RENDEZ-VOUS

RUINER LE CASINO OU SE RUINER ?

Les mathématiques des jeux de casino indiquent comment jouer… pour perdre le moins possible.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Quand vous jouez à la roulette, le léger avantage probabiliste en faveur d'un casino peut-il être renversé en votre faveur, et si ce n'est pas le cas combien vous coûte-t-il de jouer ? Pour les mathématiciens, la réponse à ces questions est sans appel : vous ne retournerez pas l'avantage du casino, et plus vous jouerez, plus – statistiquement – vous perdrez de l'argent.

Bien sûr cela n'exclut pas qu'il y ait parfois des gagnants. Mais c'est uniquement parce qu'ils ont de la chance, jamais parce qu'ils ont trouvé une méthode imparable pour gagner ! Les martingales à la roulette n'existent pas, sauf si vous trichez en manipulant discrètement le cylindre de la roulette avant son utilisation, ou si vous mesurez avec un appareillage caché les paramètres de la trajectoire de la bille au moment de son lancer et que cela vous permet de savoir où elle va aller avant qu'il devienne impossible de poser de nouvelles mises – mais la faisabilité de ces méthodes est douteuse.

L'idée un peu moralisatrice qu'en jouant contre un casino on finit toujours par se ruiner est mathématiquement exacte. Elle a été démontrée par Pierre de Fermat, Blaise Pascal et Christian Huygens au XVIIe siècle, et récemment confirmée par des théorèmes plus généraux. Elle s'exprime sous plusieurs formes, que nous allons expliquer. Ces formes sont particulièrement intéressantes, car elles nous indiquent comment jouer si on y tient vraiment et qu'on souhaite… perdre le moins possible.

On suppose dans un premier temps qu'on joue à la roulette en utilisant la « stratégie des mises constantes ». On ne s'intéresse ici qu'à ce que le casino appelle les chances simples : pair, impair, passe, manque, noir ou rouge (*voir l'encadré 1*). À chaque étape du jeu, on mise une unité – par exemple, 1 euro – sur une chance simple – par exemple, rouge. Si le tirage est favorable (rouge), on reprend sa mise et le casino y ajoute la même somme. Si le tirage est défavorable (noir), le casino se saisit de la mise, qui est perdue. Aux coups suivants, on continuera toujours de miser une unité sur une des chances simples.

SUPERSTITION ET ROULETTE DÉFAILLANTE

Le paramètre important, pour un joueur qui cherche à comprendre la nature du jeu, est la probabilité p qu'il a de gagner à chaque nouvelle mise. Pour une roulette de casino, s'il n'y avait que les 36 numéros rouges et noirs et pas de 0 (vert), ce serait comme à pile ou face : $p = 1/2$. Dans le cas d'une roulette avec 37 numéros (incluant le 0 vert), ce serait $18/37 = 0{,}4865$ – le zéro ponctionne $1/37 = 0{,}0270$. Pour la règle française complète, rendue plus compliquée par le système des mises prisonnières, la probabilité de gagner devient $p = 36/73 = 0{,}4932$ – contre une probabilité de victoire de 37/73 pour le casino, qui ponctionne donc en moyenne $1/73 = 0{,}0137 = 1{,}37\,\%$ des mises.

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

Une superstition dont il faut absolument se libérer consiste à croire qu'il y a un intérêt à prendre en compte les résultats tombés aux coups précédents. Certains soutiennent, par exemple, qu'il faut cesser de jouer rouge si le rouge vient de tomber cinq fois consécutivement. D'autres croient le contraire. Il est vrai qu'étudier le passé est utile si la roulette est défaillante : si une zone devient moins probable qu'une autre parce que la roulette penche un peu, ou à cause de cases légèrement plus grandes que d'autres pour recevoir la bille lancée par le croupier. Il faudrait alors observer pendant un très grand nombre de lancers les résultats tombés, et jouer ensuite en fonction des probabilités déterminées par l'observation de la roulette défaillante. Cela permettrait de concevoir une stratégie gagnante, mais seulement si le défaut de la roulette est important. Les casinos laissent courir des histoires où cette méthode aurait permis à certains joueurs de faire fortune.

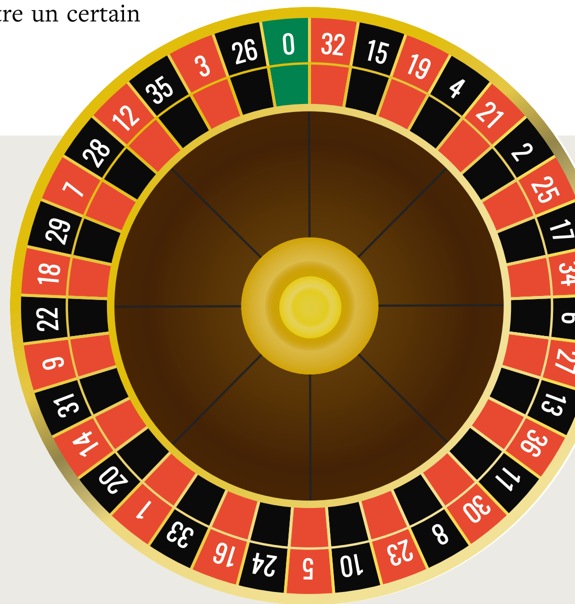
Dans la suite de l'article, nous considérerons que les roulettes sont mécaniquement parfaites, ce qui est probable puisque c'est l'intérêt des casinos. Prendre en compte les coups passés n'a alors plus aucun intérêt. On dit que « le hasard n'a pas de mémoire », et cela s'applique aussi au Loto.

FACE À UN CASINO INFINIMENT RICHE

Le premier « théorème de la ruine certaine » indique que face à un casino disposant de quoi payer les gagnants sans limite, si vous jouez indéfiniment viendra inévitablement un moment où vous aurez perdu tout l'argent que vous aviez en entrant dans le casino : avec une probabilité de 100 %, celui qui joue contre un casino infiniment riche finira ruiné. Ce premier résultat est amusant et surprenant, car il est vrai même pour le pile ou face, où $p=1/2$.

Si vous disposez d'une somme n que vous jouez unité par unité jusqu'à tout perdre, avec $p<1/2$ la durée moyenne de la partie est $T=n/(1-2p)$. À la roulette française, $p=36/73<1/2$, donc avec une somme de 5 euros joués un par un jusqu'à tout perdre, la partie durera en moyenne $T=5/(1-72/73)=365$ coups, ce qui procurera peut-être un certain

La roulette est un jeu de hasard où l'on parie sur la case où tombera une bille lancée par le croupier.



LA ROULETTE FRANÇAISE

1

Dans les casinos français, le cylindre de la roulette comporte 37 cases où la bille lancée par le croupier peut s'arrêter, chacune ayant la même probabilité de recevoir la bille : 1/37.
Nous ne nous intéressons qu'aux chances simples : pair (numéros 2, 4, 6, 8, ...), impair (numéros 1, 3, 5, 7, ...), rouge (numéros 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36), noir (numéros 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35), passe (numéros de 19 à 36) et manque (numéros de 1 à 18).
La 37e case est le zéro, de couleur verte. Elle n'est ni paire, ni impaire, ni rouge, ni noire, ni passe, ni manque. Quand vous misez sur une chance simple, si vous gagnez vous reprenez votre mise et la banque y ajoute l'équivalent. Sinon la banque prend votre mise, sauf lorsque le zéro tombe.
Lorsque le zéro tombe, votre mise est dite « prisonnière ».
Il y a plusieurs règles énoncées par les casinos pour traiter ce cas, nous retenons la plus simple. Votre mise vous sera rendue – sans rien en plus – si au tirage suivant la chance simple choisie tombe. Si c'est la chance simple inverse (noir est l'inverse de rouge, pair l'inverse d'impair...), vous perdrez votre mise, et si le zéro tombe à nouveau votre mise restera prisonnière et attendra le tirage suivant, où la même règle s'appliquera, etc. Avec cette règle, quand le zéro est tombé, vous avez une chance sur deux de récupérer votre mise. Cette règle est statistiquement équivalente à dire que, lorsque le zéro tombe, on vous rend la moitié de votre mise – ce qui est parfois appliqué.
Pour 1 euro engagé en excluant les cas neutres où vous récupérez la mise sans rien gagner, votre probabilité de gagner est $p = 36/73 = 0,4932$, et de perdre de $37/73 = 0,5068$.
Les calculs montrent que, pour chaque euro misé et en excluant les cas neutres, vous perdez $1/73 = 0,0137$ euro et ne récupérez donc que $R = 72/73 = 0,9863$ euro. On dit que le taux de retour aux joueurs est de 98,63 %.
C'est mieux que si le zéro vous faisait simplement perdre car vous ne récupéreriez alors que $R' = 36/37 = 0,9730$ pour chaque euro misé, vous faisant perdre 0,0270 euro, avec une probabilité de gagner de $p = 0,4865$.
Le système français des mises prisonnières est donc avantageux pour les joueurs.
Il n'est pas utilisé à l'étranger. D'ailleurs, dans de nombreux pays, en plus du zéro, il y a un double zéro, et même parfois un triple zéro, toutes ces variantes rendant le jeu plus favorable aux casinos et donc plus défavorable aux joueurs.
Mieux vaut donc jouer en France, et uniquement sur les chances simples, qui sont moins pénalisées que les mises sur les numéros pleins (un seul numéro) à cheval (2 numéros), en transversale (3 numéros), en carré, en sixtain, par douzaine ou par colonne, qui ne donnent un retour aux joueurs que de $36/37 = 0,9730$.

amusement ! Avec $p=1/2$, la durée moyenne d'une partie avant de tout perdre est infinie. Cela ne signifie pas que chaque partie est infinie – aucune ne l'est – mais que les parties longues sont nombreuses, et d'autant plus nombreuses qu'elles sont longues.

Pour le plaisir de la spéculation, posons-nous la question : que se passe-t-il lorsque le jeu est favorable au joueur, $p>1/2$ (par exemple, parce que la roulette est défaillante et que le joueur sait en tirer un avantage) ? On montre qu'alors, face à un casino infiniment riche, un joueur a une probabilité strictement positive de gagner à l'infini, c'est-à-dire d'accroître petit à petit son pécule sans limite. Le casino lui ferait partager son infinie richesse ! Les calculs indiquent que, partant d'une somme initiale de n euros et avec une probabilité de gagner à chaque coup $p>1/2$, le joueur deviendra infiniment riche avec une probabilité $Q(n)=1-r^n$, où $r=(1-p)/p$. Par exemple, si $p=2/3$ et que le joueur commence avec 1 euro, il deviendra infiniment riche avec une probabilité de $Q(1)=1/2$.

Bien sûr, si p est plus proche de 1/2, alors en partant de la même somme le joueur deviendra infiniment riche avec une plus faible probabilité : par exemple, pour $p=6/11$, on obtient $Q(1)=1-5/6=1/6$. Dans ce cas, pour augmenter ses chances le joueur pourrait partir de 10 euros : sa probabilité de devenir infiniment riche serait alors de $Q(10)=1-(5/6)^{10}=0{,}8385$, soit plus de 83 %.

UN COMBAT À DEUX JUSQU'À LA RUINE

Ces premiers résultats sont amusants mais peu sérieux : personne n'est infiniment riche, pas plus les casinos que les joueurs. Tout au plus, en ayant beaucoup de chance, vous ferez sauter la banque, c'est-à-dire que vous gagnerez la somme maximale que le casino est disposé à perdre.

Ce qui correspond à la réalité est une situation du type suivant. Un joueur A joue la stratégie des mises constantes, unité par unité, avec un adversaire B (le casino) et une probabilité p de gagner à chaque coup. Le joueur A dispose au départ de la somme a, et B de la somme b. Le jeu se poursuit jusqu'à la ruine de l'un des deux joueurs. La question qui se pose est alors celle des probabilités de chacune des deux issues : A s'empare de $a+b$ et B est ruiné, ou B s'empare de $a+b$ et A est ruiné. Le théorème de la ruine certaine distingue deux cas selon que $p=1/2$ ou $p\neq 1/2$.

Si $p=1/2$, la probabilité pour le joueur A de l'emporter vaut $a/(a+b)$, et bien sûr la probabilité pour B de l'emporter est le complément à 1 : $b/(a+b)$.

Sans surprise, si $p=1/2$ et $a=b$, le jeu est parfaitement équitable et chaque joueur aura une chance sur deux de l'emporter. En revanche, si le casino B est 100 fois plus riche que le joueur A ($b=100\times a$), alors le joueur A fera sauter la banque avec une probabilité assez faible de 1/101.

Ces résultats signifient que même à pile ou face, la seule chose qui compte dans une lutte jusqu'à la ruine est la somme qu'on prend le risque de perdre : celui qui risque le plus est celui qui a le plus de chances de gagner.

Lorsque $p\neq 1/2$, les calculs indiquent que le joueur A gagnera avec la probabilité $p(a,b)=(r^a-1)/(r^{a+b}-1)$, où $r=(1-p)/p$.

Si $p<1/2$ (cas d'un vrai casino) le joueur A gagnera bien sûr moins souvent qu'avec $p=1/2$. Le tableau de l'encadré 4 indique ce que donne la formule avec $a=1$ dans différentes situations.

La durée moyenne T, en nombre de coups joués, avant que l'un des joueurs soit ruiné est donnée par les formules suivantes. Si $p=1/2$, $T=ab$; si $p\neq 1/2$, $T=(a-(a+b)p(a,b))/(1-2p)$ – où $p(a,b)$ est la probabilité, indiquée un peu plus haut.

De la première formule, on déduit par exemple qu'il faudra en moyenne 400 coups pour que s'achève une partie où $p=1/2$ et où l'on cherche à battre un adversaire qui a 40 en partant de 10 et en utilisant la stratégie des

2 LE THÉORÈME DE LA RUINE CERTAINE

Le problème de la ruine du joueur a été imaginé par Blaise Pascal (1623-1662, *portrait du haut ci-contre*) sous la forme suivante : « Un investisseur possède des actions dont la valeur actuelle est de 25. Il a décidé de les vendre si elles descendent à 10 (perte de 15) ou montent à 40 (gain de 15). On suppose que chaque variation du cours de l'action est soit à la hausse d'une unité, avec une probabilité p, soit à la baisse d'une unité, avec une probabilité $q=1-p$. On suppose également que les variations successives sont indépendantes les unes des autres. Quelles sont les probabilités pour l'investisseur de vendre à 10 et de vendre à 40 ? » Le problème est équivalent à la situation d'un joueur A face à un joueur B, chacun détenant 15 unités et jouant, unité par unité, jusqu'à la ruine de l'un d'eux (perte de 15 ou gain de 15), chaque jeu donnant une probabilité p à A de gagner une unité et $q=1-p$ de la perdre. Pascal soumit le problème à Pierre de Fermat (1607-1665, *portrait du bas ci-contre*) en 1656, et les deux mathématiciens trouvèrent la solution. Le problème fut aussi transmis au mathématicien néerlandais Christiaan Huygens (1629-1695), qui le résolut et le mentionna en 1657 dans son traité *De ratiociniis in ludo aleae*, considéré aujourd'hui comme le premier ouvrage de théorie des probabilités. Approfondiret généraliser les résultats du problème initial occupe aujourd'hui encore les mathématiciens : problème avec plus de deux joueurs, durée des parties, probabilité de gagner contre un joueur infiniment riche, marche aléatoire et mouvement brownien, etc.

3 LE TAUX DE RETOUR AUX JOUEURS

Dans le rapport du Sénat de 2002 sur les jeux d'argent *(https://www.senat.fr/rap/r01-223/r01-22341.html)*, on trouve le tableau ci-contre, qui indique les taux de retour aux joueurs pour différents jeux d'argent. Ces taux ont peut-être un peu varié depuis la publication du rapport, mais ils montrent clairement que la proportion de l'argent joué qui est rendue aux joueurs change très sensiblement d'un jeu à l'autre. Cela donne donc une idée des jeux… qu'il faut éviter ! Pour la roulette, le taux indiqué n'est pas celui qu'on a avec les chances simples et les mises prisonnières, qui est encore plus proche de 1 puisqu'il est de 98,63 %.

		Taux de redistribution moyen (en % des mises)
	FDJ [1]	59 %
	PMU [1]	69,57 %
Casinos [2]	Machines à sous	85 %
	Boule	88,9 %
	Black-jack	94,1 %
	Roulette	97,3 %
	Baccara	98,5 %

[1] Source : rapport d'activité 2000 / [2] Source : syndicat « Casinos de France »

mises constantes d'une unité. La probabilité de réussir sera alors de 1/5. Dans la même situation mais avec $p=36/73$, la durée moyenne de la partie sera de 338 coups.

CHOISIR LA MISE

Plaçons-nous dans le cas $p<1/2$. Il est clair que la probabilité de battre un adversaire qui dispose de 4, en partant de 1 et en misant une unité à chaque fois, est la même que la probabilité de battre un adversaire qui a 40, en partant de 10 et en misant 10 à chaque fois. Cette remarque permet de calculer la probabilité P_1 de réussir à battre 40 en partant de 10 quand on mise 10 à chaque fois, et de la comparer à la probabilité P_2 de battre 40 en partant de 10 quand on mise 1 à chaque fois. Pour $p=36/73$, on obtient $P_1=0{,}1892$ et $P_2=0{,}1074$.

On observe donc que, pour battre 40 quand on a 10, il est beaucoup plus intéressant de miser à chaque fois 10 unités plutôt que 1 unité. La durée moyenne du jeu dans le premier cas est de 3,94 coups, et sans surprise elle est beaucoup plus longue dans le second cas : 338 coups.

Cela signifie aussi que le total des sommes déposées quand on joue avec des mises constantes de 10 est en moyenne 39,4 unités, alors que lorsqu'on utilise des mises constantes d'une unité, on dépose au total 338 unités en moyenne. C'est l'explication de la moins bonne probabilité de réussir avec des mises d'une unité par rapport aux mises de 10 unités : plus on dépose d'argent sur le tapis en moyenne, plus l'adversaire en profite, puisque les probabilités lui sont favorables ($p<1/2$). Cela diminue la probabilité de réussir.

Cette règle est en réalité tout à fait générale. D'abord, si l'on veut vraiment utiliser une stratégie de mises constantes, mieux vaut choisir les plus fortes mises possibles. Mais plus généralement, l'idée qu'il faut déposer la somme totale la plus faible possible sur le tapis de jeu conduit à la « stratégie du jeu hardi », dont il a été démontré qu'elle est la meilleure possible : si le jeu vous est défavorable la stratégie optimale consiste à chaque fois à jouer le plus possible jusqu'à être ruiné ou atteindre exactement le but fixé (sans jamais le dépasser).

Si par exemple le joueur A veut, avec la somme a, battre le joueur B qui détient $4a$ (il y a donc un total de $5a$ en jeu), la stratégie du jeu hardi consiste procéder comme suit :

– quand le joueur A dispose de a, il doit miser a. S'il gagne, il aura $2a$ qu'il rejouera, sinon il aura définitivement perdu ;

– quand le joueur A dispose de $2a$, il doit miser $2a$. S'il gagne, il aura $4a$, et il jouera a, sinon il aura définitivement perdu ;

– quand le joueur A dispose de $3a$, il doit miser $2a$. S'il gagne, il aura $5a$ et aura gagné, sinon il lui restera a, qu'il misera ;

– quand le joueur A dispose de $4a$, il doit miser a. S'il gagne, il aura $5a$ et aura gagné, sinon il lui restera $3a$, donc il misera $2a$.

Une analyse du jeu conduit au résultat que le joueur A réussira alors avec une probabilité de $p^3(2-p)/(1-p^2(1-p)^2)$. Avec $p=37/76$, cela donne une probabilité de réussite de 0,1928. C'est mieux que la stratégie des mises constantes de 10, quand on cherche à battre 40

4 PROBABILITÉ DE VICTOIRE POUR DIFFÉRENTS JEUX

Ce tableau présente, pour différents jeux, la probabilité qu'un joueur A disposant d'une somme *a = 1* gagne face à un joueur B disposant d'une somme *b*, quand les deux joueurs s'affrontent avec la stratégie des mises constantes unité par unité, jusqu'à la ruine de l'un d'entre eux. La probabilité de victoire à chaque tour pour le joueur A est *p*.

$a=1$	p	$b=a$	$b=5\times a$	$b=100\times a$
Roulette sans 0, ou pile ou face	1/2	0,5	0,1667	0,0099
Roulette avec 0 et mises prisonnières	36/73	0,4932	0,1555	0,0018
Roulette avec 0, sans mises prisonnières	18/37	0,4865	0,1450	0,0002
Roulette avec un double 0	18/38	0,4737	0,1260	0,0000026

en partant de 10 ($P_1 = 0{,}1892$), qui elle-même était meilleure que la stratégie des mises constantes unité par unité ($P_2 = 0{,}1074$).

LA LOI DE DUBINS ET SAVAGE ET LES MARTINGALES

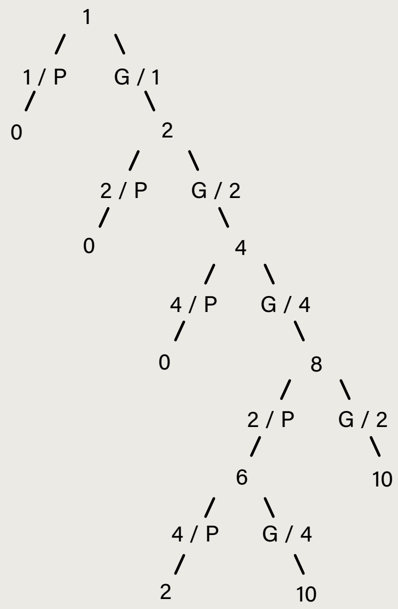
Quand $p<1/2$, toute méthode de jeu autre que le jeu hardi donnera des résultats inférieurs. C'est ce qu'ont démontré, en 1956, les mathématiciens américains Lester Dubins (1920-2010) et Leonard Savage (1917-1971). Les martingales classiques – à condition de se placer dans la situation réelle où les joueurs A et B ne disposent que de sommes finies – conduisent toutes à une probabilité de réussir pour A inférieure à celle de la méthode du jeu hardi.

La célèbre « martingale géométrique » consiste à jouer une somme m, puis si l'on perd $2m$, puis si l'on perd encore $4m$, etc. – tant qu'il perd, le joueur double sa mise au tour suivant – et cela jusqu'à ce qu'il gagne, ce qui se produit nécessairement à un moment ou un autre. Elle donne l'illusion au joueur de toujours conduire à un gain, car quand il finit par gagner (par exemple au coup $k+1$) la séquence totale jusqu'au gain lui a fait perdre $m+2m+4m+...+2^{k-1}m=(2^k-1)m$ et lui a fait gagner 2^km au dernier coup, lui procurant donc un bénéfice de m. En recommençant une nouvelle série, il gagnera à nouveau m.

Ce calcul est cependant faux, car la somme dont dispose le joueur A est finie, comme celle qu'engage le casino. Ainsi, même si le cas est rare, A sera parfois forcé d'interrompre la séquence avant d'avoir gagné, ou le casino refusera de payer, car A aura fait sauter la banque. Ces situations rares où une série cesse avant le gain font perdre beaucoup d'argent à A, et finalement la martingale ne marche pas. Les simulations sont sans appel : si vous prenez en compte les capacités bornées des joueurs A et B, ce que vous obtiendrez sera inférieur à ce que donne la stratégie du jeu hardi. Si vous en doutez, faites un programme de test ! Par exemple, avec $p=36/73$, pour A et B disposant de 10, en utilisant la martingale géométrique et en commençant chaque série par une mise d'une unité, A ruine B avec une probabilité de 0,4784, contre une probabilité de $36/73=0{,}4931$ s'il utilise le jeu hardi.

Notez bien, cependant, que la stratégie du jeu hardi est seulement celle qui vous fait statistiquement perdre le moins : elle ne retourne pas l'avantage du casino.

5 LA SEULE MARTINGALE : LE JEU HARDI



D'après les résultats mathématiques, quand $p < 1/2$, la méthode du jeu hardi – jouer toujours le plus possible jusqu'à être ruiné ou atteindre exactement le but fixé – est la meilleure pour réussir à atteindre un but fixé. Si, par exemple, partant de $a = 1$, vous voulez jouer jusqu'à perdre ou atteindre 10 à un jeu où la probabilité de gagner est à chaque coup $p < 1/2$, il faut suivre le schéma suivant :
Il signifie que si vous avez 1, vous devez jouer 1. Si vous perdez (P), vous atteindrez une somme totale de 0. Si vous gagnez (G), vous obtiendrez une somme totale de 2.
De même, si vous avez 2, vous devez jouer 2 et obtiendrez 0 si vous perdez (P) et 4 si vous gagnez (G), et ainsi de suite. L'analyse de ce schéma conduit au résultat que vous réussirez à passer de 1 à 10 avec la probabilité : $r = p^4(2 - p)/(1 - p^2(1 - p)^2)$. Pour $p = 36/73$, on trouve $r = 0{,}0951$. La stratégie des mises constantes unité par unité donnerait seulement $r' = 0{,}0881$.
Notez cependant que même avec le jeu hardi vous n'arriverez pas à atteindre ou dépasser $r'' = 0{,}1$, que donnerait le jeu pile ou face : l'avantage que se donne le casino est statistiquement irrattrapable.

COMPENSER UNE FORTUNE MOINDRE

Une question naturelle se pose, qui m'a été suggérée par Philippe Boulanger. Imaginons que A dispose de la possibilité de truquer le cylindre du casino et que le casino soit K fois plus riche que A ; quelle doit être la probabilité $p>1/2$ en faveur de A pour établir une chance égale de réussite – c'est-à-dire pour que A ait une chance sur deux de gagner $b=Ka$ en partant de a ? Je ne connais pas la formule générale pour traiter le problème, mais j'ai fait des programmes qui donnent la réponse en traitant des cas particuliers.

Si A dispose de $a=10$ et que le casino B dispose de $b=40$, j'ai envisagé 3 méthodes et calculé la probabilité p qui donne à A une chance sur deux de battre B.

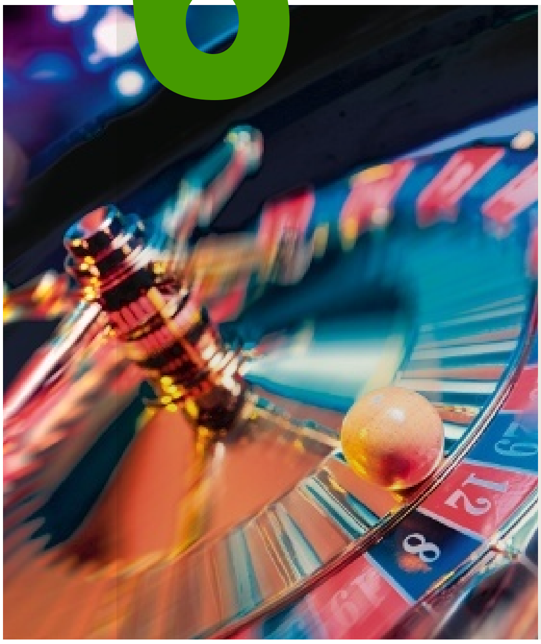
(a) Si A utilise la stratégie des mises constantes en jouant 1 unité à chaque fois, l'équilibre s'établit pour $p=0{,}5164$.

(b) Si A utilise la stratégie des mises constantes en jouant 10 unités à chaque fois, l'équilibre s'établit pour $p=0{,}6584$.

(c) Si A utilise la stratégie du jeu hardi, l'équilibre s'établit pour $p=0{,}7213$.

Les résultats sont cohérents : quand le cylindre du casino a été manipulé en faveur de A, le joueur est favorisé par les stratégies qui lui font déposer sur le tapis la somme totale la plus importante, car c'est l'inverse du cas des vrais casinos. Parmi les trois méthodes envisagées, c'est donc la stratégie des mises constantes unité par unité qui est la meilleure pour A. Conformément à la logique générale des résultats de Lester Dubins et Leonard Savage, c'est donc elle qui exige un avantage plus faible en probabilité, d'où la valeur p la plus petite trouvée pour le cas (a). Même disposant d'un assez faible avantage probabiliste, si la stratégie des mises constantes est utilisée avec une petite mise, le joueur A peut avoir une chance sur deux

6 OBSERVER LA TRAJECTOIRE DE LA BILLE ?



Quand le croupier lance la bille, pendant quelques secondes les joueurs peuvent encore déposer des mises sur le tapis, avant que le croupier n'annonce que « les jeux sont faits » et qu'il soit alors impossible d'ajouter de nouvelles mises. La bille continue sa course, butte contre les obstacles rencontrés sur son trajet, puis après une trajectoire plus ou moins compliquée aboutit dans une des cases de la partie centrale de la roulette (qui d'ailleurs tournait, elle aussi). Quand la bille est lancée ainsi que la partie centrale de la roulette, tout est joué. Il semble donc possible, en mesurant la vitesse, la position et la direction de la bille à son lancement ainsi que la vitesse de rotation de la partie centrale du cylindre, de calculer où la bille va tomber, ou au moins dans quelle zone elle arrivera. En calculant et en misant rapidement, un joueur pourrait peut-être retourner en sa faveur l'avantage que possède le casino, et donc gagner autant qu'il le souhaite. En se basant sur cette idée, Edward Thorp (connu pour ses méthodes de jeux pour le blackjack) et Claude Shannon (1916-2001) ont cherché à mettre au point un dispositif de mesure et de calcul discret, qu'ils portaient caché sur eux pour tenter de battre la roulette. D'après Edward Thorp, le système, testé en 1961 en laboratoire, fonctionnait. Dans l'article où il décrit l'expérience, il précise qu'ils n'utilisèrent pas leur système pour gagner de l'argent. Depuis, d'autres tentatives du même type ont été menées, prétendument avec succès, dont celle détaillée dans le livre *The Eudaemonic Pie*, de Thomas Bass (Houghton Mifflin, 1985). Un site internet vend aujourd'hui de tels dispositifs pour battre la roulette – dispositifs bien sûr interdits par les casinos. Les lecteurs sont invités à se méfier, car on peut avoir de très forts doutes sur l'efficacité de ces systèmes.

de battre un adversaire quatre fois plus riche que lui. Un autre résultat confirme cela: pour que A disposant de 10 ait une chance sur deux de gagner contre B disposant de 1000 quand A utilise la stratégie des mises constantes unité par unité, il suffit de $p=0{,}5173$.

CAS DE TROIS JOUEURS

Les mathématiciens ont aujourd'hui parfaitement compris ce qui se passe dans les jeux à deux joueurs de type roulette, et nous avons expliqué leurs conclusions. Dans le cas d'un jeu avec trois joueurs ou plus, les recherches se poursuivent et régulièrement de nouveaux résultats sont démontrés (*voir la bibliographie*). Des conjectures sont aussi énoncées: nous allons en expliquer une, formulée par le fameux mathématicien prestidigitateur Persi Diaconis.

Pour trois joueurs le problème se pose ainsi: le joueur A dispose d'un pécule de départ de a unités, B de b, C de c. Ils jouent de la façon suivante. À chaque nouveau coup, une paire de joueurs est tirée au sort uniformément. Les deux joueurs retenus lancent alors une pièce de monnaie non truquée, qui décide lequel des deux joueurs donne une unité de son pécule à l'autre. Le jeu est réitéré jusqu'à ce qu'un joueur soit éliminé car ruiné, par exemple A, puis un second, par exemple C, conduisant le troisième joueur, B, à partir avec la somme $a+b+c$. On dit dans un tel cas que l'ordre d'élimination E est ACB. Il y a six ordres d'élimination possibles: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA.

On cherche à savoir, selon les valeurs de a, b et c, quelles sont les probabilités de chacun des six ordres d'élimination. Ce problème, loin d'être facile, a de l'importance quand une partie en cours est arrêtée et que les joueurs veulent se répartir de manière aussi juste que possible les sommes dont ils disposent au moment de l'arrêt. L'idée que chacun garde ce qu'il a au moment de l'arrêt n'est pas raisonnable, puisque si par exemple l'un des joueurs a beaucoup plus que les autres il est presque certain de tout emporter en poursuivant la partie. Persi Diaconis mentionne dans un article un exemple de situation où un tel problème se pose dans les tournois de Poker.

Voici quelques résultats sur ce problème. La durée moyenne avant la première élimination est $3abc/(a+b+c)$, la durée moyenne avant la seconde élimination est $ab+ac+bc$. La probabilité pour le joueur A de l'emporter est $a/(a+b+c)$ – et, bien sûr, pour B elle est de $b/(a+b+c)$, et pour C de $c/(a+b+c)$.

Diverses méthodes sont utilisées pour connaître, en fonction de a, b et c, la probabilité de chacun des 6 ordres possibles d'élimination, mais aucune formule n'est connue. Persi Diaconis et Stewart Ethier conjecturent cependant le résultat suivant: pour chaque ordre possible d'élimination E, la probabilité d'avoir E avec a, b et c est la même qu'avec ka, kb et kc, où k est un entier. Les méthodes utilisées pour tenter d'avancer sur ces questions sont difficiles et liées à la théorie des mouvements browniens. Il semble clair qu'il faudra encore du travail pour arriver à disposer, dans le cas d'un nombre N quelconque de joueurs, d'une compréhension comparable à celle obtenue avec deux joueurs. ■

BIBLIOGRAPHIE

P. Diaconis et S. N. Ethier, **Gambler's ruin and the ICM,** *Statistical Science*, 2022.

F. Studzinski Perotto *et al.*, **Deciding when to quit the gambler's ruin game with unknown probabilities,** *International Journal of Approximate Reasoning*, 2021.

F. Lemonier, **La ruine du joueur,** ENS de Rennes – université Rennes 1, 2014.

S. Song et J. Song, **A Note on the history of the gambler's ruin problem,** *Communications for Statistical Applications and Methods*, 2013.

J. P. Delahaye et C. Lasou, **Gagner au casino,** université des Sciences et Technologies de Lille, 2008.

Y. Swan et T. Bruss, **A matrix-analytic approach to the N-player ruin problem,** *Journal of applied probability*, 2006.

F. T. Bruss *et al.*, **On the N-tower problem and related problems,** *Advances in Applied Probability*, 2003.