non nul, donc admet un nombre fini de racines réelles non nulles. Notons λ_0 la plus petite d'entre elles en valeur absolue, et soit $p_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ un entier quelconque tel que $\frac{1}{p_0} < |\lambda_0|$ (il en existe, vu que : $\lim_{p_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_0} = 0$). Alors pour tout $p \geq p_0$, on a $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_0} < |\lambda_0|$, donc $\frac{1}{p}$ ne peut pas être une racine de χ_{-D} , et : $\chi_{-D} \left(\frac{1}{p} \right) \neq 0$. Ceci équivaut précisément à : $\det \left(D + \frac{1}{p} I_n \right) \neq 0$, et donc à l'inversibilité de la matrice $D + \frac{1}{p} I_n$. On a donc bien montré que pour tout $p \geq p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p} I_n$ est inversible.

Q36. Soit $p_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ un entier tel que pour tout $p \geq p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p} I_n$ soit inversible. Si D et C commutent, alors il est immédiat qu'il en est de même de $D + \frac{1}{p} I_n$ et C , donc d'après (7) on a :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p} I_n \end{pmatrix} \right) = \det \left(A \left(D + \frac{1}{p} I_n \right) - BC \right). \quad (8)$$

Or :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ et : } \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(A \left(D + \frac{1}{p}I_n \right) - BC \right) = AD - BC$$

(c'est une évidence qui peut par exemple se démontrer coefficient par coefficient), et le déterminant est continu du fait de sa multi-linéarité sur un espace vectoriel de dimension finie, donc est séquentiellement continu, et on en déduit :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right), \text{ et :}$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \det \left(A \left(D + \frac{1}{p}I_n \right) - BC \right) = \det(AD - BC).$$

Donc, quand $p \rightarrow +\infty$, l'identité (8) et l'unicité de la limite impliquent :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC),$$

d'où le résultat même si D n'est pas inversible.

Q37. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a :

$$\chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - N) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ -M & \lambda I_n \end{pmatrix} \right),$$

et les matrices $-M$ et λI_n commutent. Donc, d'après les questions précédentes :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_n \cdot \lambda I_n - (-I_n) \cdot (-M)) = \det(\lambda^2 I_n - M) = \chi_M(\lambda^2).$$

On en déduit que $\mu \in \mathbf{C}$ est une racine de χ_N si et seulement si μ^2 est une racine de χ_M , donc :

$$\text{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C}; \mu^2 \in \text{Sp}(M)\}.$$

Q38. Si x est un vecteur propre de M associé à μ^2 , en particulier il est non nul, donc $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ est également non nul. De plus :

$$N \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de N associé à la valeur propre μ .

Q39. Si M est inversible, alors 0 n'est pas valeur propre de M , et donc n'est pas valeur propre de N d'après la question **Q37** : on en déduit que sous cette hypothèse, N est également inversible. Si M est de plus diagonalisable, alors d'après le critère de diagonalisation, on a :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(\ker(M - \lambda I_n)) = n. \quad (9)$$

De plus, d'après la question **Q37**, si λ est une valeur propre de M alors ses deux racines carrées μ_λ et $-\mu_\lambda$ sont des valeurs propres de N (il existe bien deux racines carrées car $\lambda \neq 0$: par hypothèse M est inversible). La question **Q38** assure de plus que les applications linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \ker(M - \lambda I_n) & \rightarrow & \ker(N - \mu_\lambda I_{2n}) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ \mu_\lambda x \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} \ker(M - \lambda I_n) & \rightarrow & \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -\mu_\lambda x \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

sont bien définies, et elles sont clairement injectives : si $\begin{pmatrix} x \\ \pm \mu_\lambda x \end{pmatrix} = 0_{2n}$ alors en particulier $x = 0_n$, donc leurs noyaux sont réduits au vecteur nul. Ceci démontre que pour toute valeur propre λ de M , on a :

$$\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) \geq \dim(\ker(M - \lambda I_n)), \text{ et } \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n})) \geq \dim(\ker(M - \lambda I_n))$$

(c'est par exemple une conséquence du théorème du rang). En conclusion :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} 2 \dim(\ker(M - \lambda I_n)) \stackrel{(9)}{=} 2n,$$

mais on a aussi : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) \leq 2n$, puisqu'il s'agit de la dimension de la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (\ker(N - \mu_\lambda I_{2n}) \oplus \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))$ (les μ_λ sont tous distincts pour $\lambda \in \text{Sp}(M)$), qui est incluse dans l'espace vectoriel $M_{2n,1}(\mathbf{C})$ de dimension $2n$. On en déduit :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) = 2n,$$

donc d'après le critère de diagonalisation la matrice N est diagonalisable.

En conclusion, si M est diagonalisable et inversible alors N l'est également.

II.2 – Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

Q40. Si x_1 et x_2 sont deux applications de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' = -2x_1 + x_2, \\ x_2'' = x_1 - 2x_2. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1' \\ x_2' = x_2' \\ x_1'' = -2x_1 + x_2, \\ x_2'' = x_1 - 2x_2. \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$$

donc le système étudié équivaut au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(-2, 1) & 0_2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R}).$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 4.

Q41. Pour déterminer les valeurs propres de B , il suffit d'extraire les racines carrées complexes des valeurs propres de $A_2(-2, 1)$ d'après la question **Q37**. Or, d'après la question **Q32** (ou par un calcul direct dans ce cas particulier très simple...), le spectre de $A_2(-2, 1)$ est :

$$\left\{ -2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \{-3, -1\}.$$

On en déduit que l'ensemble des valeurs propres complexes de B est :

$$\{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, i, -i\}.$$

Ainsi B admet quatre valeurs propres distinctes et est d'ordre 4, donc est diagonalisable dans $\mathbf{C}$.

Q42. La question **Q32** (ou un calcul direct) permet de déterminer les sous-espaces propres de $A_2(-2, 1)$:

$$\ker(A_2(-2, 1) + I_2) = \text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ et } \ker(A_2(-2, 1) + 3I_2) = \text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après la question **Q38**, on a donc :

$$\begin{aligned} \ker(B - iI_4) &= \text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \right\}, \quad \ker(B + iI_4) = \text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix} \right\}, \\ \ker(B - \sqrt{3}iI_4) &= \text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et } \ker(B + \sqrt{3}iI_4) = \text{Vect}_{\mathbf{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Donc, si l'on prend pour $P \in M_4(\mathbf{C})$ la matrice de passage suivante entre la base canonique de $M_{4,1}(\mathbf{C})$ et une base de vecteurs propres de B adéquate :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix}$$

la formule du changement de base implique : $B = PDP^{-1}$.

Q43. La matrice D est diagonale, donc bien sûr diagonalisable, de valeurs propres les coefficients diagonaux, et ses éléments propres sont les vecteurs de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbf{C})$. Un système fondamental de solutions de $Y' = DY$ est donc (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) , où :

$$Y_1 : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ t \mapsto e^{-i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad Y_2 : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ t \mapsto e^{i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Y_3 : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad Y_4 : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Autrement dit : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ vérifie $Y' = DY$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) + \gamma Y_3(t) + \delta Y_4(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} \\ \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ \gamma e^{-it} \\ \delta e^{it} \end{pmatrix}.$$

Q44. Soient x_1 et x_2 deux applications à valeurs complexes et de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ et

$Y = P^{-1}X$, où P est la matrice de la question **Q42**, alors $Y' = P^{-1}X'$, et x_1 et x_2 sont solutions du système (2) de l'énoncé si et seulement si :

$$X' = BX \iff X' = PDP^{-1}X \stackrel{[P^{-1} \times]}{\iff} P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ \iff Y' = DY$$

$$\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} \\ \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ \gamma e^{-it} \\ \delta e^{it} \end{pmatrix}$$

si et seulement si (après multiplication à gauche par P) il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} \\ \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ \gamma e^{-it} \\ \delta e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sqrt{3}t} + \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it} \\ -\alpha e^{-i\sqrt{3}t} - \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it} \\ -i\sqrt{3}\alpha e^{-i\sqrt{3}t} + i\sqrt{3}\beta e^{i\sqrt{3}t} - i\gamma e^{-it} + i\delta e^{it} \\ i\sqrt{3}\alpha e^{-i\sqrt{3}t} - i\sqrt{3}\beta e^{i\sqrt{3}t} - i\gamma e^{-it} + i\delta e^{it} \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut, étant donné que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$, à l'existence de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = \alpha e^{-i\sqrt{3}t} + \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it}, \\ x_2(t) = -\alpha e^{-i\sqrt{3}t} - \beta e^{i\sqrt{3}t} + \gamma e^{-it} + \delta e^{it}. \end{cases}$$

On cherche à présent à quelle condition on a : $(x_1(0), x_2(0), x'_1(0), x'_2(0)) = (1, 0, 0, 0)$. Ces conditions équivalent au système linéaire :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & 1 \\ -\alpha & -\beta & +\gamma & +\delta & = & 0 \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ \sqrt{3}\alpha & -\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & 1 \\ & & 2\gamma & +2\delta & = & 1 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & -2\gamma & +2\delta & = & 0 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & & & = & \frac{1}{2} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ & & 2\gamma & +2\delta & = & 1 \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & & 4\delta & = & 1 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & & & = & \frac{1}{2} \\ & & \gamma & & = & \frac{1}{4} \\ -\sqrt{3}\alpha & +\sqrt{3}\beta & & & = & 0 \\ & & & \delta & = & \frac{1}{4} \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & & & = & \frac{1}{2} \\ & & \gamma & & = & \frac{1}{4} \\ & 2\sqrt{3}\beta & & & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{3}L_1) \\ & & \delta & & = & \frac{1}{4} \end{cases} \\ \iff \alpha = \gamma = \beta = \delta = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En conclusion, l'unique couple solution du système linéaire (2) de l'énoncé à vérifier les conditions initiales prescrites est défini par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4} (e^{-i\sqrt{3}t} + e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{4} (e^{-it} + e^{it}) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \cos(t), \\ x_2(t) = -\frac{1}{4} (e^{-i\sqrt{3}t} + e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{4} (e^{-it} + e^{it}) = -\frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \cos(t). \end{cases}$$