Corrigé succinct X-ens PSI 2007 par Christophe Hénocq

1.1 On applique la formule de Taylor avec reste intégral à $f : x \longmapsto \ln x$ à l'ordre $n+1$. Cela donne :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.$$

Il est ensuite facile de montrer que la valeur absolue de l'intégrale est majorée par $\dfrac{1}{n+2}$, ce qui entraîne $\ln(2) = \zeta_a(1)$.
1.2 Il suffit de choisir n tel que $n+1 > \varepsilon$. la somme partielle d'ordre n de la série définissant $\zeta_a(1)$ convient.
1.3 On a facilement $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$, par exemple en appliquant l'inégalité des accroissements finis à ln sur $[k, k+1]$. On en déduit, en additionnant : $u_n \in [0,1]$.
1.4 On en déduit aussi l'inégalité $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle converge.
1.5 Dessin à l'appui, l'aire de D_n est $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}$.
1.6 On utilise la convexité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Sur le segment $[n, n+1]$ sa courbe est située entre la tangente au point d'abscisse $n+1$ et la corde. On arrive ainsi à l'encadrement :

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2(n+1)^2} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

1.7 On a $u_n - \gamma = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$. En utilisant l'encadrement précédent, on en déduit en additionnant : $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{2n}$. En écrivant $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n+1)}$, on obtient l'encadrement demandé.
1.8 On obtient une approximation de γ à la précision $\dfrac{1}{4n(n+1)}$ en prenant $u_n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n(n+1)}$. On choisit pour n le premier entier tel que $\frac{1}{4n(n+1)} < \varepsilon$

2.1 On étudie la fonction f_a. On a $f_a'(x) = f_a(x)\Big(\ln\big(1-\dfrac{a}{x}\big)+\dfrac{a}{x-a}\Big)$. On pose $g_a(x) = \ln\big(1-\dfrac{a}{x}\big)+\dfrac{a}{x-a}$. On a $g_a'(x) = -\dfrac{a^2}{x(x-a)^2} < 0$. Comme $\lim\limits_{+\infty} g_a = 0$, g_a est positive et f_a est croissante. En $+\infty$, $\ln(f_a(x)) \sim -a$ d'où $\lim\limits_{+\infty} f_a = e^{-a}$.
2.2 L'intégrale I_n converge car lorsque $t \to 0$, $f_t(n) \sim \ln t$. Pour l'intégrale I le même argument prévaut en 0 et en $+\infty$, $e^{-t}\ln t = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$.
2.3 On applique le théorème de convergence dominée : on considère la fonction h_n définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $h_n(t) = f_t(n)$ si $t \leq n$ et $h_n(t) = 0$ si $t > n$. On a $I_n = \int_{]0,+\infty[} h_n$. La suite (h_n) converge simplement vers la fonction $h : t \longmapsto e^{-t}\ln t$ et est majorée en valeur absolue par $|h|$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$(en utilisant $\ln(1+u) \leq u$).
2.4 On calcule I_n en posant $t = nu$: $I_n = n\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n(\ln(u)+\ln(n))du = \frac{n}{n+1}\ln n + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)du$.
On pose dans la dernière intégrale $v = 1-u$ et on l'intègre par parties, ce qui donne

$$\int_0^1 v^n \ln(1-v)dv = \Big[\frac{v^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-v)\Big]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-v^{n+1}}{1-v}dv = -\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

On en tire l'expression de I_n demandée. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $-\gamma = I$.
2.5 Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 par 1. Donc $F(x)$ est bien défini. Par ailleurs en $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{t} = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$, ce qui montre l'existence de $R(x)$. On écrit $\gamma = -\displaystyle\int_0^x e^{-t}\ln t\,dt - \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$ et on intègre chacune de ces deux intégrales par parties en veillant à ce que les crochets soient bien définis : $\gamma = \Big[(e^{-t}-1)\ln t\Big]_0^x + F(x) + \Big[e^{-t}\ln t\Big]_x^{+\infty} - R(x) = F(x) - \ln x - R(x)$
2.6 On a $F(x) = \displaystyle\int_0^x \Big(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!}\Big)\,dt = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!}$ car la série entière que l'on primitive a un rayon de convergence infini.
2.7 La suite $\Big(\dfrac{x^n}{nn!}\Big)_{n\geq N}$ est décroissante parce que le quotient de deux termes consécutifs est $\dfrac{nx}{(n+1)^2} \leq 1$.
En utilisant le critère spécial on peut écrire :

$$\left|F(x) - \sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!}\right| = \left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!}\right| \leq \frac{x^N}{NN!}$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit de montrer que $N! \geq N^N e^{-(N-1)}$. Posons $x_N = N!N^{-N}e^{N-1}$.
La suite (x_N) est croissante : $\dfrac{x_{N+1}}{x_N} = e\left(\dfrac{N}{N+1}\right)^N = exp\Big[1 - N\ln\big(1+\dfrac{1}{N}\big)\Big] \geq 1$ d'après $\ln(1+u) \leq u$.
En écrivant $x_N \geq x_1 = 1$, on obtient la première inégalité demandée. Par ailleurs, avec une intégration par parties : $0 \leq R(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leq \frac{e^{-x}}{x}$
2.8 On a

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!} - \ln x - \gamma\right| = \left|\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!} - F(x)\right| + |R(x)| \leq \frac{1}{eN}\Big(\frac{ex}{N}\Big)^N + \frac{e^{-x}}{x}$$

On choisit donc x tel que $\dfrac{e^{-x}}{x} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et N tel que $\dfrac{1}{eN}\Big(\dfrac{ex}{N}\Big)^N < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3.1 On montre la convergence uniforme de la série de fonctions définissant ζ_a sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}_+^*$.
Si $s \in [a,b]$, la suite $\Big(\dfrac{1}{n^s}\Big)_{n\geq 1}$ décroît et converge vers 0. Donc, en appliquant le critère spécial, $\zeta_a(s)$ est bien défini et on a la majoration du reste d'ordre n : $\left|\displaystyle\sum_{k\geq n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}\right| \leq \dfrac{1}{(n+1)^s} \leq \dfrac{1}{(n+1)^a}$. Lest fonctions $s \longmapsto \dfrac{1}{n^s}$ étant continues, ζ_a est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
3.2 De la même façon, on établit la convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}_+^*$ de la série des dérivées : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n^s}$. On fixe $s \in [a,b]$, on étudie la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^s}$. On a $h'(x) = \dfrac{1 - s\ln x}{x^{s+1}}$.
Donc h décroît dès que $x \geq e^{\frac{1}{s}}$. La suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^s}\right)$ décroît à partir du rang $E(e^{\frac{1}{a}}+1)$. On en déduit, d'après le critère spécial, la convergence de la série des dérivées et on a la majoration uniforme du reste : $|R_n| \leq \dfrac{\ln(n+1}{(n+1)^s} \leq \dfrac{\ln(n+1}{(n+1)^a} \to 0$
3.3 Pour $s > 1$ on a $\zeta_a(s) - \zeta(s) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^s} = \sum_{p\geq 1}\frac{-2}{(2p)^s} = -2^{1-s}\zeta(s)$

3.4 On remarque $\dfrac{1}{n^s} = s\displaystyle\int_n^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{s+1}}$. Donc $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} s\int_n^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{s+1}} = s\sum\int_1^{+\infty}\varphi_n(t)\,dt$ où l'on définit φ_n par : $\varphi_n(t) = \dfrac{1}{t^{s+1}}$ si $t \geq n$ et $\varphi_n(t) = 0$ si $t \in [1, n]$. La série $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$: $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\varphi_n(t) = \dfrac{E(t)}{t^{s+1}}$. La série $\displaystyle\sum\int_{[1,+\infty[}|\varphi_n|$ converge. On peut donc intervertir intégrale et somme, ce qui donne l'égalité demandée.

3.5 On a $s\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^s} = \dfrac{s}{s-1}$. On en déduit : $\zeta(s) - \dfrac{s}{s-1} = \displaystyle\int_1^{+\infty} s\left(\dfrac{E(t)}{t^{s+1}} - \dfrac{1}{t^s}\right)dt$. Montrons que, lorsque $s \to 1^+$, la limite de cette intégrale est $\gamma - 1$. Pour cela considérons une suite (s_n) de $]1, +\infty[$ convergeant vers 1 et appliquons le théorème de convergence dominée : $s_n\left(\dfrac{E(t)}{t^{s_n+1}} - \dfrac{1}{t^{s_n}}\right) \longrightarrow \dfrac{E(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t}$ et on a la majoration $s_n\left|\dfrac{E(t)}{t^{s_n+1}} - \dfrac{1}{t^{s_n}}\right| \leq \dfrac{sup(s_n)}{t^2}$.

On en déduit que lorsque $s \longrightarrow 1^+$, $\zeta(s) - \dfrac{s}{s-1} \to \displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{E(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right)dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\dfrac{k}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right)dt$.

On trouve ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{E(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right)dt = \gamma - 1$. Donc $\zeta(s) - \dfrac{s}{s-1} = \gamma - 1 + o(1)$ quand $s \longrightarrow 1$, d'où l'on tire $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$.

3.6 On a $\zeta(s) = \dfrac{\zeta_a(s)}{1 - 2^{1-s}}$. La fonction ζ_a étant dérivable en 1 on a au voisinage de 1 :

$$\zeta_a(s) = \zeta_a(1) + \zeta_a'(1)(s-1) + o(s-1) = \ln 2 + \left(\frac{\ln 2}{2} - S\right) + o(s-1)$$

Par ailleurs $1 - 2^{1-s} = (s-1)\ln 2 - \dfrac{\ln^2 2}{2}(s-1)^2 + o[(s-1)^2]$.

On trouve en faisant le quotient $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \left(\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{S}{\ln 2}\right) + o(1)$ d'où l'expression de γ demandée.

4.1 Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$. Posons $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k$. On a, pour $n > n_0$: $\dfrac{1}{s_n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k\right| \leq \dfrac{1}{s_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}\lambda_k|a_k| + \varepsilon \longrightarrow \varepsilon$. Donc, à partir d'un certain rang $\dfrac{1}{s_n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k\right| \leq 2\varepsilon$.

4.2 On introduit l'endomorphisme t de l'espace vectoriel des suites complexes qui à une suite u fait correspondre la suite tu définie par $(tu)_k = u_{k+1}$. On a $\Delta = Id - t$. Comme $Id \circ t = t \circ Id$, $\Delta^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}t^i$, ce qui donne la formule demandée.

4.3 $(\Delta^n a)_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1^i\binom{n}{i}a_{k+i} \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$ car il s'agit d'une somme de $n+1$ suites qui convergent vers 0.

Par ailleurs, k étant fixé, on fixe $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $i \geq n_0 \Longrightarrow |a_{k+i}| < \varepsilon$. Soit $n > n_0$. On a

$$\frac{1}{2^n}|(\Delta^n a)_k| \leq \frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=0}^{n_0}(-1)^i\binom{n}{i}a_{k+i}\right| + \varepsilon$$

Or, pour $i \in [\![0, n_0]\!]$, $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i} = \dfrac{n(n-1)...(n-i+1)}{2^n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ par croissances comparées.

On peut conclure qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{1}{2^n}|(\Delta^n a)_k| \leq 2\varepsilon$.

4.4 D'après la question précédente $\frac{1}{2^n}(\Delta^n a)_k \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. La série $\sum_{n\geq 0} a_n^{(k)}$ est une série télescopique convergente dont la somme est $(-1)^k a_k$.
A n fixé,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2^{n+1}} \left[2\binom{n}{i} - \binom{n+1}{i}\right] \left(\sum_{k\geq i}(-1)^{k-i}a_k\right) + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k\geq n+1}(-1)^{n+1-k}a_k$$

On pose $\varphi_n = \sum_{k\geq n+1}(-1)^k a_k$, ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} \left[2\binom{n}{i} - \binom{n+1}{i}\right] \left(\sum_{k=i}^{n}(-1)^k a_k + \varphi_n\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\varphi_n$$

Or $\sum_{i=0}^{n} \left[2\binom{n}{i} - \binom{n+1}{i}\right] - 1 = 0$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} \left[2\binom{n}{i} - \binom{n+1}{i}\right] \left(\sum_{k=i}^{n}(-1)^k a_k\right)$.
On permute les symboles $\sum$ et on remarque, en utilisant la formule du triangle de Pascal que $\sum_{i=0}^{k} \left[2\binom{n}{i} - \binom{n+1}{i}\right] = \binom{n}{k}$, d'où l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{n+1}}(\Delta^n a)_0$.
4.5 On a $r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{(-1)^k}{2^m}(\Delta^m a)_k = \frac{1}{2^m}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} [(-1)^k a_{k+i}]$. C'est une combinaison linéaire de termes généraux de séries vérifiant les hypothèses du critère spécial donc convergentes. Il en résulte que $R_m = \sum_{k\geq 0} r_m^{(k)}$ converge.

4.6 $R_m = \frac{1}{2^m}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k a_{k+i}\right)$ On sait que $\sum_{k\geq 0}(-1)^k a_{k+n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ comme reste d'une série convergente. On peut appliquer 4.3 d'où $\lim_{m\to+\infty} R_m = 0$.

Par ailleurs $\sum_{m=0}^{n} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k\geq 0} a_m^{(k)}\right) = \sum_{k\geq 0}(r_0^{(k)} - r_{n+1}^{(k)}) = R_0 - R_{n+1}$.
4.7 Dans l'égalité précéente, on fait tendre n vers $+\infty$. Cela donne :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = R_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} r_0^{(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = S$$

4.8 On montre $(\Delta^n a)_k \geq 0$ par récurrence sur n. C'est une évidence pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$. Supposons que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^+$ vérifiant l'hypothèse : $\forall k \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}^+,\ (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$, on a, en considérant la suite $a = (f(k))_{k\in\mathbf{N}}$, $(\Delta^n a)_k \geq 0$.
Démontrons la propriété au rang $n+1$. On a $\Delta^{n+1}a = \Delta^n(\Delta a)$.
Or Δa est la suite définie par $(\Delta a)_k = f(k) - f(k+1)$.
On introduit donc la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(x+1)$. On a $(-1)^k g^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(x) - (-1)^k f^{(k)}(x+1)$. Mais l'hypothèse faite sur f permet de dire que, pour tout k la fonction $(-1)^k f^{(k)}$ est décroissante, ce qui permet de dire $(-1)^k g^{(k)}(x) \geq 0$. Ainsi on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à g, ce qui achève la démonstration.
On en déduit

$$0 \leq \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \frac{a_0}{2^{m+1}} - \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \binom{m}{i+1} a_{i+1} = \frac{a_0}{2^{m+1}} - m\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{a_{i+1}}{i+1}$$

Mais, en appliquant le résultat précédent à la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x+1)}{x+1}$ (il est facile de montrer, en utilisant la formule de Leibnitz, que g vérifie la bonne hypothèse), on voit que la dernière somme est positive et on en déduit l'inégalité demandée.

4.9 On applique ce qui précède à la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ qui vérifie l'hypothèse de la question 4.8.

Ainsi $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$. Cette dernière série est à termes positifs. Son reste d'ordre m est majoré d'après la question précédente par $\displaystyle\sum_{k\geq m+1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{m+1}}$. Il suffit de choisir m tel que $m\ln 2 \geq -\ln(\varepsilon)$.

L'expression de $\ln 2$ ainsi trouvée est :

$$\ln 2 = \sum_{m\geq 0} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{2^{m+1}} \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(m+1)2^{m+1}} \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i+1} (-1)^i\right)$$

On retrouve l'expression $\ln 2 = \displaystyle\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(m+1)2^{m+1}} = -\ln\Big(1-\frac{1}{2}\Big)$

5.1 L'intégrale définissant b_k est définie car $0 \leq x^k w(x) \leq w(x)$. La suite (b_k) est décroissante et converge vers 0 d'après le théorème de convergence dominée.

5.2 Par une récurrence immédiate le degré de P_n est n.

De plus on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. On en déduit pour tout n : $P_n(x) = T_n(1-2x)$.

5.3 On raisonne par récurrence $P_1(x) = 1-2x$; $P_2(x) = 1-8x+8x^2$. On suppose la formule vraie jusqu'au rang $n \geq 2$. On remplace dans la relation de récurrence définissant P_{n+1}. C'est un calcul très fastidieux que j'ai fait ! On obtient la formule au rang $n+1$!! On en déduit $P_n(-1) > 0$.

5.4 On a :

$$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} \left(\frac{1-(-x)^m}{1+x}\right) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k}(-1)^k x^k$$

En intégrant sur le segment $[0,1]$ on obtient le résultat.

5.5 La suite $(P_n(-1))$ satisfait la relation de récurrence $P_{n+1}(-1) = 6P_n(-1) - P_{n-1}(-1)$ avec au départ $P_0(-1) = 1$ et $P_1(-1) = 3$. On trouve $P_n(-1) = \frac{1}{2}[(3-\sqrt{8})^n + (3+\sqrt{8})^n]$.

En appliquant le théorème de convergence dominée aux sommes partielles, on a :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x)^k w(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k w(x)\right) dx = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}\,dx$$

On en déduit $|S - s(n)| = \dfrac{1}{P_n(-1)} \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,dx\right| \leq \dfrac{S}{P_n(-1)} \leq \dfrac{2S}{(3+\sqrt{8})^n}$ (on a utilisé l'expression de P_n en fonction de T_n qui permet d'écrire $|P_n| \leq 1$)

5.6 Cet algorithme construit $d1 = P_n(-1)$ puis $sn = s(n)$

5.7 En prenant $w : x \longmapsto 1$ on trouve $b_k = \dfrac{1}{k+1}$ et on obtient une approximation de $\ln 2$ à $\varepsilon-$près dès que $\dfrac{2S}{(3+\sqrt{8})^n} < \varepsilon$