

Corrigé du DM n°7
(Nîmes-Porto PC 2007)

(I)

1. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1, u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$.

Vérifions les hypothèses du th de continuité pour les séries de fonctions :

* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ par th général.

* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

$\Rightarrow \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ or $\frac{1}{n^\alpha} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est

une série de Riemann CV car $\alpha > 1$

donc, par th de comparaison, $\sum u_n$ CVN sur $\mathbb{R}$

donc $\sum u_n$ CVU sur $\mathbb{R}$.

Conclusion: S_α est continue sur $\mathbb{R}$ si $\alpha > 1$.

2. $\forall t > 0, \forall u \in]-1; 1[, e^t > 1 > u$

d'où $e^t - u > 0$

donc J est continue sur $]0; +\infty[$ comme

quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. On remarque que J est positive sur $\mathbb{R}_+$.

sur $]0, 1]$: $J(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^{\delta-1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{t^{1-\delta}}$

or $\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{t^{1-\alpha}} > 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ est une intégrale de Riemann en 0 cv m' $1-\alpha < 1$ m' $\boxed{\alpha > 0}$

d'où, par th de comparaison, J est intégrable sur $]0, 1]$ m' $\alpha > 0$.

Sur $[1, +\infty[$: $J(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-t} t^{\alpha-1}$

$\Rightarrow t^2 J(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{1+\alpha} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ par C-C.

donc $J(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\frac{1}{t^2} > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$ cv d'où, par th de comparaison, J est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Conclusion: $\boxed{J \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ m' } \alpha > 0}$

3. $\forall t \geq 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall u \in]-1, 1[$,

$$R_N(t, u) = \left[\frac{u}{e^t - u} - u e^{-t} \times \frac{1 - (u e^{-t})^N}{1 - u e^{-t}} \right] t^{\alpha-1}$$

$$\text{car } |u e^{-t}| < 1 \Rightarrow u e^{-t} \neq 1$$

$$\text{d'où } \boxed{R_N(t, u) = \frac{u^{N+1} e^{-Nt} t^{\alpha-1}}{e^t - u}}$$

4. Vérifions les hypothèses du th de convergence dominée appliquée à R_N .

* $\forall N \in \mathbb{N}$, R_N est CPM sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue comme quotient de fonction continues à dénominateur non nul.

* $\forall t > 0$, $\forall u \in]-1, 1[$, $(u^{N+1} e^{-Nt})$ converge vers 0 donc (R_N) CVS vers 0 qui est CPM sur $\mathbb{R}_+^*$.

* $\forall t > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $|R_N(t, u)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - u} = J(t)$

avec J positive, CPM et intégrable (d'après 2) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion: $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} R_N = \int_0^{+\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} R_N$

d'où $\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt = 0}$.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{u t^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \int_0^{+\infty} \left[u e^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u e^{-t})^n t^{\alpha-1} + R_N(t, u) \right] dt$

$= \int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (u e^{-t})^{n+1} t^{\alpha-1} + R_N(t, u) \right] dt$

L'intégrabilité de R_N sur $\mathbb{R}_+^*$ vient du th de convergence dominée appliquée en 4.

Notons que $\int_0^{+\infty} (ue^{-t})^{n+1} t^{\alpha-1} dt$ converge.

Posons $\begin{cases} v = (n+1)t & C^1 \text{ bijectif sur } \mathbb{R}_+^* \\ dv = (n+1)dt \end{cases}$

d'après le th de changement de variable,

$\int_0^{+\infty} (ue^{-t})^{n+1} t^{\alpha-1} dt$ a même nature que

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-v} \left(\frac{v}{n+1}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{dv}{n+1} = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \Gamma(\alpha) \text{ qui converge}$$

car $\alpha > 0$.

donc:
$$\int_0^{+\infty} (ue^{-t})^{n+1} t^{\alpha-1} dt = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \Gamma(\alpha)$$

On en déduit donc que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{+\infty} (ue^{-t})^{n+1} t^{\alpha-1} dt + \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt$$

car chaque intégrale cv.

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \Gamma(\alpha) + \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt$$

d'où, quand $N \rightarrow +\infty$, d'après 4,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

On a donc $K(\alpha) = \Gamma(\alpha) \geq 0$.

6. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$u = e^{ix} \neq 1$$

$$\text{d'où} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}} dt = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$$

On va prendre la partie imaginaire :

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} \right] dt = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{inx})}{n^\alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} &= \frac{e^{ix} (e^t - \bar{e}^{-ix})}{(e^t - \cos x)^2 + \sin^2 x} \\ &= \frac{(\cos x + i \sin x) (e^t - \cos x + i \sin x)}{e^{2t} - 2e^t \cos x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} \right] &= \frac{\cos x \sin x + \sin^2 (e^t - \cos x)}{e^{2t} - 2e^t \cos x + 1} \\ &= \frac{\sin x e^t}{e^{2t} - 2e^t \cos x + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin x}{e^t - 2\cos x + e^{-t}}$$

$$= \frac{\sin x}{2\cosh t - 2\cos x}$$

$$\text{d'où} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \frac{\sin x}{2(\cosh t - \cos x)} dt = \Gamma(\alpha) S_\alpha(x)$$

Si $\Gamma(x) = 0$, comme $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^x$, on en déduit que la fonction est nulle ce qui est absurde.

Pour $\Gamma(x) > 0$.

$$\Rightarrow \boxed{S_x(x) = \frac{\sin(x)}{2\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\cosh t - \cos x} dt}$$

7. $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{\cosh t - u}$ est continue sur $]0, M]$ par quotient de fonctions continues et dénominateur non nul.

$$\text{et } \frac{t^{x-1}}{\cosh t - u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{1-u} \frac{1}{t^{1-x}}$$

d'où d'après 1. $\int_0^M \frac{t^{x-1}}{\cosh t - u} dt$ cv.

$$\text{De plus, } \int_0^M \frac{t^{x-1}}{\cosh t - u} dt = \int_0^M \frac{t^{x-1}}{\cosh t} \times \frac{1}{1 - \frac{u}{\cosh t}} dt$$

$$\forall t > 0, \cosh t > 1 \Rightarrow \left| \frac{u}{\cosh t} \right| < 1$$

$$\text{d'où } \frac{1}{1 - \frac{u}{\cosh t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{u}{\cosh t} \right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \int_0^M \frac{t^{x-1}}{\cosh t - u} dt &= \int_0^M \frac{t^{x-1}}{\cosh t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{u}{\cosh t} \right)^n dt \\ &= \int_0^M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{x-1} u^n}{\cosh^n(t)} dt \end{aligned}$$

Vérifier les hypothèses du th d'intégration terme à terme en posant $f_n(t) = t^{\alpha-1} \frac{u^n}{ch^{n+1}(t)}$.

* $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est CPM sur $]0, \infty[$ car continue sur $]0, \infty[$

De plus, f_n est intégrable sur $]0, \infty[$ car

$$|f_n(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |u|^n t^{\alpha-1} = \frac{|u|^n}{t^{1-\alpha}}$$

or $\frac{|u|^n}{t^{1-\alpha}} > 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ est une intégrale de Riemann en 0 cv car $\alpha > 0 \Rightarrow 1-\alpha < 1$

d'où par th de comparaison : $\int_0^1 |f_n|$ cv

* $\sum f_n$ CVS vers $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{ch t - u}$ qui est CPM sur $]0, \infty[$ car continue sur $]0, \infty[$.

$$\begin{aligned} * \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^n |f_n| &= |u|^n \int_0^n \frac{t^{\alpha-1}}{ch^{n+1}(t)} dt \\ &\leq |u|^n \int_0^n t^{\alpha-1} dt \text{ car } ch \geq 1. \end{aligned}$$

or $\sum |u|^n$ cv car $|u| < 1$.

d'où $\sum \int_0^n |f_n|$ cv

Donc:
$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{ch t - u} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} u^n}{(ch t)^{n+1}} dt$$

8. Vérifions les hypothèses du th de double limite appliqué à $g_n(M) = u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}} dt$ pour tout $M \in \mathbb{R}_+^*$.

* $t \mapsto \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient et intégrable sur $[0,1]$ (d'après 7).

$$\text{Sur } t \rightarrow \infty, \quad t \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}} \sim u^n \frac{1}{2^{n+1}} e^{-(n+1)t} t^{\alpha+1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ par C.C.}$$

$$\text{donc } \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}} \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or $\frac{1}{t^2} > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann cv d'oc, par th de comparaison,

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}} dt \text{ cv}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n(M) \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}} dt$$

* $\forall M > 0, \forall n \in \mathbb{N},$

$$|g_n(M)| = \left| u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(cht)^{n+1}} dt \right|$$

$$\leq |u|^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{cht} dt \quad \text{car } cht > 1$$

$$\leq |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{cht} dt$$

$$\text{d'ou } \|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\cosh t} dt.$$

$$\text{or } \sum |u|^n \text{ CV car } |u| < 1$$

$$\text{donc } \sum g_n \text{ CVN sur } \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \sum g_n \text{ CVU sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n^{(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(n)}$

$$\text{Soit } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}} dt}$$

$$9. \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, |\cos x| < 1$$

$$\text{d'ou, } \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\cosh t - \cos x} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \cos^n(x) \frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}} dt.$$

d'après 7 et 8.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n(x) \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\cosh t)^{n+1}} dt$$

$$= G_\alpha(\cos x)$$

$$\text{donc: } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},$$

$$\boxed{S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} G_\alpha(\cos x)}$$

(II)

10. On a $B(s) = a s^{\lambda-1} (1 + o(1))$

$$\text{sur } \frac{B(s)}{a s^{\lambda-1}} - 1 = o(1)$$

d'où $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s > 0,$

$$|s| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{B(s)}{a s^{\lambda-1}} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |B(s) - a s^{\lambda-1}| \leq \varepsilon a s^{\lambda-1}$$

$$\Rightarrow e^{-us} |B(s) - a s^{\lambda-1}| \leq \varepsilon a s^{\lambda-1} e^{-us}$$

$$\text{or } \left| \int_0^\delta e^{-us} (B(s) - a s^{\lambda-1}) ds \right|$$

$$\leq \int_0^\delta e^{-us} |B(s) - a s^{\lambda-1}| ds$$

$$\leq \varepsilon a \int_0^\delta s^{\lambda-1} e^{-us} ds$$

On pose $u = us$ C^1 bijectif sur $]0, \delta]$
 $du = u ds$

$$\text{d'où } \int_0^\delta s^{\lambda-1} e^{-us} ds = \int_{u\delta}^{u0} \left(\frac{u}{u}\right)^{\lambda-1} e^{-u} \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{u^\lambda} \int_0^{u\delta} u^{\lambda-1} e^{-u} du \leq \frac{1}{u^\lambda} \int_0^{+\infty} u^{\lambda-1} e^{-u} du$$

$$\text{d'où } \left| \int_0^\delta e^{-us} (B(s) - a s^{\lambda-1}) ds \right| \leq \frac{\varepsilon a}{u^\lambda} \Gamma(\lambda)$$

$$11. \forall s \geq \delta, 0 \leq |B(s) e^{-us}| \leq |B(s)|$$

donc $s \mapsto B(s) e^{-us}$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$.

$$\text{et } \left| \int_{\delta}^{+\infty} B(s) e^{-us} ds \right| \leq \int_{\delta}^{+\infty} |B(s)| ds \cdot e^{-u\delta} \\ \leq \int_0^{+\infty} |B(s)| ds e^{-u\delta}$$

De même, $s \mapsto a s^{\lambda-1} e^{-us}$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$ d'après 10.

$$\left| \int_{\delta}^{+\infty} a s^{\lambda-1} e^{-us} ds \right| \leq a \int_{\delta}^{+\infty} s^{\lambda-1} e^{-s} ds \times e^{-(n-1)\delta} \\ \leq a \Gamma(\lambda) e^{-(n-1)\delta}$$

$$\text{d'où } \left| \int_{\delta}^{+\infty} (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds \right|$$

$$\leq \int_{\delta}^{+\infty} |B(s) e^{-us}| ds + \int_{\delta}^{+\infty} a s^{\lambda-1} e^{-us} ds$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |B(s)| ds e^{-u\delta} + a \Gamma(\lambda) e^{-(n-1)\delta}$$

$$\text{On pose donc } C(\delta) = \int_0^{+\infty} |B(s)| ds e^{-\delta} + a \Gamma(\lambda)$$

$$\text{d'où } \boxed{\left| \int_{\delta}^{+\infty} (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds \right| \leq C(\delta) e^{-(n-1)\delta}}$$

12. Remarquons que : $\int_0^{+\infty} a s^{\lambda-1} e^{-us} ds = \frac{a \Gamma(\lambda)}{u^\lambda}$
d'après les calculs précédents.

$$\begin{aligned} \text{d'où } \int_0^{+\infty} B(s) e^{-us} ds &= a \frac{\Gamma(\lambda)}{u^\lambda} \\ &= \int_0^\delta (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds \\ &= \int_0^\delta (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds + \int_\delta^{+\infty} (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où, } \left| \int_0^{+\infty} B(s) e^{-us} ds - a \frac{\Gamma(\lambda)}{u^\lambda} \right| &\leq \left| \int_0^\delta (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds \right| + \left| \int_\delta^{+\infty} (B(s) - a s^{\lambda-1}) e^{-us} ds \right| \\ &\leq \varepsilon \frac{a \Gamma(\lambda)}{u^\lambda} + C e^{-(n-1)\delta} = \Delta_n. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \Delta_n = \frac{a \Gamma(\lambda)}{n^\lambda} \left[\varepsilon + \frac{C}{a \Gamma(\lambda)} \cdot n^\lambda e^{-(n-1)\delta} \right]$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\lambda e^{-(n-1)\delta} = 0 \text{ par C.C.}$$

$$\text{donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{C}{a \Gamma(\lambda)} n^\lambda e^{-(n-1)\delta} \right| \leq \varepsilon$$

$$\text{d'où } \forall n \geq n_0, \Delta_n \leq \frac{a \Gamma(\lambda)}{n^\lambda} \cdot 2\varepsilon$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{+\infty} B(s) e^{-us} ds = a \frac{\Gamma(1)}{u^1} \underset{u \rightarrow \infty}{=} \frac{a \Gamma(1)}{u^1} o(1)$$

soit $\boxed{\int_0^{+\infty} B(s) e^{-us} ds = \frac{a \Gamma(1)}{u^1} (1 + o(1))}$

13. Posons $s = \ln(\cosh t)$ C^1 injectif sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $e^s = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

Posons $X = e^t > 1$, on a alors $X - 2e^s + \frac{1}{X} = 0$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2Xe^s + 1 = 0$$

$$\Delta = 4e^{2s} - 4 = 4(e^{2s} - 1) > 0 \quad \text{car } \cosh t > 1.$$

$$\text{d'où } X = \frac{2e^s - 2\sqrt{e^{2s} - 1}}{2} = e^s - \sqrt{e^{2s} - 1} = X_1 \quad \Rightarrow s > 0.$$

$$\text{ou } X = e^s + \sqrt{e^{2s} - 1} = X_2$$

Remarquons que $s > 0 \Rightarrow X_2 > 1$

$$X_1 > 1 \Leftrightarrow e^s - 1 > \sqrt{e^{2s} - 1} \Leftrightarrow (e^s - 1)^2 > e^{2s} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2s} - 2e^s + 1 > e^{2s} - 1 \Leftrightarrow e^s < 1 \text{ exclu}$$

donc $e^t = e^s + \sqrt{e^{2s} - 1} \Rightarrow t = \ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1})$

De plus, $dt = \frac{e^s + \frac{1}{2} \frac{e^{2s}}{\sqrt{e^{2s} - 1}}}{e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}} ds = \frac{e^s ds}{\sqrt{e^{2s} - 1}}$

d'où $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^s + \sqrt{e^{2s}-1})^{n-1}}{(e^s)^{n+1}} \times \frac{e^s ds}{\sqrt{e^{2s}-1}}$

soit $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^s + \sqrt{e^{2s}-1})^{n-1}}{\sqrt{e^{2s}-1}} \times e^{-ns} ds$

14.
$$\begin{aligned} e^s + \sqrt{e^{2s}-1} &\underset{s \rightarrow 0}{=} 1 + s + o(s) + \left(1 + 2s + \frac{(2s)^2}{2} + o(s^2)\right)^{1/2} \\ &= 1 + s + o(s) + (2s)^{1/2} \left[1 + \frac{2s}{2} + o(s)\right]^{1/2} \\ &= 1 + \sqrt{2s} + o(\sqrt{s}) \end{aligned}$$

d'où $\ln(e^s + \sqrt{e^{2s}-1}) \underset{s \rightarrow 0}{=} \ln(1 + \sqrt{2s} + o(\sqrt{s}))$
 $= \sqrt{2s} + o(\sqrt{s})$

donc $\ln(e^s + \sqrt{e^{2s}-1})^{n-1} \underset{s \rightarrow 0}{\sim} (2s)^{n-1/2}$

De plus $\sqrt{e^{2s}-1} \underset{s \rightarrow 0}{=} (2s)^{1/2} \left(1 + \frac{2s}{2} + o(s)\right)^{1/2} \underset{s \rightarrow 0}{\sim} (2s)^{1/2}$

d'où, $B(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{(2s)^{\frac{n-1}{2}}}{(2s)^{1/2}}$ soit $B(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} (2s)^{\frac{n-1}{2}-1}$

15. On vérifie que B satisfait aux conditions (4) et (5) de l'énoncé.

B est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de
foncteur continu à dénominateur non nul.

$$\int_0^{\infty} |B| \, dv \text{ par déf de } a_n \text{ comme } B > 0.$$

$$\text{et } B(s) = 2^{\frac{s}{2}-1} \cdot s^{\frac{s}{2}-1} (1 + o(1))$$

$$\text{On pose } \alpha = 2^{\frac{s}{2}-1} > 0 \text{ et } \lambda = \frac{\alpha}{2} > 0$$

$$\text{d'après 12, } a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{\frac{s}{2}-1} \Gamma(\frac{s}{2})}{n^{\frac{s}{2}}}$$

$$\text{d'où } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{\frac{s}{2}} = 2^{\frac{s}{2}-1} \Gamma(\frac{s}{2})}$$