DU DISCRET VERS LE CONTINU

On rêve depuis les premiers moments des mathématiques de déduire le continu du discret. Qu'a-t-on réussi? Est-ce satisfaisant?

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

Un des apports majeurs des mathématiques est la démonstration par le mathématicien Georg Cantor (1845-1918) qu'il existe différents types d'infinis, les infinis «discrets» dont on peut numéroter les éléments comme les nombres entiers (et aussi les ensembles finis et les structures finies tels les graphes), et les infinis «plus grands», par exemple les infinis du « continu » dont les nombres réels (et plus généralement le temps, le plan, l'espace, etc.). Nous verrons ces notions au cours de l'article.

La maîtrise du discret semble plus facile que celle du continu et les mathématiciens s'interrogent pour savoir si on pourrait éviter le continu en trouvant une transition du discret vers le continu. Est-ce possible? La question se formule de diverses façons: 1) Peut-on passer sans à-coups du discret au continu? 2) Peut-on construire le continu à partir du discret? 3) Le continu se réduit-il au discret? 4) Peut-on comprendre le continu à partir du discret?

Les tentatives pour répondre à ces questions sont au cœur des mathématiques depuis plus de deux millénaires; aujourd'hui, avec les systèmes de calculs formels, on y parvient un peu mieux, même si la logique moderne nous suggère qu'aucune solution définitive n'est possible. Voyons une partie de l'histoire de la question.

Pythagore soutenait que tout se ramène aux nombres entiers. Il a le premier subi une grande déception en voulant concevoir les grandeurs géométriques avec les seuls nombres entiers. Il a découvert en effet – lui-même ou un de ses disciples – que le rapport de la diagonale d'un carré à son côté n'est pas égal au rapport de deux nombres entiers. En langage moderne, on exprime cette découverte en disant que «$\sqrt{2}$ est irrationnel».

Démontrons cette irrationalité en utilisant l'affirmation que «le carré d'un nombre impair est impair», ce qui est évident en écrivant $(2a+1)^2=4a^2+4a+1$.

Supposons $\sqrt{2}=n/m$, n et m des entiers. On simplifie la fraction n/m en divisant par 2 le nombre n et le nombre m s'ils sont tous les deux pairs, et on recommence jusqu'à ce que n ou m soit impair. On part donc de $\sqrt{2}=n/m$ avec n ou m impair. En élevant au carré, on obtient $2=n^2/m^2$ donc $2m^2=n^2$ avec n ou m impair. Puisque $2m^2$ est pair, n^2 est pair et donc n est pair et m est impair. On écrit $n=2p$, avec p entier. On a $2m^2=n^2=4p^2$, ce qui en simplifiant par 2 donne $m^2=2p^2$, dont on déduit que m est pair. On a prouvé que n et m étaient pairs, en contradiction avec notre point de départ. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un quotient de deux entiers.

1 LES FRACTALES

Le problème de savoir si l'on peut construire le continu avec le discret se retrouve d'une manière imagée avec les fractales. Les fractales sont des objets infiniment découpés dans lesquels on découvre sans cesse de nouveaux détails quand on les regarde de plus en plus près. Ils évoquent l'infini du continu dont aucun grossissement ne fait apparaître les points qui le composent. Pourtant les fractales sont définies en général par des programmes qui sont des objets discrets composés d'un nombre fini de symboles et dont l'ensemble peut être énuméré *(voir le texte)*. Ce serait une sorte de réduction du continu par le discret. L'article montre que cela n'est malheureusement pas aussi simple !

Œuvre fractale de Jérémie Brunet

Il existe aussi des démonstrations géométriques de ce résultat, mais on ne sait pas laquelle Pythagore connaissait. On va voir que ce résultat d'irrationalité joue un rôle dans le problème de la réduction du continu au discret.

LE DISCRET, C'EST LE DÉNOMBRABLE

Les nombres entiers, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ sont le repère pour le discret. Ils se mettent en liste ; on peut les énumérer. Si on adjoint les entiers négatifs, ce qui donne l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, on peut encore en faire l'énumération : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..., n, -n, ...\}$.

Si on sait énumérer les éléments d'un ensemble E, c'est-à-dire en faire une liste e_0, e_1, e_2, ..., e_n,... alors les éléments de E se trouvent isolés les uns des autres, et donc E est discret. Les ensembles qu'on peut ainsi énumérer sont qualifiés de dénombrables.

Considérons maintenant les nombres rationnels, notés $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire toutes les fractions n/d avec n et d entiers. Par exemple 1/2, $-7/11$, 131/59. C'est un peu surprenant, mais on peut encore énumérer $\mathbb{Q}$. L'énumération, comme nous allons le voir, s'accomplit par la méthode des paquets finis que nous retrouverons plus loin pour les nombres algébriques et les nombres calculables. On sépare $\mathbb{Q}$ en une infinité de paquets finis qu'on place les uns derrière les autres, ce qui donne une énumération de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire ce que l'on nomme une « bijection » entre les entiers et $\mathbb{Q}$.

Le premier paquet P_1 contient uniquement 0, le second, P_2, comporte encore un seul élément $1/1 = 1$, le troisième, P_3, contient 2/1 et 1/2. Le n-ième paquet, P_n, contient les nombres rationnels dont la somme du numérateur et du dénominateur est n, soit les nombres $(n-1)/1$, $(n-2)/2$, $(n-3)/3$, ..., $2/(n-2)$, $1/(n-1)$ auxquels on retire ceux qui, par simplification des fractions, redonnent des nombres déjà obtenus. Disposer les uns derrière les autres les paquets $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ définit une énumération de tous les rationnels positifs. Son début est 0, 1, 2/1, 1/2, 3/1, 2/2, 1/3, 4/1, 3/2, 2/3, 1/4, 5/1, 4/2, 3/3, 2/4, 1/5, ... qui après simplification et retrait des doublons devient 0, 1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 5, 1/5, ...

Cette énumération conduit à celle de $\mathbb{Q}$, l'ensemble de tous les nombres rationnels positifs ou négatifs : on reprend la liste obtenue en faisant suivre chaque élément r autre que 0, par $-r$. Les rationnels sont donc réduits aux entiers. Les rationnels appartiennent à l'ordre du discret : $\mathbb{Q}$ est discret. C'est un peu une surprise, car entre deux rationnels $a<b$, il y en a

toujours une infinité d'autres, mais c'est ainsi: bien que «dense», ℚ se réduit à ℕ!

A-t-on atteint le continu à partir du discret en considérant ℚ? Ce serait la réduction attendue. Malheureusement non! Avec ℚ, on n'a pas le continu… car il manque par exemple $\sqrt{2}$. C'est ce que Pythagore avait vu! L'ensemble ℚ est discret et dense, mais ce n'est pas le continu!

Pour tenter d'atteindre le continu, ajoutons à ℚ les solutions des équations du type $X^2=2$, ce qui nous donnera $\sqrt{2}$. Ajoutons aussi toutes les racines carrées d'entiers $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. Pour se donner plus de chances de ne manquer aucun nombre réel, ajoutons encore tous les nombres réels solutions d'équations du type [polynôme à coefficients entiers] = 0. Exemples: $X^5+3X^2-4=0$; $11X^9+9X^8-7X^7+5X^2+3=0$. On obtient ce qu'on dénomme l'«ensemble des nombres algébriques», noté A.

L'ensemble contient énormément de nombres réels. On a donc l'espoir qu'il corresponde au continu, c'est-à-dire à l'ensemble de tous les nombres réels, noté ℝ. Si A est discret et atteint le continu, on aura réduit le continu au discret.

On peut énumérer les éléments de A. Voici le principe de cette énumération qui procède à nouveau par la méthode des paquets finis.

Pour le paquet P_1, on prend tous les polynômes de degré ≤ 1 n'utilisant pour leurs coefficients que des nombres entiers en valeur absolue ≤ 1: $X=0$; $-X=0$; $X+1=0$; $X-1=0$; $-X+1=0$; $-X-1=0$. Leurs racines sont les nombres 0, 1, −1. C'est P_1.

Pour les paquets P_n, avec $n>1$, on prend tous les polynômes de degré $\leq n$, n'utilisant pour leurs coefficients que des entiers dont la valeur absolue est inférieure ou égale à n. Il n'y en a qu'un nombre fini et chacun n'a qu'un nombre fini de racines. Toutes ces racines constituent le paquet fini P_n.

En plaçant les uns derrière les autres les éléments de P_1, puis de P_2, etc., on fait une liste de tous les nombres algébriques. Comme précédemment, en supprimant les répétitions on a une bijection entre ℕ et A.

Avec A, a-t-on atteint le continu? Si c'est le cas alors on aura réussi la réduction du continu au discret. La question est: tout nombre réel est-il algébrique? Malheureusement non! La réponse a attendu deux millénaires, mais il n'y a aucun doute, certains nombres réels, dont π, ne sont pas algébriques: A n'est pas le continu! La tentative de transition du discret vers le continu par les nombres algébriques ne fonctionne pas!

La démonstration qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas algébriques s'est déroulée en plusieurs étapes, mais son point culminant est la preuve proposée par Ferdinand von Lindemann en 1882 que le nombre π n'est pas algébrique (*voir l'encadré 2*).

Un savant du XVI^e siècle en quête de la quadrature du cercle.

2

LA QUADRATURE DU CERCLE

Prendre l'ensemble des nombres rationnels (les quotients de nombres entiers) auxquels on ajoute $\sqrt{2}$ (solution de $X^2 - 2 = 0$) et tous les nombres solutions d'équations du type [polynôme à coefficients entiers] = 0, définit l'ensemble des nombres algébriques A. C'est un ensemble très gros de nombres réels.
Est-ce le continu ? La réponse est non, et l'histoire qui aboutit à cette conclusion s'est étalée sur deux millénaires ; c'est celle de la quadrature du cercle.
Anaxagore (– 500 à – 428 avant notre ère), dont la légende dit qu'il s'ennuyait en prison à Athènes, se proposa de quarrer le cercle. Le problème consiste à se donner un cercle et à tenter de dessiner un carré de même aire en s'imposant (a) de n'utiliser qu'une règle non graduée et un compas et (b) de ne procéder qu'à un nombre fini de tracés intermédiaires.
Le problème passionna les mathématiciens, amateurs ou non.
En 1775, l'Académie royale des sciences de Paris, décida de ne plus examiner les mémoires nombreux et faux qu'on lui envoyait sur la question. Elle publia l'avertissement : « L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel. »
La solution du problème de la quadrature du cercle viendra des travaux des mathématiciens au XIX^e siècle. En 1837, le mathématicien français Pierre Wantzel (1814-1848) caractérisa les nombres qu'on peut construire à la règle et au compas. Il prouva que ce sont uniquement les nombres définissables par radicaux carrés, c'est-à-dire les nombres obtenus à partir des entiers et de l'application un nombre fini de fois des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de racine carrée, exemple : $(1+\sqrt{3}-\sqrt{5+\sqrt{7}})/\sqrt{123}$
Or on prouve que ces nombres sont algébriques, ce qui, avec la démonstration de Ferdinand von Lindemann, en 1882, que le nombre π n'est pas algébrique, établit définitivement qu'il n'existe aucune solution au problème de la quadrature du cercle.

Une autre preuve, moins directe, provient d'un article publié par Georg Cantor en 1891. À l'aide de ce qu'on nomme un « raisonnement diagonal », il a montré que l'ensemble des nombres réels n'est pas énumérable. Puisque A l'est, c'est qu'il manque des nombres réels dans A (*voir l'encadré 4*).

NOMBRES CALCULABLES

Au XX^e siècle, on a été plus loin dans la tentative de réduire le continu au discret en ajoutant encore des nombres à l'ensemble A. On a considéré les « nombres définissables par programmes (ou par algorithmes) », aussi dénommés « nombres réels calculables ». Nous noterons P cet ensemble. Cette fois, le nombre π n'y échappe pas, il est dans P, car on connaît des algorithmes qui calculent π avec la précision qu'on souhaite. Les nombres e, $\sin(1)$, $\sqrt{\pi}$, π/e et bien d'autres sont dans P. En réalité, tout nombre réel envisagé par un mathématicien jusqu'à récemment est dans P.

Pour conclure à une réussite avec P de la réduction du continu au discret, il faudrait prouver (a) que P est discret et (b) que tout nombre réel est dans P.

Commençons par (a). Oui, P est discret, car on peut faire la liste de ses éléments par la formidable méthode des paquets.

Une fois qu'on a choisi le langage de programmation pour écrire les programmes calculant les nombres de P, il est facile de montrer que P se met en liste par la méthode des paquets finis. Un programme n'est qu'une suite finie de caractères et les symboles utilisés pour écrire les programmes sont en nombre fini $s_1, s_2, \dots s_k$. Le paquet P_n est composé de tous les nombres définissables par programme dont au moins un programme qui le calcule comporte moins de n symboles. Le paquet P_n est fini, car les programmes de n symboles calculant des nombres réels sont moins nombreux que les suites de n symboles d'un ensemble de k éléments, suites qui sont en nombre fini (il y en a k^n).

Il faut remarquer que ces nombres calculables sont effectivement utilisables en informatique et que les logiciels de calcul formel comme Maple, Sage, Mathematica permettent la manipulation exacte de certains d'entre eux. En leur demandant par exemple le carré de $\sqrt{2}$, ils ne se trompent pas en répondant 1,999999999, mais indiquent bien 2. Les manipulations que font ces programmes ne sont pas des manipulations de valeurs approchées de ces nombres, mais des manipulations exactes. Voir dans l'encadré 3 d'autres exemples de cette merveilleuse capacité des logiciels de calcul formel qui leur permet de manipuler sans erreur des nombres comme π, e, $\sqrt{2}$, etc., mais aussi des sommes infinies. Avec ces logiciels, on a le sentiment de manipuler le continu à l'aide de programmes, donc avec du discret.

Ce n'est qu'une illusion, car il existe des nombres réels non calculables. Plusieurs arguments le démontrent comme dans le cas de A. Il y a d'abord l'argument de Cantor : puisque P est dénombrable et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas, c'est qu'il existe des nombres réels non calculables. Alan Turing a su en 1936 donner des exemples précis de tels nombres non calculables par programme. Bien que contenant presque tous les nombres utiles aux mathématiciens, P n'est pas le continu !

Est-ce que cela signifie définitivement que le continu ne se réduit pas au discret ? La réponse est délicate ! Les échecs rencontrés avec $\mathbb{Q}$, A et P signifient que pour réduire le continu, il faut s'y prendre autrement qu'en passant par des objets finis que sont les couples d'entiers, les polynômes à coefficients entiers ou les programmes qui ne nous font jamais sortir du dénombrable et donc échouent à atteindre $\mathbb{R}$.

Au XIX^e siècle, plusieurs méthodes de « construction » des réels à partir des nombres

3

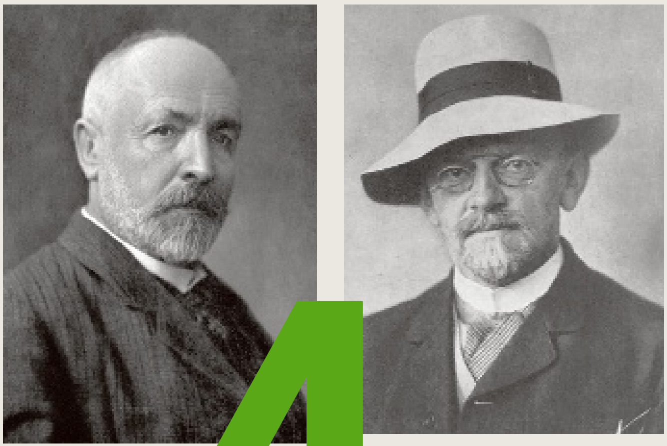
LES LOGICIELS SAVENT UTILISER LES NOMBRES RÉELS

On croit parfois que l'informatique ne peut manipuler les nombres réels qu'en les tronquant, par exemple en considérant que π = 3,1415926 et en omettant les décimales qui suivent. C'est faux.
Les logiciels de calcul formel savent utiliser certains nombres réels calculables d'une manière assez satisfaisante. Ils ne les considèrent pas comme des suites infinies de décimales, il faudrait une mémoire infinie, mais ils se débrouillent à partir de leurs définitions pour les traiter correctement.
Ces logiciels sont des tentatives à l'aide du discret (l'ensemble des programmes informatiques est discret, *voir le texte*) de s'approprier le continu des nombres réels.
Ce qu'on a réussi avec eux est utile et remarquable comme le montrent les exemples de calculs ci-dessous menés avec le programme Maple. Malgré tout, c'est seulement une partie du continu qui est atteinte et la réduction est imparfaite à cause des nombres réels non calculables.
Pour un programme de calcul formel, le nombre « racine de 2 » est connu par la propriété qui le définit. Si on l'élève au carré, on obtient 2 exactement, pas 1,9999999 ou 2,00000001. Le nombre π est aussi connu du programme. Les lignes en noir sont les questions posées au programme par l'utilisateur ; les réponses du programme sont en rouge en dessous.

```
a := sqrt(2) ; b := sqrt(2)^2 ; c := b – 2
a := √2 ; b := 2 ; c := 0
a := (sqrt(2) – Pi) ; b := (a + Pi)^2 ;
c := b – 2 ; d := sin(Pi/3) ; e := d^2
a := √2 - π ; b := 2 ; c := 0 ; d := √3/2 ;
e := 3/4
```

Le programme de calcul formel maîtrise aussi certaines sommes infinies, comme la série des inverses des carrés $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$ qui vaut exactement $\pi^2/6$.

```
a := sum(1/2^n, n = 1..infinity) ;
b := sum(1/2^ (3*n + 7), n = 1..infinity) ;
c := sum(1/n^2, n = 1..infinity) ;
d := sum(6/((Pi^2)*n^2),
n = 1..infinity) ;
e := cos(sum(Pi*n/(2^n),
n = 1..infinity)) ;
a := 1 ; b := 1/896 ; c := π²/6 ; d := 1 ; e := 1
```



4

Cantor et Hilbert étaient favorables à l'infini actuel.

LE PARADIS DES INFINIS OUVERT PAR CANTOR

Dans la démonstration dénommée « diagonale », Cantor donna un procédé pour construire à partir d'une énumération quelconque de réels, un réel qui n'apparaît pas dans l'énumération. Cela signifie qu'aucune énumération des réels n'est exhaustive. (énumérer est équivalent à affirmer la dénombrabilité).
Pour démontrer que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, Cantor s'intéressa à l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1, et montra qu'il n'est pas dénombrable. Pour toute partie dénombrable de ces nombres, Cantor montra qu'il manque au moins l'un d'eux.
Cette partie est énumérée par une suite $a = (a_1, a_2, a_3, ...)$. Chaque terme de cette suite a une écriture décimale avec une infinité de chiffres après la virgule soit :
$a_i = 0, a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3} ...\, a_{in} ...$
On construit maintenant un nombre réel x de l'intervalle [0, 1[en considérant le n-ième chiffre après la virgule de a_n.
Par exemple, pour la suite a :
$a_1 = 0{,}0405440...$
$a_2 = 0{,}1423012...$
$a_3 = 0{,}8315036...$
$a_4 = 0{,}3220436...$
$a_5 = 0{,}1407316...$
$a_6 = 0{,}9927848...$
Le nombre réel x est construit par la donnée de ses décimales en suivant par exemple la règle : si la n-ième décimale de a_n est différente de 4, alors la n-ième décimale de x est 4, sinon elle vaut 3. Avec la suite ci-dessus, la règle donne $x = 0{,}434443...$ (voir https ://fr.wikipedia.org/wiki/Argument_de_la_diagonale_de_Cantor)
Le nombre x est dans l'intervalle [0, 1[mais ne peut pas être dans la suite $(a_1, a_2, a_3, ...)$, car il n'est égal à aucun des nombres de la suite : il ne peut pas être égal à a_1 car la première décimale de x est différente de celle de a_1, de même pour a_2 en considérant la deuxième décimale, etc.
Avec ce type d'argument diagonal Cantor démontre aussi que l'ensemble des parties d'un ensemble est plus grand que cet ensemble.
Pour mener de tels raisonnements, il faut considérer l'infini comme une globalité manipulable (« l'infini actuel »), ce qui n'est pas accepté par tous les mathématiciens ; dès leurs publications certains d'entre eux comme Leopold Kronecker et Henri Poincaré s'y opposèrent. Toutefois le mathématicien allemand David Hilbert affirma « Du paradis créé pour nous par Cantor, personne ne nous chassera... »
Face à ses étonnantes découvertes, Cantor confia un jour à un de ses rares amis, Richard Dedekind : « Je le vois, mais je ne le crois pas. »

entiers ont été proposées. La principale méthode de construction est pratiquée par tout le monde sans le savoir, et les mathématiciens savent la rendre parfaitement rigoureuse. Elle consiste à dire que les nombres réels (et donc le continu) sont les nombres qu'on obtient quand on met une file infinie de chiffres décimaux derrière la virgule :

1/3 = 0,333333...

0,1234567891011121314... (constante de David Champernowne)

0,101001000100001... des séquences de 0 de plus en plus longues

et tout ce que vous pouvez imaginer ou obtenir par des tirages au hasard.

Cette méthode, et d'autres qui portent les noms de « construction des nombres réels par les coupures de Dedeking » ou « par les suites de Cauchy », sont parfaites du point de vue du mathématicien qui pense donc obtenir grâce à elles une construction du continu avec du discret, puisque les chiffres décimaux utilisés dans les développements illimités des réels sont un ensemble discret de dix éléments. Au-delà de l'exploit mathématique de ces découvertes, on peut cependant se demander si ces méthodes de construction des réels peuvent être considérées comme des réductions du continu au discret. La réponse est plutôt non.

MANIPULER L'INFINI COMME UN OBJET

En effet, en mettant en œuvre des suites illimitées de chiffres décimaux ou des ensembles infinis de rationnels pour la méthode des coupures, les constructions des réels ne sont pas vraiment celles du continu à partir du discret des entiers ou des dix chiffres décimaux, mais manipulent des ensembles infinis de nombres discrets pris en quantité infinie. Autrement dit, ce n'est que si l'on accepte de manipuler l'infini dit « actuel » (donné comme un tout ou comme un objet) que les constructions fonctionnent.

L'infini actuel s'oppose à l'infini « potentiel », accepté par tous les mathématiciens, où l'infini est un processus qui se prolonge arbitrairement longtemps. Henri Poincaré (1854-1912) refusait, par exemple, de considérer l'infini actuel.

En utilisant, pour construire les réels, des suites infinies de chiffres ou des structures dont les composants sont des ensembles infinis, les approches du XIXe siècle renoncent au discret et ne construisent donc pas le continu à partir du discret. Sur un plan logique, on passe des axiomes de Peano, pour le discret de l'arithmétique, aux axiomes de la théorie des ensembles dénommés « axiomes de Zermelo-Fraenkel » (ZF). Or ZF est un système bien plus puissant qui introduit un risque de contradiction supérieur à celui qu'on a en manipulant des entiers.

5 L'ILLUSION DES SOLUTIONS ENSEMBLISTES

Plusieurs constructions des réels à partir des rationnels proposées au XIXe siècle prétendent réduire le continu par le discret. Elles se placent au sein de la théorie des ensembles, et acceptent donc l'idée de l'infini actuel – l'infini existant comme un tout. Sont-elles acceptables ?
Cette façon de procéder serait satisfaisante si nous avions une idée claire des ensembles, et que l'axiomatisation de la théorie des ensembles usuelle de Zermelo-Fraenkel (ZF) ne présentait pas de difficulté. Or ce n'est pas le cas. L'une des raisons graves de douter de la réalité des ensembles est que ZF est incomplet (il ne répond pas à toutes les questions qu'on peut se poser) et qu'on n'arrive pas à le compléter, même quand il s'agit de questions très élémentaires.
L'exemple le plus frappant de cette étrangeté de la notion d'ensemble en mathématiques est l'hypothèse du continu (HC) formulée par Georg Cantor en 1878 et qui le préoccupa jusqu'à la fin de sa vie. La question est : existe-t-il un infini intermédiaire entre celui des nombres entiers ℕ et celui des nombres réels ℝ ? Affirmer que non, c'est faire l'hypothèse du continu. Cantor ne sut pas répondre ; certains jours il pensait disposer d'un argument prouvant qu'elle était vraie, puis peu de temps après, il découvrait que son argument ne fonctionnait pas ; il trouvait alors un argument montrant qu'elle était fausse, etc.
Kurt Gödel et Paul Cohen montrèrent qu'à partir des axiomes de ZF on ne pouvait ni démontrer HC, ni démontrer sa négation. L'intuition semble inopérante pour nous guider à préférer HC ou sa négation. Récemment, le logicien Hugh Woodin a proposé des arguments pour prouver la négation de HC, puis quelque temps après a changé de point de vue et introduit un programme de travail en faveur de HC. Ses hésitations montrent bien que, plus d'un siècle après son introduction, notre idée des ensembles reste en définitive très vague, faisant douter de la confiance qu'on peut lui accorder. Le grand logicien de l'université de Stanford, Solomon Feferman, élève d'Alfred Tarski et responsable de l'édition des œuvres complètes de Kurt Gödel, pense que HC n'est pas une question mathématique bien définie, et donc que la recherche de nouveaux axiomes ou de nouvelles méthodes pour la résoudre comme Hugh Woodin la pratique est vouée à l'échec.
Il résulte de cette situation qu'on ne peut pas considérer que les constructions des nombres réels fondées sur la théorie des ensembles soient vraiment des réductions du continu par le discret.

Le mathématicien qui s'interroge sur les ensembles est confronté à une série de problèmes qui montrent clairement que s'appuyer sur la théorie des ensembles revient à postuler un monde délicat et dangereux, peut-être plus délicat et dangereux que celui du continu qu'il prétend construire.

AU-DELÀ DU NON DÉNOMBRABLE

Interrogeons par exemple la théorie des ensembles sur ce qu'elle dit des différents infinis. En notant P(E) l'ensemble des parties de E, Cantor démontre que ℕ, P(ℕ), P(P(ℕ)), P(P(P(ℕ))), … correspondent chacun à des infinis différents, de plus en plus grands. Il y a une infinité d'infinis. On montre que ℝ et P(ℕ) sont des infinis équivalents, c'est-à-dire qu'ils ont le même cardinal qui mesure la taille des ensembles. Se pose alors une question naturelle que Cantor a formulée le premier. Est-ce qu'il y a un infini entre ℕ et ℝ ? On ne peut prétendre disposer d'une vision ensembliste des objets mathématiques claire et parfaitement acceptable si on ne répond pas à cette question.

Affirmer qu'il n'y a pas d'infinis de taille intermédiaire entre ℕ et ℝ, c'est faire l'hypothèse du continu (HC). Aujourd'hui, on ne sait pas si elle est vraie ou fausse. Il a été démontré que ni HC, ni non-HC ne peuvent se déduire de ZF. Il faudrait donc ajouter des axiomes à ZF pour répondre. Lesquels ? On cherche, mais on n'a pas trouvé de solution définitive et certains mathématiciens pensent qu'il n'y en a pas (*voir l'encadré 5*).

Le bilan est sans appel. Les tentatives de réduction du continu de ℝ à partir du discret de ℕ, soit échouent comme on l'a vu avec ℚ, A, P, soit obligent à introduire l'infini actuel qu'on ne réussit pas à maîtriser.

Une autre manifestation de cet échec est le théorème de Löwenheim-Skolem. En quelques mots : les seules logiques qu'on sait axiomatiser et maîtriser sont celles fondées sur le calcul des prédicats du premier ordre. Les axiomes de Peano et ZF sont formulés dans ce cadre logique. Or si un système d'axiomes dans ce cadre est non contradictoire, alors il possède un modèle dénombrable. Ce théorème montre que la logique qu'on maîtrise le mieux ne peut pas produire le non-dénombrable et donc le continu. Il signifie en un sens qu'on ne réussit pas à axiomatiser de manière satisfaisante le continu.

Les mathématiques ne formulent donc aucune transition satisfaisante du discret vers le continu. Bien que notre intuition semble accéder à une compréhension assez claire du continu, la fonder oblige à utiliser des idées abstraites, notamment celle d'infini actuel, que le mathématicien accepte par commodité, mais dont la maîtrise est limitée comme le montre notre incapacité à résoudre la question pourtant simple que pose l'hypothèse du continu. Le continu reste, en un sens, mystérieux et indompté ! ■

BIBLIOGRAPHIE

J. P. Delahaye, **Vidéo de la conférence ALEA du 8 mars 2022, « Transitions mathématiques entre discret et continu » :** bit.ly/PLS546_Delahaye_video

J. Patarin, **Théorie des ensembles et logique mathématique. Des infinis mathématiques aux théorèmes de Gödel,** Ellipses, 2020.

J. P. Delahaye, **Le Fascinant Nombre** π, Belin, 2018.

A. Hagar, **Discrete or Continuous ? : The Quest for Fundamental Length in Modern Physics,** Cambridge University Press, 2014.

A. Lesne, **The discrete versus continuous controversy in physics,** *Math. Struct. in Comp. Science*, 2007. bit.ly/PLS546_Delahaye_Lesne

LE SQUELETTE EN ARMURE

L'histoire est éternelle : un jeune homme s'éprend d'une femme dont le père s'oppose à l'alliance, provoquant la fuite du couple. Étoffons un peu cette trame. L'homme est un Viking, sa promise la fille d'un prince de Norvège, et les tourtereaux échappent à l'ire paternelle en s'embarquant pour s'établir sur le continent américain. Là, l'amoureux érige une tour pour sa belle, qui meurt peu après. Le veuf désespéré s'empale sur la pointe de son épée, et devient un « squelette en armure ». Fin ? Non, car ce récit est au cœur d'une autre épopée qui mêle peinture, poésie et archéologie.

Reprenons. Tout commence avec justement un squelette mis au jour en 1832 à Fall River, dans le Massachusetts, aux États-Unis. Inhumé en position assise, l'individu était paré d'un plastron triangulaire en laiton et d'une ceinture de tubes du même matériau. Des pointes de flèches métalliques complétaient la sépulture. Sa postérité ne tint qu'à un fil… car la dépouille disparut en 1843 lors de l'incendie du musée qui l'abritait. Mais elle eut le temps d'inspirer à Henry Longfellow, auteur très populaire au milieu du XIXe siècle, un poème épique paru en 1841, le *Squelette en armure*, que l'on a résumé plus haut.

Le peintre américain Walter Crane s'empara ensuite de cette histoire pour composer en 1883 une fresque de plus de 30 mètres de long, en sept toiles, chacune bordée d'extraits du poème de Longfellow (*voir la reproduction ci-dessus*). L'ensemble ornait la salle à manger de la villa Vinland, la résidence d'été de la riche philanthrope Catharine Lorillard Wolfe, sise à Newport, à Rhode Island, à peine à 30 kilomètres au sud de Fall River. En 2019, l'œuvre est acquise par la métropole de Rouen-Normandie et, après restauration, exposée au musée des Beaux-Arts de la ville depuis 2022.

C'est ici que les archéologues interviennent. Et ils se sont prononcés sur toutes les facettes de l'histoire du « squelette en armure ». D'abord, parmi de multiples hypothèses formulées à propos de la sépulture de Fall River, et certaines furent audacieuses, car certains y ont vu celle d'un Phénicien, d'un Carthaginois, d'un Égyptien… une seule fait désormais consensus après analyse des artefacts métalliques (leur reproduction) : l'homme enterré est un Amérindien du XVIIe siècle, vraisemblablement de la tribu des Narragansetts ou des Wampanoags.

Autre élément de l'histoire, la tour. De fait, la ville de Newport s'enorgueillit d'un édifice circulaire, visible sur l'une