

Q.1 Le terme général de AX est $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Par hypothèse, $\forall i, j, a_{ij} > 0$ et $x_j \geq 0$. Comme $X \neq 0$, l'un des x_j est strictement positif. Donc le terme général est strictement positif.

Le terme général de $|AB|$ est $\left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right|$ que l'on peut majorer, grâce

à l'inégalité triangulaire par $\sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|$ qui est le terme général de $|A||B|$.

De ce fait le terme général de $|A||B| - |AB|$ est positif et ainsi $|AB| \leq |A||B|$

Q.2 C-S : $|(X|Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.

Il suffit de poser $x_k = |z_k|$ et $y_k = |w_k|$, réels (positifs) pour obtenir l'inégalité proposée avec le produit scalaire canonique.

Q.3 $|1+z| = 1+|z|$. On élève au carré et on transforme le carré du module en $z\bar{z}$.

On obtient alors $1+z+\bar{z}+z\bar{z} = 1+2|z|+z\bar{z}$ d'où $z+\bar{z} = 2|z|$.

On utilise l'écriture algébrique, soit $2a = 2\sqrt{a^2+b^2}$. Donc $a \geq 0$ et en élevant au carré de nouveau, on récupère $b = 0$.

z est bien un réel positif.

Comme $|z| \neq 0$, $|z+z'| = |z|+|z'|$ devient $|z| \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = |z| \left(1 + \frac{|z'|}{|z|} \right)$.

On simplifie donc par $|z|$ et on retrouve le cas précédent. Donc $\frac{z'}{z}$ est un réel positif comme voulu.

Q.4 Quitte à renuméroter, on peut supposer que $z_1 \neq 0$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq |z_1 + z_k| + \sum_{j \neq 1, k} |z_j| \leq \sum_{j=1}^n |z_j|$$

Or les sommes initiale et finale sont égales donc $\forall k \in [[1, n]]$, $|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$. Ce qui prouve, en utilisant la Q3, qu'il existe α_k , réel positif, tel que $z_k = \alpha z_1$. Dit autrement, les z_k possèdent le même argument et cela fournit l'écriture exponentielle de z_k .

Q.5 $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ donc $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc$

Q.6 $b > 0$ et $c > 0$ donc $\Delta > 0$. Le polynôme caractéristique possède donc deux racines distinctes λ et μ . La matrice A est donc diagonalisable et est donc semblable à la matrice proposée.

Q.7 On a choisi $\lambda < \mu$. Ainsi, comme a et d sont positifs, strictement, $\lambda = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\mu = \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2}$

On utilise de nouveau l'inégalité triangulaire : $|a+d-\sqrt{\Delta}| \leq |a+d| + \sqrt{\Delta}$ Comme $a+d > 0$, on obtient bien le numérateur de μ . L'inégalité est stricte car $\Delta > 0$

Q.8 Notons D la matrice diagonale formée des deux valeurs propres. Il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

Une récurrence élémentaire fournit $A^k = PD^kP^{-1}$. Ainsi (A^k) converge si et seulement si (D^k) converge. Or $D^k = \text{diag}(\mu^k, \lambda^k)$.

Ces quantités convergent si et seulement si $\lambda \in]-1, 1]$ et $\mu \in]-1, 1]$. Si $\mu < 1$ alors la limite est la matrice nulle.

De ce fait (A^k) converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. On obtient alors $L = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

La matrice diagonale est clairement de rang 1. Comme P est inversible, L est de rang 1 et $L^2 = L$ évidemment.

Q.9 On applique ce qui précède à B car ses coefficients sont strictement positifs. $\Delta = (\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

Donc $\lambda = \frac{(2 - \alpha - \beta) - (\alpha + \beta)}{2} = 1 - \alpha - \beta$ et $\mu = 1$.

Un vecteur propre associé à 1 est (β, α) , un vecteur propre associé à $1 - \alpha - \beta$ est $(-1, 1)$ Cela fournit donc la matrice S .

Q.10 Un calcul d'inverse fournit la matrice L calculée précédemment : $L = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$

Q.11 On montre d'abord que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. La positivité et l'homogénéité sont claires. Pour la séparation, si $\|A\|_\infty = 0$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ donc comme c'est une somme de termes positifs, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. Pour l'inégalité triangulaire, si A et B sont deux matrices et $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$

Par passage au max, $\|A + B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.

On montre ensuite qu'elle est sous-multiplicative :

$$\|AB\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \right)$$

Or

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|$$

On échange les sommations. Or $\sum_j |b_{kj}| \leq \|B\|_\infty$. Il reste alors $\sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ que l'on majore de même.

Q.12

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \\ &\leq \|A\|^2 \|B\|^2 \end{aligned}$$

Q.13 $\nu(A)$ est un réel positif.

$$\nu(A + B) = N(SAS^{-1} + SBS^{-1}) \leq N(SAS^{-1}) + N(SBS^{-1}) \leq \nu(A) + \nu(B)$$

$$\nu(\lambda A) = N(S\lambda AS^{-1}) = |\lambda| N(SAS^{-1}) = |\lambda| \nu(A)$$

$\nu(A) = 0 = N(SAS^{-1})$. Comme N est une norme $SAS^{-1} = 0$ et ainsi $A = 0$

Donc ν est une norme.

$$\text{Et enfin } \nu(AB) = N(SAS^{-1}SBS^{-1}) \leq N(SAS^{-1})N(SBS^{-1}) \leq \nu(A)\nu(B)$$

Q.14 A et SAS^{-1} sont semblables donc ont mêmes valeurs propres. Leur rayon spectral est donc le même.

Q.15 Le polynôme caractéristique est toujours factorisable dans \mathbb{C} donc A est trigonalisable.

$A = PTP^{-1}$ Les valeurs propres de T^k sont λ_i^k et ainsi $\rho(A^k) = \rho(A)^k$

Les valeurs propres de αA sont $\alpha \lambda_i$ donc $\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$

Q.16 Soit λ une valeur propre de A . Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Notons alors H la matrice dont la première colonne est X et les colonnes suivantes sont nulles. Alors, évidemment, $AH = \lambda H$
 Comme N est sous-multiplicative, $N(AH) \leq N(A)N(H)$ soit $N(\lambda H) \leq N(A)N(H)$ puis $|\lambda| \leq N(A)$ car $N(H) > 0$.
 Cela prouve que $\rho(A) \leq N(A)$

Q.17 Quand on multiplie par la gauche avec une matrice diagonale, on multiplie la ligne par le coefficient diagonal correspondant. La multiplication à droite multiplie la colonne.
 On obtient donc une matrice triangulaire supérieure de coefficient, en position (i, j) , $\tau^{1-i}T_{ij}\tau^{j-1} = \tau^{j-i}T_{ij}$.

Q.18

$$\begin{aligned} \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=i}^n \tau^{j-i}|T_{ij}| \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(|T_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{ij}| \right) \\ &\leq \rho(A) + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{ij}| \right) \end{aligned}$$

Et il existe δ tel que pour $\tau \leq \delta$, les sommes soient inférieures à ϵ

Q.19 $T = P^{-1}AP$. On a donc $\|D_\tau^{-1}P^{-1}APD_\tau\|_\infty \leq \rho(A) + \epsilon$. Et ainsi, d'après la question 13, on a bien créé une norme sous-multiplicative vérifiant l'inégalité demandée.

Q.20 Si $\rho(A) < 1$, soit $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par la question précédente il existe une norme sous-multiplicative N telle que $N(A) \leq \rho(A) + \epsilon$. Par sous-multiplicativité de N , pour tout $k \geq 1$, $N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A) + \epsilon)^k$ qui tend vers 0. Ainsi $N(A^k)$ tend vers 0 donc A^k tend vers 0 (comme on est en dimension finie, le fait pour une suite de tendre vers 0 ne dépend pas de la norme choisie).
 Réciproquement, $\rho(A^k) \leq N(A^k)$ donc $\rho(A)^k$ tend vers zéro ce qui fournit $\rho(A) < 1$.

Q.21 A est sym réelle donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Q.22 Si $\rho(A) = 0$ alors la seule valeur propre est zéro. Comme A est diagonalisable, $A = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

- Q.23** Il existe une base orthonormée de vecteurs propres (e_i) . Notons (x_1, \dots, x_n) les composantes de X relativement à cette base. Alors $AX = (\lambda_i x_i)_i$ et $X^T AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ par orthogonalité.
- Il suffit alors de majorer λ_i par μ et utiliser le fait que X est unitaire pour obtenir l'inégalité voulue.
- Q.24** Si X est un vecteur propre associé à μ alors on obtient évidemment l'égalité. Réciproquement, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \mu$ alors $\sum_{i=1}^n (\mu - \lambda_i) x_i^2 = 0$. Il s'agit d'une somme de termes positifs, nulle. Donc chaque terme est nul. Si $\mu \neq \lambda_i$ cela signifie que $x_i = 0$. Par contre, lorsque $\mu = \lambda_i$, x_i peut être non nul et comme la somme des x_i^2 vaut 1, l'un au moins est non nul. Cela signifie donc que X est vecteur propre associé à μ .
- Q.25** Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de réutiliser la technique de la question 23 pour majorer ensuite par μ
- Q.26** Pour X vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ de A , $|\lambda| = |X^T AX| \leq \mu$ par la question précédente, d'où $\rho(A) \leq \mu$. Or μ est une valeur propre de A donc $\mu \leq \rho(A)$ et finalement $\mu = \rho(A) = r$.
- Q.27** Soit X un vecteur propre de A associé à r , alors $X \neq 0$ donc $|X| \neq 0$. On utilise la question 25 :

$$r = |r| = |X^T AX| \leq |X|^T A |X| \leq r$$

donc il n'y a que des égalités. Donc $|X|^T A |X| = r$ et, par la question 24, $r|X| = A|X|$ et $|X|$ est vecteur propre associé à r .

Montrons maintenant que $|X| > 0$. Si l'une des coordonnées de $|X|$ est nulle cela signifie que $\sum a_{ij} |x_j| = 0$ pour cette ligne i . Or $A > 0$. Cela signifierait que tous les x_i sont nuls ce qui est absurde.

- Q.28** La question revient à montrer que tous les coefficients de X sont de même signe. On a $|X| > 0$ donc aucun coefficient de X n'est nul. Par ce qui précède $|AX| = |rX| = r|X| = A|X|$ et on revient aux coordonnées, c'est-à-dire que pour tout i entre 1 et n :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_j|$$

en utilisant que les $a_{i,j}$ sont strictement positifs. On peut donc appliquer la question 4. Comme les x_i sont réels, il vient $e^{i\theta} = \pm 1$, ce qui signifie que tous les x_i sont de même signe.

Q.29 On considère donc X_1 et X_2 deux vecteurs propres orthogonaux associés à r . D'après ce qui précède, tous les coefficients de X_1 et X_2 sont non nuls et de signe constant.

On a $X_1^T X_2 = 0$ ce qui est impossible d'après le signe de la somme. Donc le sous-espace propre est de dimension 1.

Q.30 Comme A est diagonalisable, la multiplicité de r est la dimension du sous-espace propre soit 1.

Considérons λ tel que $|\lambda| = r$ et $AX = \lambda X$ alors $A|X| = r|X|$. Or $X = \pm|X|$. Donc on a $AX = rX$ c'est-à-dire que X est aussi vecteur propre associé à r . Donc $\lambda = r$.

Q.31 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possède les vp -1 et 1 .

Q.32 $A^p X = r^p X$ et on peut appliquer le IV - B. Donc $X = \pm|X|$ et $|X| > 0$ et on obtient bien le sous espace propre de dimension 1 engendré par un vecteur positif.

Q.33 Si p est impair : $\rho(A^p) = r^p$ et par la question 30 appliquée à A^p , r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p , donc par stricte croissance de $x \mapsto x^p$, r est l'unique valeur propre de A de module r .

Si p est pair, on a toujours $\rho(A^p) = r^p$, et par la question 30 r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p . Il faut montrer que $-r$ n'est pas valeur propre de A . Or comme A est diagonalisable, A^p aussi et :

$$\dim(\ker(A^p - r^p I_n)) = \dim(\ker(A - r I_n)) + \dim(\ker(A + r I_n)).$$

Par la question 29 on sait que la dimension de l'espace propre de gauche est 1, et celle de $\ker(A - r I_n)$ vaut également 1 par la question 32, donc nécessairement $\dim(\ker(A + r I_n)) = 0$ et $-r \notin \text{Sp}(A)$. Donc r est l'unique valeur propre de module r de A .

Q.34 Soit λ une valeur propre de A . On sait qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Considérons les composantes de X non nulles. L'une d'entre elles est de module maximal. On la note i_0 .

$$\text{Alors on a } \sum_{j=1}^n A_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0} \text{ soit } \sum_{j=1, j \neq i_0}^n A_{i_0 j} x_j = (\lambda - A_{i_0 i_0}) x_{i_0}$$

$$\text{Et } |\lambda - A_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |A_{i_0 j}| |x_j|.$$

On divise alors par $|x_{i_0}|$ non nul et $\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq 1$ pour conclure.

Q.35 Utilisons la proposition : le spectre de A est celui de $D^{-1}AD$. On applique alors la question 34 à la matrice $D^{-1}AD$: si $\lambda \in \text{sp}(A) = \text{sp}(D^{-1}AD)$, il existe i entre 1 et n tel que :

$$\begin{aligned} |\lambda - A_{ii}| &= |\lambda - X_i^{-1} A_{ii} X_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i} X_i^{-1} |A_{ij}| X_j \leq X_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i} B_{ij} X_j \\ &\leq X_i^{-1} (\rho(B) - B_{ii}) X_i \end{aligned}$$

Ce qui fournit l'inégalité demandée.