

X-ENS PSI 2007 un corrigé

Première partie.

1.1. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ et on montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)} : x \mapsto \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}$$

f étant indéfiniment dérivable en 0, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre au voisinage de 0 pour obtenir (compte-tenu de $f(0) = 0$)

$$\forall x \in] -1, +\infty[, \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{n!(-1)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

En appliquant ceci en $x = 1$, on a donc

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

On a donc

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \zeta_a(1)$$

1.2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Soit $n_0 = E(1/\varepsilon)$; on a $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ et donc $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$. L'inégalité précédente donne alors

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \varepsilon$$

Le calcul de la somme du membre de gauche donne une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près.

1.3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\forall k \geq 1, \forall x \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

En intégrant ces inégalités puis en sommant les résultats obtenus, il vient

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

1.4. On forme la différence

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, par concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a

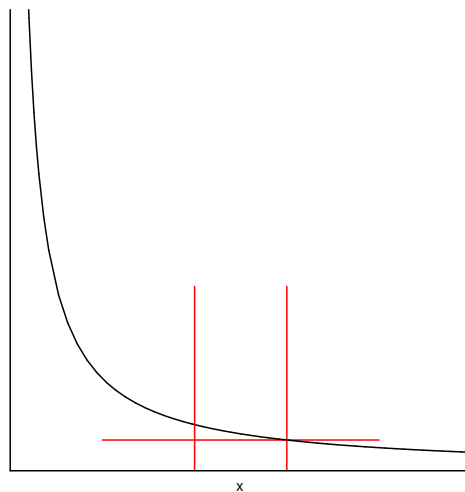
$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

On en déduit (avec $u = -1/(n+1)$) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). Elle est donc convergente.

- 1.5.** On trace le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$ ainsi que les droites d'équation $x = n$, $x = n + 1$ et $y = \frac{1}{n+1}$. Le domaine cherché est le domaine borné délimité par ces courbes.



L'aire de D_n est la différence de l'aire sous la branche d'hyperbole et de celle sous la droite $y = \frac{1}{n+1}$:

$$\text{aire}(D_n) = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}$$

en utilisant l'expression obtenue auparavant pour la différence $u_{n+1} - u_n$.

- 1.6.** Le calcul de D_n peut aussi se faire avec une intégrale double :

$$\text{aire}(D_n) = \iint_{D_n} dx \, dy = \int_n^{n+1} \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{x}} dy \right) dx = \int_n^{n+1} \frac{n+1-x}{x(n+1)} dx$$

Un encadrement grossier donne

$$\forall x \in [n, n+1], \quad \frac{n+1-x}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1-x}{x(n+1)} \leq \frac{n+1-x}{n(n+1)}$$

En intégrant ces inégalités, on a donc

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \left[-\frac{(n+1-x)^2}{2(n+1)^2} \right]_n^{n+1} \leq \text{aire}(D_n) \leq \left[-\frac{(n+1-x)^2}{2n(n+1)} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Le majorant vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$. Le minorant est plus grand que $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ c'est à dire que $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$. On a donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \leq \text{aire}(D_n) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

- 1.7.** En sommant les inégalités précédente, on a donc

$$\sum_{k=n}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \leq \sum_{k=n}^N (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Les terme se télescopant, ceci se simplifie en

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \leq u_n - u_{N+1} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(N+1)}$$

En passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, on a donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$

On réordonne cette double inégalité pour obtenir

$$u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2(n+1)} = u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$$

- 1.8.** Si on sait que $\gamma \in [a, b]$ alors $\frac{a+b}{2}$ fournit une approximation de γ à $\frac{b-a}{2}$ près. La question précédente indique que $u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n+1)}$ fournit une approximation de γ à $\frac{1}{4n(n+1)}$ près. Si on veut une approximation à ε près, il suffit de choisir n tel que $n^2 \geq \frac{1}{4\varepsilon}$.

Deuxième partie.

- 2.1.** f_a est dérivable sur $]a, +\infty[$ et

$$\forall x > a, f'_a(x) = h\left(\frac{a}{x}\right) \exp\left(x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)\right) \quad \text{avec} \quad h(u) = \ln(1-u) + \frac{u}{1-u}$$

h est dérivable sur $[0, 1[$ et

$$\forall u \in [0, 1[, h'(u) = \frac{u}{(1-u)^2} \geq 0$$

h est donc croissante sur $[0, 1[$. Comme $h(0) = 0$, h est positive sur $[0, 1[$. On en déduit que f' est positive sur $]a, +\infty[$ et que f est donc croissante sur cet ensemble.

Comme $\ln(1-u) \sim -u$ au voisinage de $+\infty$, on a

$$x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -a$$

La fonction exponentielle étant continue en $-a$, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)\right) = e^{-a}$$

- 2.2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $t \mapsto f_t(n) \ln(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$ est continue sur $]0, n]$ (ou continue sur $]0, n[$ et prolongeable par continuité en n par la valeur 0). La fonction équivaut en 0 à $\ln(t)$ et est donc négligeable (croissances comparées) devant $1/\sqrt{t}$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0, n]$ et son intégrale, I_n , est bien définie.

$g : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. g présente des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

- $g(t) \sim_0 \ln(t) = o(1/\sqrt{t})$ (croissances comparées) et g est donc intégrable au voisinage de 0.
- $g(t) = o_{+\infty}(1/t^2)$ (croissances comparées) et g est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.

g est finalement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale, I , existe a fortiori sur $\mathbb{R}^+$.

- 2.3.** On peut écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_{\mathbb{R}^+} g_n(t) dt \quad \text{avec} \quad g_n(t) = \begin{cases} f_t(n) \ln(t) & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour calculer la limite de (I_n) , on utilise le théorème de convergence dominée. On commence par en vérifier les hypothèses.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit $t > 0$; pour n suffisamment grand, $g_n(t) = f_t(n) \ln(t) \rightarrow e^{-t} \ln(t) = g(t)$ quand $n \rightarrow +\infty$. La suite (g_n) est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers g et g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- D'après la question 2.1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, n[, 0 \leq f_t(n) \leq \lim_{+\infty} f_t = e^{-t}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, n[, |g_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$$

La majoration est encore trivialement vraie si $t \geq n$ ($g_n(t)$ est alors nul). La fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (vu en question 2.2).

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} g(t) dt = I$$

2.4. Le changement de variable $u = t/n$ donne

$$I_n = n \int_0^1 (1-u)^n \ln(nu) du = n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^n du + n \int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du$$

Comme $u \mapsto -\frac{1}{n+1}(1-u)^{n+1}$ est une primitive de $u \mapsto (1-u)^n$, le premier terme du membre de droite vaut $\frac{n}{n+1} \ln(n)$.

$u \mapsto -\frac{1}{n+1}((1-u)^{n+1} - 1)$ est une primitive de $u \mapsto (1-u)^n$. Une intégration par parties donne

$$\forall a \in]0, 1], \int_a^1 (1-u)^n \ln(u) du = \left[-\frac{1}{n+1} ((1-u)^{n+1} - 1) \ln(u) \right]_a^1 + \frac{1}{n+1} \int_a^1 \frac{((1-u)^{n+1} - 1)}{u} du$$

Le terme "tout intégré" est nul en 1 et tend vers 0 quand $a \rightarrow 0$ (on a le produit de $\ln(u)$ par un polynôme en u dont 0 est racine et on obtient le résultat par croissances comparées). En utilisant la factorisation $x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + \dots + 1)$, l'intégrale du membre de droite vaut

$$\sum_{k=0}^n \int_a^1 -(1-u)^k du = - \sum_{k=0}^n \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1} \right]_a^1$$

Il n'y a pas de problème pour faire tendre a vers 0 et cela donne

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

En réunissant tout cela, on a finalement

$$I_n = \frac{n}{n+1} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right)$$

Comme $\frac{n}{n+1} \rightarrow 0$, un passage à la limite donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\gamma$$

2.5. $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1. Cette fonction est donc intégrable sur tout segment $[0, x]$ avec $x > 0$ et $F(x)$ existe (c'est même une intégrale non "généralisée" d'une fonction continue sur un segment).

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et négligeable (croissances comparées) devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x > 0$, c'est donc une fonction intégrable sur $[x, +\infty[$ et $R(x)$

existe.

Soit $x > 0$; la relation de Chasles donne

$$\gamma = - \int_0^x e^{-t} \ln(t) dt - \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$

On va opérer une intégration par parties dans chaque intégrale. Il faut pour cela se ramener à un segment où les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ par le biais de “bornes flottantes”. Dans les deux cas, on primitivera $t \mapsto e^{-t}$; la première fois, la primitive utilisée sera $t \mapsto -(e^{-t} - 1)$ et la seconde fois ce sera $t \mapsto -e^{-t}$. On obtient

$$\forall a \in]0, x], \int_a^x e^{-t} \ln(t) dt = -[(e^{-t} - 1) \ln(t)]_a^x + \int_a^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$$

$$\forall b > x \int_x^b e^{-t} \ln(t) dt = [-e^{-t} \ln(t)]_x^b + \int_x^b \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Avec les primitives choisies, les différents termes admettent une limite quand $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$. Après passage à la limite et simplifications, on obtient

$$\gamma = -R(x) + F(x) + (e^{-x} - 1) \ln(x) - e^{-x} \ln(x) = -R(x) + F(x) - \ln(x)$$

2.6. D’après le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{1 - e^{-t}}{t} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} t^{k-1}$$

Pour tout $k \geq 1$, $h_k : t \mapsto \frac{(-1)^{k-1}}{k!} t^{k-1}$ est une fonction continue sur $[0, x]$ ($x > 0$ étant fixé) et $\|h_k\|_{\infty, [0, x]} \leq \frac{x^{k-1}}{k!}$ est le terme général d’une série convergente. $\sum(h_k)$ est ainsi normalement convergente sur le segment $[0, x]$. On est dans le cas simple où l’interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^{k-1}}{k!} t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} t^{k-1} dt$$

ce qui s’écrit aussi

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = F(x)$$

2.7. Soient $x > 0$ et $N > x$; posons $u_n = \frac{x^n}{n.n!}$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nx}{(n+1)^2}$$

Si $n \geq N > x$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. La suite $(u_n)_{n \geq N}$ est ainsi décroissante. Comme $((-1)^n u_n)$ est une suite alternée de limite nulle, la règle spéciale (utilisable à partir du rang N) indique que

$$\left| \sum_{k \geq N} (-1)^k u_k \right| \leq |u_N|$$

Avec la question précédente, on a donc

$$\left| F(x) - \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} \right| \leq \frac{x^N}{N.N!}$$

Nous n'obtenons pas l'inégalité demandée et il convient donc de poursuivre la majoration. On remarque que

$$\frac{x^N}{N.N!} = \frac{1}{eN} \left(\frac{ex}{N}\right)^N \frac{N^N e}{N!e^N}$$

On pourra conclure si l'on montre que $\frac{N^N}{N!} \frac{e}{e^N} \leq 1$. Il nous reste donc à montrer que

$$\prod_{k=1}^N \frac{N}{ek} \leq \frac{1}{e}$$

Par croissance de la fonction exponentielle, il suffit donc de montrer que

$$\sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{N}{ek}\right) \leq -1$$

ou encore que

$$(*) : \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{k}{N}\right) \geq 1 - N$$

La fonction $x \mapsto \ln(ex)$ étant croissante sur $]0, 1]$, on a

$$\forall k \in [2..N], \forall t \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right], \ln(t) \leq \ln\left(\frac{k}{N}\right)$$

Pour $k = 1$, l'inégalité est encore valable (il faut juste ouvrir l'intervalle en la borne 0). En intégrant ces inégalités (pour $k = 1$, il faut remarquer que $t \mapsto \ln(et)$ est intégrable au voisinage de 0) et en les sommant, on a donc

$$-1 = \int_0^1 \ln(et) dt \leq \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{k}{N}\right)$$

Si $N \geq 2$, on a $-1 \geq 1 - N$ et on obtient le résultat voulu.

Si $N = 1 > x > 0$, on a la majoration voulue dès le début de la question (par $|u_1|$). On a ainsi prouvé que

$$\forall x < N, \left| F(x) - \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} \right| \leq \frac{1}{eN} \left(\frac{ex}{N}\right)^N$$

Remarque : il y a certainement plus simple, mais j'ai essayé de traiter la question comme il m'a semblé "naturel" de le faire au vu de l'énoncé...

Par ailleurs, $\forall t \geq x, 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ (e^{-t} étant positif). En intégrant cette inégalité entre x et $+\infty$ (les intégrales existent bien) on obtient

$$0 \leq R(x) \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x}$$

2.8. Soit $x > 0$ fixé. Pour $N > x$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} - \ln(x) + \gamma \right| = |R(x) + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} - F(x)| \leq \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{eN} \left(\frac{ex}{N}\right)^N$$

Fixons $\varepsilon > 0$; on choisit $x \geq 1$ tel $e^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, par exemple $x = \max(1, \ln(2/\varepsilon))$, et on a alors $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ce x étant fixé, on s'impose de prendre $N \geq 2ex \geq 2e$; on a alors $\frac{ex}{N} \leq \frac{1}{2}$ et donc aussi

$\frac{1}{eN} \left(\frac{ex}{N}\right)^N \leq \frac{1}{2e^2} \left(\frac{1}{2}\right)^N$. Pour N plus grand que $-\log_2(e^2\varepsilon)$, le majorant est plus petit que $\varepsilon/2$.

Pour ce choix de x et N , on a donc

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k.k!} - \ln(x) + \gamma \right| \leq \varepsilon$$

Troisième partie.

- 3.1.** Pour $s \leq 0$, $((-1)^{n-1}/n^s)$ ne converge pas vers 0 et la série associée diverge grossièrement. Pour $s > 0$, $(1/n^s)$ est une suite décroissante, positive, de limite nulle et donc $\sum((-1)^{n-1}/n^s)$ est une série alternée convergente. Ainsi,

$$D(\zeta_a) =]0, +\infty[$$

Posons $g_n : s \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$. (g_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par utilisation de la règle spéciale,

$$\forall a > 0, \forall s \in [a, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k \geq n} g_k(s) \right| \leq |g_n(s)| \leq \frac{1}{n^a}$$

Le majorant est indépendant de n et est de limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$. $\sum(g_n)$ est donc uniformément convergente sur tout ensemble du type $[a, +\infty[$ et donc a fortiori sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$. La somme ζ_a de la série est donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- 3.2.** g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall s > 0, g'_n(s) = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^s}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^s}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée, $t \mapsto \frac{1-s \ln(t)}{t^{s+1}}$ est négative pour $t \geq e^{k/x}$. $(|g'_n(s)|)$ est ainsi décroissante (de limite nulle) à partir du rang $n_s = E(e^{k/s}) + 1$. $\sum(g'_n(s))$ étant alternée, c'est une série convergente et d'après le théorème sur les restes de séries alternées,

$$\forall s > 0, \forall n \geq n_s, \left| \sum_{k=n}^{\infty} g'_k(s) \right| \leq |g'_n(s)|$$

En particulier, on a ($s \mapsto n_s$ décroît)

$$\forall a > 0, \forall s \geq a, \forall n \geq n_a, \left| \sum_{k=n}^{\infty} g'_k(s) \right| \leq \frac{\ln(n)}{n^s} \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$$

Le majorant trouvé tend vers 0 indépendamment de s et on a donc convergence uniforme de $\sum(g'_n)$ sur $[a, +\infty[$. Comme on a aussi convergence simple de $\sum(g_n)$ sur le même ensemble, le cours indique que ζ_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall s > 0, \zeta'_a(s) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^s}$$

- 3.3.** Soit $s > 1$; en séparant les termes d'indices pair et impair, on obtient

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^s} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^s}$$

On complète la première somme du membre de droite en ajoutant les termes d'indices pairs (que l'on doit donc aussi retirer une fois) :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p^s} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^s} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^s}$$

Les différents termes admettent une limite quand $n \rightarrow +\infty$ (car $s > 1$). Après passage à la limite, on obtient

$$\zeta_a(s) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s} \zeta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$$

3.4. Par relation de Chasles, on a

$$s \int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = s \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{n}{t^{s+1}} dt$$

Avec l'indication de l'énoncé, on écrit que

$$s \int_n^{n+1} \frac{n}{t^{s+1}} dt = s \left(\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}} dt - \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}} dt \right) = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}$$

On a finalement

$$s \int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

On peut scinder la somme de droite en deux parties ($s > 1$ suffit à assurer la convergence des sommes écrites). Un changement d'indice ($k = n + 1$) dans la seconde donne alors

$$s \int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k^s}$$

On regroupe les termes d'indices ≥ 2 pour obtenir

$$s \int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

3.5. Il s'agit de montrer que

$$(**) : \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$$

On est tenté d'utiliser l'expression obtenue pour $\zeta(s)$ à la question précédente. Pour interpréter la quantité $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ il est donc "naturel" de chercher une expression de $\frac{1}{s-1}$ sous forme d'intégrale. On a pour cela

$$\int_1^{+\infty} t^s dt = \frac{1}{s-1}$$

Il semble plus intéressant de commencer par former

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt$$

Comme $\frac{s}{s-1} = 1 + \frac{1}{s-1}$, montrer $(**)$ revient à montrer que

$$(**)' : \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt = \gamma - 1$$

Pour tout $s > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{E(t)-t}{t^{s+1}}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geq 1$, $s \mapsto \frac{E(t)-t}{t^{s+1}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Enfin, pour tout $a > 0$ on a

$$\forall s \geq a, \forall t \geq 1, \left| \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} \right| \leq \frac{1}{t^{a+1}}$$

et la fonction majorante est intégrable sur $[1, +\infty[$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres indique que $s \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{E(t)-t}{t^{s+1}} dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, $(**)'$ équivaut à

$$(**)'' : \int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1$$

Pour relier les deux membre, il est naturel de faire apparaître une somme de série dans le membre de gauche. On écrit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \right)$$

Comme on ne peut séparer la somme en deux (séries divergentes), on revient à des sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - \ln(N+1) = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \ln(N+1) - 1$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, cette quantité tend vers $\gamma - 1$ et on obtient $(**)$ ". On a ainsi prouvé que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

3.6. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Cette dérivée est négative sur $[e, +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est donc décroissante sur cet ensemble. La suite $\left(\frac{\ln(n+3)}{n+3} \right)$ est donc décroissante (car $e \leq 3$) et elle est de limite nulle (croissances comparées). La série de terme général $(-1)^n \frac{\ln(n+3)}{n+3}$ est donc celui d'une série alternée qui vérifie la règle spéciale. Cette série est donc convergente.

Utilisons la relation de la question 3.3 en posant $u = s - 1$:

$$\forall u > 0, \zeta(u+1) = \zeta_a(1+u) \frac{2^u}{2^u - 1}$$

ζ_a étant dérivable en 1, on a

$$\zeta_a(1+u) = \zeta_a(1) + u\zeta'_a(1) + o_0(u)$$

De plus,

$$\frac{2^u}{2^u - 1} = 1 + \frac{1}{2^u - 1} = 1 + \frac{1}{u \ln(2)} \frac{1}{1 + \frac{u \ln(2)}{2} + o(u)} = \frac{1}{u \ln(2)} + \frac{1}{2} + o_0(1)$$

On en déduit que

$$\zeta(u+1) = \frac{\zeta_a(1)}{\ln(2)} \frac{1}{u} + \left(\frac{\zeta_a(1)}{2} + \frac{\zeta'_a(1)}{\ln(2)} \right) + o_0(1)$$

Compte tenu de $\zeta_a(1) = \ln(2)$ (question 1.1), on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\zeta'_a(1)}{\ln(2)} \right) + o_1(1)$$

Grâce à la question précédente, on en déduit que

$$\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\zeta'_a(1)}{\ln(2)} = \gamma$$

Compte-tenu de l'expression de ζ'_a , on a

$$S = - \sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = - \left(\zeta'_a(1) - \frac{\ln(2)}{2} \right)$$

L'expression trouvée pour γ devient alors

$$\gamma = \frac{\ln(2) + 1}{2} - \frac{1}{\ln(2)} S$$

Quatrième partie.

4.1. Il s'agit d'une généralisation du théorème de Césaro. On va utiliser une méthode de preuve similaire. Soit $\varepsilon > 0$; comme (a_n) est de limite nulle, il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_k| \leq \varepsilon$. La suite de terme général $\frac{\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_{n_0-1} a_{n_0-1}}{\lambda_0 + \dots + \lambda_n}$ est de limite nulle (le numérateur est constant et le dénominateur de limite infinie puisque terme général d'une suite croissante et divergente). Il existe donc un rang $n_1 \geq n_0$ à partir duquel ce terme est en module plus petit que ε . On a alors, pour $n \geq n_1$,

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k a_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} \right| \leq \left| \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} \lambda_k a_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} \right| + \frac{\sum_{k=n_0}^n \lambda_k |a_k|}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{\sum_{k=n_0}^n \lambda_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} \right) \leq 2\varepsilon$$

Par définition des limites, ceci signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k a_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} = 0$$

4.2. On prouve par récurrence que la propriété

$$\forall k \in \mathbb{N}, (\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}$$

est vraie pour tout entier n .

- Le résultat est vrai au rang 0 ($\forall k, (\Delta^0 u)_k = u_k$).
- Soit $n \geq 0$ tel que le résultat soit vérifié jusqu'au rang n . On a alors pour tout entier k

$$(\Delta^{n+1} u)_k = (\Delta^n u)_k - (\Delta^n u)_{k+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i} - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+1+i}$$

On fait le changement d'indice $j = i + 1$ dans la seconde somme puis on regroupe les termes de mêmes indices pour obtenir

$$(\Delta^{n+1} u)_k = u_k + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) u_{k+i} - (-1)^n u_{k+1+n}$$

D'après la relation dans le triangle de Pascal, $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$. En outre, $u_k = \binom{n+1}{0} u_{k+0}$ et $u_{k+1+n} = \binom{n+1}{n+1} u_{k+n+1}$. Les termes se regroupent donc pour donner la formule au rang $n + 1$.

4.3. n étant fixé, $(\Delta^n a)_k$ est ainsi une suite d'un nombre constant (indépendant de k) de termes tous de limite nulle quand $k \rightarrow +\infty$ (car (a_p) est de limite nulle et donc pour tout i , $a_{k+i} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$).

On fixe maintenant k . D'après la formule de la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |a_{k+i}|$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_n| \leq \varepsilon$. En découpant la somme, on a alors

$$\forall n \geq n_0, \left| \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n_0-1} \binom{n}{i} |a_{k+i}| + \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{i=n_0}^n \binom{n}{i}$$

Comme $\sum_{i=n_0}^n \binom{n}{i} \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$, le second terme du membre de droite est inférieur à ε . On remarque que $\binom{n}{i} \leq n^i$ et que a est bornée (suite convergente ; on note M un majorant de $|a_p|$ pour $p \in \mathbb{N}$). On a alors

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n_0-1} \binom{n}{i} |a_{k+i}| \leq \frac{n^{n_0-1}}{2^n} n_0 M$$

Par croissances comparées, le terme est de limite nulle et donc plus petit que ε pour n assez grand, $n \geq n_1$. On a ainsi

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1), \quad \left| \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \right| \leq 2\varepsilon$$

Par définition des limites, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0$$

Remarque : on ne peut utiliser directement 4.1 car les coefficients λ_i qu'il faudrait introduire dépendent de n ...

4.4. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a (télescopage)

$$\sum_{n=0}^N a_n^{(k)} = (-1)^k \left(\frac{(\Delta^0 a)_k}{2^0} - \frac{(\Delta^{N+1} a)_k}{2^{N+1}} \right)$$

D'après la question précédente, ce terme a une limite quand $N \rightarrow +\infty$. $\sum (a_n^{(k)})_n$ est donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k \frac{(\Delta^0 a)_k}{2^0} = (-1)^k a_k$$

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(\Delta^{n+1} a)_k = (\Delta^n a)_k - (\Delta^n a)_{k+1}$ on a

$$a_n^{(k)} = \frac{(-1)^k}{2^{n+1}} ((\Delta^n a)_k + (\Delta^n a)_{k+1})$$

On somme ces relations pour $k = 0, \dots, K$ et on scinde la somme en deux :

$$\sum_{k=0}^K a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^K (-1)^k (\Delta^n a)_k + \sum_{k=0}^K (-1)^k (\Delta^n a)_{k+1} \right)$$

On fait le changement d'indice $j = k + 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes d'indices communs pour obtenir (télescopage)

$$\sum_{k=0}^K a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{n+1}} ((\Delta^n a)_0 + (-1)^K (\Delta^n a)_{K+1})$$

D'après la question précédente, ce terme a une limite quand $N \rightarrow +\infty$. $\sum (a_n^{(k)})_k$ est donc convergente et

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}$$

4.5. On montre par récurrence que la proposition

la série $\sum (r_m^{(k)})_k$ converge

est vraie pour tout m .

- On a $r_0^{(k)} = (-1)^k a_k$ d'après la question précédente. $\sum (r_0^{(k)})_k$ est donc convergente et sa somme R_0 est égale à S .
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $m \geq 0$. On a

$$r_{m+1}^{(k)} = r_m^{(k)} - a_m^{(k)}$$

qui est la différence des termes généraux de séries convergente (par hypothèse de récurrence et avec la question précédente). $\sum (r_{m+1}^{(k)})_k$ converge. De plus, avec les notations de l'énoncé, on a

$$R_{m+1} = R_m - \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$$

4.6. Quand on somme les relations obtenues à la question précédente, un télescopage s'opère et on obtient

$$\sum_{m=0}^n \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^n (R_m - R_{m+1}) = R_0 - R_{n+1} = S - R_{n+1}$$

En reprenant le premier calcul de la question 4.4 j'obtiens

$$r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k \frac{(\Delta^m a)_k}{2^m}$$

On a donc (avec l'expression obtenue en question 4.2)

$$R_m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} a_{k+i} \right)$$

Pour tout i , $((-1)^k a_{k+i})$ est une suite alternée qui vérifie les hypothèses de la règle spéciale et sa série est donc convergente. Dans l'expression de R_m , on peut donc permuter les sommes (si $\sum (a_k)$ et $\sum (b_k)$ convergent alors $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$) :

$$R_m = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_{k+i}$$

D'après la règle spéciale, $|\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_{k+i}| \leq |a_i|$ et ainsi

$$|R_m| \leq \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} |a_i|$$

Comme $|a_i| \rightarrow 0$, la même preuve qu'en deuxième partie de question 4.3 indique que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m = 0$$

4.7. Comme $R_n \rightarrow 0$, la première égalité obtenue à la question précédente montre que $\frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$ est le terme général d'une série convergente avec

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = S = \sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$$

4.8. Soit g_n la suite de fonctions définie par $g_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1} : x \mapsto g_n(x) - g_n(x+1)$$

f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes les fonctions g_n le sont. On montre par récurrence que la proposition

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (-1)^k g_n^{(k)}(x) \geq 0$$

est vraie pour tout entier n .

- C'est vrai au rang 0 d'après l'hypothèse faite sur f .
- Supposons le résultat vrai à un certain rang n . On a bien sûr

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, g_{n+1}^{(k)}(x) = g_n^{(k)}(x) - g_n^{(k)}(x+1)$$

Si k est pair alors $g_n^{(k)}$ décroît (sa dérivée est négative par hypothèse de récurrence) et $g_{n+1}^{(k)}(x)$ est donc positive. Si k est impair, on a de même $g_{n+1}^{(k)}(x)$ positive. Ainsi, $g_{n+1}(x)$ est du signe de $(-1)^k$ et on a le résultat au rang $n+1$.

Une récurrence immédiate montre que la proposition

$$\forall k \in \mathbb{N}, (\Delta^n a)_k = g_n(k)$$

est vraie pour tout n . D'après le résultat de la première récurrence (avec $k=0$) ces quantités sont positives.

On montre alors par récurrence que la propriété

$$0 \leq (\Delta^m a)_0 \leq a_0$$

est vraie pour tout m .

- C'est vrai pour $m=0$ (on a $(\Delta^0 a)_0 = a_0 = f(0) \geq 0$ puisque $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$).
- Supposons le résultat vrai à un rang $m \geq 0$ donné. On a $(\Delta^{m+1} a)_0 = (\Delta^m a)_0 - (\Delta^m a)_1$ et $(\Delta^m a)_1 \geq 0$ donne

$$(\Delta^{m+1} a)_0 \leq (\Delta^m a)_0 \leq a_0$$

Enfin, $0 \leq (\Delta^{m+1} a)_0$ a été vu en première partie de question.

Il nous reste à diviser par $2^{m+1} > 0$ pour obtenir

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leq \frac{a_0}{2^{m+1}}$$

4.9. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$; f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$$

f vérifie donc les hypothèses de la question précédente. La suite de terme général $a_k = f(k)$ est décroissante et de limite nulle. On a vu en question 1.1 que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \ln(2)$$

D'après la question 4.7 (les hypothèses de cette question ont été vérifiées) on a donc

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \ln(2)$$

On obtient une approximation de $\ln(2)$ en calculant une somme partielle de la série précédente. Si on considère la somme partielle d'ordre n (qui possède $n+1$ termes), l'erreur commise est

$$\left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a_0}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Cinquième partie.

5.1. On a

$$b_k - b_{k+1} = \int_0^1 x^k(1-x)w(x) dx \geq 0$$

puisque l'intégrale d'une fonction positive est positive (les bornes étant dans le bon sens).

Pour étudier la suite (b_k) , on peut utiliser le théorème de convergence dominée.

- Pour tout k , $g_k : x \mapsto x^k w(x)$ est une fonction continue.
- (g_k) converge simplement vers 0 sur $]0, 1[$ et cette limite simple est continue.
- Pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $|g_k(x)| \leq w(x)$. Le majorant est indépendant de k et intégrable sur $]0, 1[$ (fonction positive dont l'intégrale existe).

Le théorème s'applique donc et indique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0$$

5.2. On montre par récurrence sur n que P_n est un polynôme de degré n .

- C'est vrai par définition pour P_0 et P_1
- Soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n . P_{n+1} est alors la somme d'un polynôme de degré $n+1$ et d'un autre de degré $n-1$; c'est donc un polynôme de degré $n+1$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on a

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

En prenant $\theta = \arccos(x)$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-1, 1], T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

x étant fixé dans $[0, 1]$ (pour que $1-2x \in [-1, 1]$), $(T_n(1-2x))$ et $(P_n(x))$ sont deux suites ayant les mêmes deux premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Ces deux suites sont donc égales et

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = T_n(1-2x)$$

5.3. L'idée la plus immédiate est celle de la récurrence, l'hypothèse étant formulée par l'énoncé.

La formule est correcte aux rang 0 et 1 et il suffit qu'on la prouve au rang $n+1$ en la supposant correcte aux rangs n et $n-1$. Avec cette hypothèse, on a une expression de P_n et une de P_{n-1} . On en déduit, après regroupement des termes de même degré que

$$2(1-2x)P_n(x) - P_{n-1}(x) = 1 + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \alpha_m x^m$$

où l'on a

$$\alpha_{n+1} = -(-1)^n 2^{2n+2} = (-1)^{n+1} 2^{2(n+1)}$$

$$\alpha_n = (-1)^n \left(2^{2n} + \frac{n}{2n-1} \binom{2n-1}{2n-2} 2^{2n} \right) = (-1)^n 2^{2n} (1+n) = (-1)^n 2^{2n} \frac{n+1}{2n+1} \binom{2n+1}{2n}$$

et pour $m \in [1..n-1]$,

$$\alpha_m = (-1)^m 2^{2m} \left(\frac{2n}{n+m} \binom{n+m}{2m} + \frac{n}{n+m-1} \binom{n+m-1}{2m-2} - \frac{n-1}{n+m-1} \binom{n+m-1}{2m} \right)$$

En revenant à l'expression de $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, on obtient

$$\alpha_m = (-1)^m 2^{2m} \frac{n}{n+m} \frac{(n+m)!}{(2m)!(n-m)!} \left(2 + \frac{2m(2m-1)}{(n+m-1)(n-m+1)} - \frac{(n-1)(n-m)}{n(n+m-1)} \right)$$

La parenthèse se simplifie en $\frac{(n+1)(n+m)}{n(n-m+1)}$ et ainsi

$$\alpha_m = \frac{n+1}{n+m+1} \frac{(n+m+1)!}{(2m)!(n-m+1)!} = \frac{n+1}{n+m+1} \binom{n+m+1}{2m}$$

Par la relation de récurrence définissant la suite (P_k) on a donc

$$P_{n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \frac{n+1}{n+1+m} \binom{n+1+m}{2m} 2^{2m} x^m$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

Remarque : tous les calculs faits au brouillon n'ont pas été reportés mais les étapes principales sont écrites ce qui est nécessaire puisque l'énoncé donnait le résultat.

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-1) = \sum_{m=0}^n \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} > 0$$

puisque la somme est composée de termes tous > 0 .

- 5.4.** On remarque tout d'abord que $P_n(-1) - P_n(x)$ est un polynôme (de degré n) dont -1 est racine et donc factorisable par $1+x$. La fonction Q_n définie par l'énoncé se simplifie donc et est bien polynomiale (de degré $n-1$). Plus précisément,

$$P_n(-1) - P_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} (1 - (-x)^m) = (1+x) \sum_{m=0}^n \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} (1 + (-x) + \dots + (-x)^{m-1})$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{m=0}^n \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} (1 + (-x) + \dots + (-x)^{m-1})$$

Le coefficient de x^k dans $Q_n(x)$ s'obtient en prenant la somme des coefficients de x^k dans chacun des polynômes de la somme. Ce coefficient est non nuls pour $m \geq k-1$. On a donc

$$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \text{ avec } \alpha_k = \sum_{m=k+1}^n \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} (-1)^k$$

On en déduit alors que

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \int_0^1 x^k w(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k b_k$$

Avec l'expression de α_k , on a finalement

$$s(n) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_{n,k} b_k \text{ avec } c_{n,k} = \sum_{m=k+1}^n \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m}$$

- 5.5.** La suite de terme général $x_n = P_n(-1)$ vérifie

$$x_0 = 1, x_1 = 3 \text{ et } \forall n \geq 1, x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 6r + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $3 \pm \sqrt{8}$ et il existe donc des constantes a et b telles que pour tout n , $x_n = a(3 + \sqrt{8})^n + b(3 - \sqrt{8})^n$. Les données initiales permettent d'obtenir $a = 1/2$ et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-1) = \frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n \right)$$

D'après la définition de la suite (b_k) , on a

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x)^k w(x) dx$$

Soit $g_k : x \mapsto (-x)^k w(x)$; la suite (g_k) est constituée de fonctions continues et la série associée converge simplement sur $]0, 1[$ vers $x \mapsto \frac{w(x)}{1+x}$ qui est continue sur $]0, 1[$. Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n g_k(x) \right| = w(x) \frac{|1 - (-x)^{n+1}|}{1+x} \leq \frac{2w(x)}{1+x} \leq 2w(x)$$

Le majorant est indépendant de n et est intégrable sur $]0, 1[$. Le théorème de convergence dominée s'applique et indique que

$$S = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x} dx$$

On a donc

$$s(n) - S = \int_0^1 \left(Q_n(x) - \frac{1}{1+x} \right) w(x) dx = - \int_0^1 \frac{P_n(x)}{P_n(-1)(1+x)} w(x) dx$$

D'après la question 5.2 (et le lien entre P_n et T_n) on a $|P_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. On en déduit que

$$|s(n) - S| \leq \frac{1}{|P_n(-1)|} \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x} dx = \frac{S}{|P_n(-1)|}$$

Enfin, $|P_n(-1)| \geq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{8})^n$ et on a finalement

$$|s(n) - S| \leq \frac{2S}{(3 + \sqrt{8})^n}$$

5.6. On commence par regarder la première boucle. On montre par récurrence qu'à l'entrée de la boucle d'indice numéro k , la valeur de d_0 est $P_k(-1)$ et celle de d_1 est $P_{k+1}(-1)$.

- Pour $k = 0$, il s'agit de voir les valeurs initiales de d_0 et d_1 qui sont bien $1 = P_0(-1)$ et $3 = P_1(-1)$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang k . On effectue alors la boucle de numéro k . La nouvelle valeur de d_1 est $6P_{k+1}(-1) - P_k(-1) = P_{k+2}(-1)$ et celle de d_0 est $P_{k+1}(-1)$. On a donc le résultat au rang $k + 1$.

On sort de la boucle avant d'entamer la boucle numéro $n - 1$ et d_1 vaut alors $P_n(-1)$.

On passe à l'analyse de la seconde boucle. On peut montrer par récurrence qu'à la fin de la boucle numérotée k , les valeurs des variables sont

$$c = (-1)^k c_{n,k}, \quad s = \sum_{i=0}^k (-1)^i c_{n,i} b_i, \quad b = (-1)^k \frac{n}{n+k+1} \binom{n+k+1}{2(k+1)} 2^{2k+1}$$

La preuve est un peu fastidieuse. Elle a été menée au brouillon mais n'est pas reprise ici : je considère comme suffisant d'explicitier l'invariant de boucle précédent. On sort de la boucle à la fin de l'étape $n - 1$ et la valeur de sn est alors celle de $s(n)$.

5.7. Si on choisit $w = 1$, on obtient $b_k = \frac{1}{k+1}$ et

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$$

Le calcul de $s(n)$ avec l'algorithme précédent (les b_k sont connus) donne une valeur approchée de $\ln(2)$. Il suffit, pour obtenir une approximation à ε près de choisir n tel que $\frac{2\ln(2)}{(3+\sqrt{8})^n} \leq \varepsilon$.