RENDEZ-VOUS

DES MONDES PARALLÈLES EN MATHÉMATIQUES ?

Certaines étrangetés mathématiques laissent penser que plusieurs versions du monde ensembliste seraient possibles. Comme en physique, cela suggère l'existence d'un multivers.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

L'idée qu'il existe plusieurs univers parallèles à notre univers physique – potentiellement une infinité –, avec peut-être, pour certains d'entre eux, une autre loi de la gravité, ou une vitesse de la lumière différente de celle que nous mesurons ici, ou encore un nombre de dimensions plus grand, est l'objet de discussions entre physiciens, cosmologues et philosophes. Une question analogue – mais à ne pas confondre – est posée très sérieusement au sujet des mathématiques. C'est le débat sur le « multivers ensembliste », qui, depuis une quinzaine d'années, est l'objet d'une controverse entre logiciens.

Le problème provient de la position réaliste en philosophie des mathématiques : « Il existe un monde mathématique et une vérité mathématique. » Cette position a été défendue en particulier par le fameux logicien Kurt Gödel (1906-1978), dont les théorèmes d'incomplétude, au centre du sujet du multivers, ont changé nos connaissances sur ce que sont les mathématiques. Pour un réaliste, les réponses aux interrogations concernant les objets mathématiques et leurs propriétés ne sont jamais dépendantes de choix arbitraires ou de conventions, mais relèvent plutôt de la compréhension et de l'observation de ce qu'ils sont réellement, indépendamment de nous.

Il est clair que savoir si le nombre entier $n = 3^{10^{100}} + 2^{10^{100}}$ est un nombre premier ou non n'est pas le résultat d'une décision des mathématiciens. Même si nous ne savons pas élucider cette question, car les calculs sont trop complexes pour nos machines actuelles, la réponse est déterminée indépendamment de nous : soit n est un nombre premier, soit il ne l'est pas. Remarquons, à ce propos, qu'il se peut que notre univers physique soit fini, auquel cas il est possible que jamais un nombre comme n n'ait de sens physiquement, et peut-être que nous ne saurons donc jamais si n est premier ou pas. Mais quoi qu'il en soit de l'univers physique, la vérité sur n est fixée par la réalité mathématique, même si un jour nous concluons qu'elle nous sera définitivement inaccessible à cause des limites de notre monde physique.

RÉALITÉ DES NOMBRES ET DES ENSEMBLES

Le problème concernant les nombres n'est pas très grave, et seuls de très rares mathématiciens contestent l'aspect déterminé de la réponse à des questions comme celle concernant la primalité de n. Le sujet devient plus délicat lorsqu'on s'interroge sur les ensembles, qui constituent aujourd'hui le socle sur lequel repose tout le travail mathématique.

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

© Stockbym/Shutterstock

Il existe pour les entiers un système axiomatique dit «de Peano, qui permet, en pratique, pour presque tous les énoncés *E* concernant les nombres entiers, de démontrer que *E* est vrai ou que sa négation, notée «non-*E*», est vraie. Avec l'axiomatique de Peano, on peut par exemple démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. On peut aussi démontrer que pour tout $n > 1$, il existe un nombre premier entre n et $2n$ (théorème de Tchebychev), et beaucoup d'autres choses encore.

Malheureusement, le premier théorème d'incomplétude de Gödel affirme qu'il existe des énoncés concernant les nombres entiers qui échappent à l'axiomatique de Peano – des énoncés dits «indécidables». En utilisant ce système axiomatique, pour de tels indécidables *E*, on ne démontrera jamais *E*, mais jamais non-*E* non plus. Cette incapacité de l'axiomatique de Peano de savoir ce qu'il en est de la vérité de certains énoncés concernant les entiers ne nous empêche pas de croire que, pour chacun d'eux, *E* est vrai ou non-*E* est vrai. Pour nous, malgré l'incomplétude, il n'y a qu'un monde des nombres entiers, unique: la vérité concernant les nombres entiers est fixe, ils n'ont pas de monde parallèle.

La vérité concernant les nombres entiers est fixe, ils n'ont pas de monde parallèle

Le cas des ensembles est plus épineux que celui des nombres. Il existe un système axiomatique concernant les ensembles, appelé ZFC (pour «axiomatique de Zermelo et Fraenkel avec axiome du choix»), qui joue pour les ensembles le même rôle que l'axiomatique de Peano pour les entiers. Sa formulation est naturelle, et les mathématiciens s'accordent généralement pour croire que tout ce que permet de démontrer ZFC est vrai, et que ZFC est non contradictoire. Avec le système ZFC, on démontre pour de nombreux énoncés *E* portant sur des ensembles que *E* est vrai ou que non-*E* est vrai. Cependant, le premier théorème d'incomplétude de Gödel s'applique ici aussi, et affirme qu'il existe des énoncés *E* concernant les ensembles que ZFC ne peut pas démontrer, et dont ZFC ne peut pas non plus démontrer la négation. La différence avec l'axiomatique de Peano est cependant assez nette car, si l'existence d'un univers des nombres entiers unique et indépendant de nous semble aller de soi, dans le cas des ensembles la situation est moins claire, pour plusieurs raisons.

La première est simplement que la notion d'ensemble est récente, de même que son utilisation comme base pour développer les mathématiques. C'est Georg Cantor (1845-1918) qui, à partir de 1870, développe la théorie des ensembles et démontre les premiers résultats importants à son sujet. En particulier, il prouve qu'il n'existe pas de bijection entre l'ensemble des nombres entiers et celui des nombres réels : il existe une infinité de nombres réels et une infinité de nombres entiers, mais l'infini qui mesure la taille de l'ensemble des réels – appelé « la puissance du continu » – est plus gros que celui qui mesure la taille de l'ensemble des entiers – appelé « dénombrable ».

CANTOR ET LES ALEPHS

Plus généralement, Cantor démontre qu'il existe une infinité de types d'infinis différents, qu'il note avec la lettre de l'alphabet hébreu aleph : $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_k, \ldots$ Chacun de ces infinis est plus grand que le précédent, et il n'y a pas de types d'infinis intermédiaires entre deux alephs consécutifs (*voir l'encadré 1*).

Le fait que les ensembles n'aient été introduits que récemment suggère que ces objets ne sont pas aussi assurés et naturels que les entiers. Une raison précise l'explique : la théorie des ensembles accepte de manipuler l'infini en acte, c'est-à-dire vu comme un tout et non pas comme quelque chose en devenir. Avant Cantor, les mathématiciens évitaient soigneusement de considérer les totalités infinies comme des objets mathématiques à part entière, car ils étaient persuadés que le faire conduirait inévitablement à des contradictions. Cantor et ses successeurs démontrent que c'est faux, en proposant des méthodes de raisonnement avec les totalités infinies ne produisant pas de contradiction, grâce à la mise au point de ZFC au début du XX[e] siècle. L'élaboration de cette axiomatique est une révolution : elle libère les mathématiques et leur permet un épanouissement considérable. Mais son apparition assez récente et le scepticisme quant à l'utilisation de l'infini en acte montrent qu'elle n'allait pas de soi.

Une démonstration encore plus claire du fait que le concept d'ensemble est plus délicat que celui de nombre entier provient de la séquence infinie des alephs. La première question qu'on se pose à leur sujet, et que Cantor s'est posée, se révèle en effet d'une déconcertante difficulté. Le type d'infini de l'ensemble des nombres réels, la puissance du continu, peut s'écrire $2^{\aleph_0}$. Puisque Cantor a montré que ce type d'infini dépasse celui de l'ensemble des

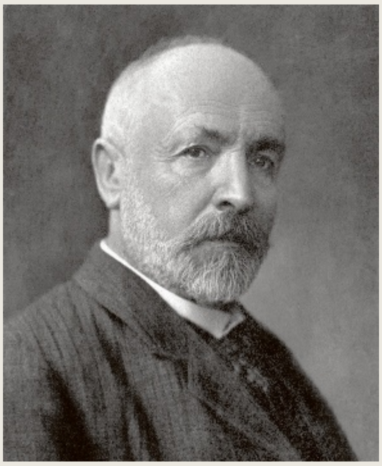
1 LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Nous avons tous une idée assez claire de ce que sont les ensembles et de ce qu'on peut faire avec eux. Si, par exemple, on considère l'ensemble des multiples entiers de 3, $A = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$ et l'ensemble des multiples entiers de 5, $B = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$, nous comprenons sans difficulté ce qu'est leur réunion : $A \bigcup B = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, \ldots\}$. De même, si on dispose de l'ensemble $\{a, b, c\}$, nous comprenons sans mal ce que sont ses sous-ensembles : ø (l'ensemble vide), $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, et ce que cela signifie de les prendre tous pour former un nouvel ensemble : $\{ø, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

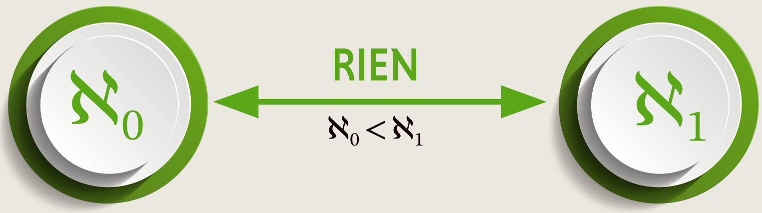
La théorie axiomatique des ensembles ne fait que préciser cette connaissance intuitive, en formulant des axiomes que personne ne conteste et qui ont largement fait leurs preuves depuis un siècle.

Lorsqu'il existe une bijection entre deux ensembles *A* et *B* – une application qui à chaque élément de *A* fait correspondre un élément différent de *B*, sans en oublier aucun –, on dit que *A* et *B* ont la même taille. Cela s'applique aux ensembles finis ou infinis. Si un sous-ensemble de *B* a la même taille que *A*, et que *A* et *B* n'ont pas la même taille, on dit que *B* a une taille strictement plus grande que *A*. Georg Cantor montra que c'est ce qui se produit pour $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) et $\mathbb{N}$ (l'ensemble des nombres entiers) : l'infini de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que l'infini de $\mathbb{N}$.

Georg Cantor montra aussi qu'il existe une infinité de types d'infinis différents. Il proposa de désigner les infinis en utilisant la première lettre de l'alphabet hébreu, aleph : ℵ. Il montra que le type d'infini de $\mathbb{N}$, noté $\aleph_0$, est suivi par un type tout juste plus grand, $\aleph_1$, sans intermédiaire entre les deux. De même, juste au-dessus de $\aleph_1$, il y a $\aleph_2$, etc. Disposant de cette suite des alephs, Cantor se posa la question : où se trouve le type d'infini de $\mathbb{R}$? L'option la plus simple serait que cet infini, qui vaut $2^{\aleph_0}$, coïncide avec $\aleph_1$, autrement dit que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Cette affirmation est appelée « hypothèse du continu » (HC). Malheureusement, Cantor ne réussit pas à la démontrer, et l'on n'a toujours pas réussi à savoir si elle doit être considérée comme vraie ou fausse. C'est l'origine des doutes concernant la réalité des ensembles, mais aussi de l'idée qu'il pourrait exister plusieurs mondes ensemblistes : certains pour lesquels HC serait vraie, d'autres pour lesquels elle serait fausse.



Georg Cantor (1845-1918).



entiers naturels, qui est $\aleph_0$, le type d'infini de l'ensemble des réels pourrait donc être $\aleph_1$, ou $\aleph_2$, ou même un type d'infini situé plus loin dans la liste des alephs. L'hypothèse la plus simple serait que ce soit $\aleph_1$, c'est-à-dire que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. On appelle cette affirmation «l'hypothèse du continu» (HC). Elle signifie qu'entre l'infini des entiers et celui des réels, il n'y a aucun type d'infini intermédiaire.

Cantor ne trouva pas de démonstration de l'hypothèse du continu. Est-il vrai que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$? Ou est-ce faux? La question semble élémentaire, et elle est parfaitement claire. Mais on ne sait pas y répondre. Il s'agit peut-être de l'énigme la plus coriace et difficile jamais rencontrée en mathématiques. En particulier, Kurt Gödel et Paul Cohen (1934-2007) ont démontré que HC est un indécidable de ZFC. Ces axiomes, au premier abord, semblent pourtant dire tout ce qui est évident et naturel à propos des ensembles. Mais s'ils sont non contradictoires, ils ne démontreront jamais ni HC, ni sa négation. La question la plus simple concernant les différents types d'infinis échappe au pouvoir de ZFC!

TROIS ÉCOLES

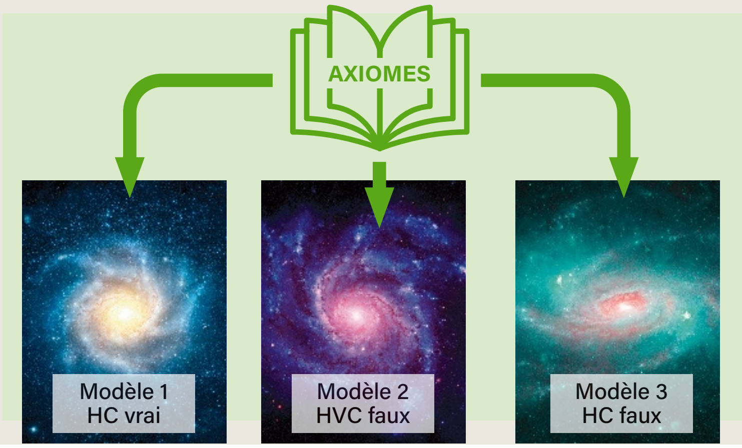
Face à cette situation, trois attitudes sont possibles.

(1) **L'antiréalisme,** qui affirme que le problème n'a pas vraiment de sens, car les ensembles n'existent pas réellement. Cette position prend plusieurs formes. On peut juger que ce qui compte pour les mathématiciens, ce sont uniquement les démonstrations, donc des suites de formules combinées en respectant les règles précises qu'indique la logique. L'essentiel en mathématiques serait de nature symbolique et syntaxique, ce qui ne pose pas de difficultés, car cela se ramène aux nombres entiers et ne fait pas intervenir d'infini en acte. Cette façon de voir est le «formalisme», pour lequel peu importe ce qu'on croit que désignent les symboles utilisés en mathématiques, ce sont leurs agencements et les manipulations qu'on en fait qui, seuls, importent. Une autre position antiréaliste en mathématiques considère que les objets abstraits de nos théories sont des constructions mentales: c'est l'«intuitionnisme», qui refuse l'infini en acte et ne juge donc pas que HC est un énoncé vrai ou faux. L'antiréalisme, même s'il est confortable, n'est pas satisfaisant pour le mathématicien qui, quand il envisage son travail, y voit autre chose que des manipulations de symboles, et dont l'attitude la plus naturelle est de croire que, comme pour les entiers, il existe une vérité mathématique fixée et qu'il en prend connaissance.

(2) Face aux attitudes refusant l'infini en acte, il y a le **réalisme classique** en théorie des ensembles, qu'on appellera ici **«réalisme non pluraliste».** Il défend l'existence d'un monde des ensembles unique, précis et non ambigu, dont nous pouvons et devons améliorer notre compréhension. Cette position nous a déjà permis d'énoncer les axiomes de ZFC. Pour un tel réaliste, HC est vraie ou fausse, et nous le saurons en poursuivant nos recherches pour formuler de nouveaux axiomes qui auront un effet sur la question. C'est la position défendue avec acharnement par Kurt Gödel toute sa vie. L'idée est que, soutenus par notre intuition comme nous le sommes par nos sens dans le monde physique, nous avons accès aux vérités

2 PLUSIEURS MONDES ENSEMBLISTES ?

Les axiomes Ax_G de la théorie des groupes indiquent qu'un ensemble *G* entre les éléments duquel une opération + est définie est un groupe si :
(1) Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de *G* : $(a + b) + c = a + (b + c)$;
(2) Il existe un élément *e* de *G* tel que pour tout *a* dans *G* : $e + a = a + e = a$;
(3) Pour tout élément *a* de *G*, il existe un élément *a'* de *G* tel que : $a + a' = a' + a = e$.
En définissant $G = \{0, 1\}$ et l'opération + par : $0 + 0 = 0$; $1 + 0 = 0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 0$, on obtient un groupe. On dit parfois que $\{0, 1\}$ muni de cette opération est un « modèle » des axiomes Ax_G de la théorie des groupes, ou une « structure » qui vérifie ces axiomes. Il existe une grande variété de modèles de Ax_G, qu'on peut voir chacun comme un univers vérifiant ces axiomes. On pourrait parler du « multivers des groupes ».
En théorie des ensembles, la situation semble identique. En fixant une base *E* qui représentera tous les ensembles, et en fixant pour tout couple (x, y) pris dans *E*, que l'affirmation « $x \in y$ » est vraie ou qu'elle est fausse, on définit une structure qui, si elle vérifie tous les axiomes de la théorie des ensembles, est ce qu'on appelle un « modèle » de ces axiomes.
Les modèles de la théorie des ensembles, pour les axiomes de base de cette théorie (notés ZFC), peuvent être assez différents les uns des autres. En particulier, si ZFC est non contradictoire, certains modèles vérifient HC et d'autres vérifient non-HC. Pourtant, si nos idées sur ce que sont les ensembles étaient bien déterminées et exprimées de manière complète par ZFC, cela ne pourrait pas se produire, et tous les modèles donneraient pour HC le même diagnostic : vraie ou fausse. Un réaliste mathématique comme Kurt Gödel pense qu'il est possible d'ajouter de nouveaux axiomes à ZFC ayant pour effet que HC prenne toujours la même valeur – vrai ou faux – dans tous les modèles de la théorie complétée.
À l'heure actuelle, la recherche des tels axiomes fixant la vérité ou la fausseté de HC (et d'autres affirmations dans la même situation d'indétermination) est un échec. Cela amène certains logiciens à défendre l'idée qu'il faut accepter tous les modèles des axiomes comme réels et existant simultanément dans un multivers ensembliste.



du monde des ensembles. C'est en travaillant à rendre plus précise cette «quasi-perception», qui nous donne accès aux objets mathématiques, que nous saurons si l'égalité $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ est vraie ou fausse. Le programme de recherche du réalisme non pluraliste est donc de formuler de nouveaux axiomes pour ZFC. Le respecté logicien Hugh Woodin, professeur à l'université Harvard, soutient comme Gödel que c'est la seule position raisonnable, et travaille à une solution de HC. Il a développé une théorie, appelée le «L-ultime», qui semble conduire à la conclusion que HC est vraie. Mais cette théorie n'est aujourd'hui pas définitivement aboutie.

Notons que, lors de cette recherche d'axiomes nouveaux, le réaliste non pluraliste ne s'autorise pas l'ajout de tout ce qu'il serait possible d'adjoindre à ZFC sans introduire de contradiction. Si c'était le cas, il pourrait décider d'ajouter HC ou non-HC et l'affaire serait réglée. Le réaliste non pluraliste ne souhaite ajouter que des axiomes conformes à la compréhension que les mathématiciens ont du monde des ensembles. Dans cette recherche d'axiomes, tous les énoncés qui affirment que l'univers des ensembles est grand – on les appelle les «axiomes de grands cardinaux» – sont acceptables, car le monde ensembliste, s'il existe, est nécessairement aussi vaste que possible, et que la négation d'un des axiomes de grands cardinaux aurait pour effet d'en limiter la taille. D'autres critères, comme le fait pour un axiome d'être fécond, ou sa capacité à simplifier de nombreuses démonstrations, sont utilisés pour juger si un énoncé est acceptable comme nouvel axiome. Cette recherche n'a pas été sans résultat et d'ailleurs, en plus des axiomes de grands cardinaux, l'axiome de détermination projective – qui indique que certains types de jeux à deux joueurs possèdent une stratégie gagnante – est un axiome que les logiciens s'accordent à ajouter à ZFC.

(3) Pour un réaliste mathématique, l'échec persistant, à propos de HC, de la version classique du réalisme défendue par Gödel et Woodin est gênant. Cela a conduit à une forme nouvelle de réalisme, appelé **«réalisme pluraliste»** ou **«réalisme du multivers»**. L'idée, défendue en particulier par Joel Hamkins, professeur à l'université Notre-Dame, dans l'Indiana, aux États-Unis, et par John Steel, de l'université de Californie à Berkeley, est qu'il y a plusieurs mondes ensemblistes possibles. Nous devrions accepter cette existence simultanée, car c'est la seule façon de comprendre la situation dans laquelle nous nous trouvons, après un siècle et demi de recherches vaines pour établir HC ou sa négation en ajoutant de nouveaux axiomes raisonnables à ZFC.

Les partisans du multivers ensembliste proposent de comparer la situation en théorie

3 L'ARGUMENT DU BALANCEMENT

Un des arguments puissants qui conduisent à renoncer à l'idée qu'il n'y a qu'un seul univers des ensembles et à en accepter une multitude est tiré des méthodes permettant, à partir d'un modèle de ZFC, d'en construire d'autres. Ces méthodes ont servi dans un premier temps à démontrer l'indécidabilité de certains énoncés. Si, par exemple, en partant d'un modèle quelconque de ZFC, on peut en construire un autre qui vérifie HC – ce qu'a proposé Kurt Gödel en 1938 –, cela signifie que ZFC + HC est non contradictoire, et donc que non-HC ne peut pas se déduire des axiomes de ZFC. Si de plus – ce qu'a proposé Paul Cohen en 1963 –, en partant d'un modèle de ZFC, on peut en construire un qui vérifie non-HC, cela signifie que HC ne peut pas se déduire de ZFC. Associé au résultat de Gödel, cela veut dire que, si ZFC est non contradictoire, alors HC est un indécidable de ZFC.

Ces méthodes de construction de nouveaux modèles sont maintenant nombreuses et puissantes. Elles s'appliquent même pour des systèmes obtenus en ajoutant des axiomes à ZFC. Elles suggèrent que nous ne pourrons jamais trouver de nouveaux axiomes raisonnables à ajouter à ZFC permettant de déduire HC ou non-HC. La méthode de Paul Cohen, appelée « forcing », est particulièrement troublante, car à partir d'un modèle *M* de ZFC vérifiant HC, elle permet de construire un modèle *M'* qui vérifie non-HC, puis à partir de *M'* de construire un troisième modèle *M''* qui vérifie HC, etc. La méthode fonctionne encore avec ZFC + A pour de nombreux axiomes A envisagés pour compléter ZFC. Hugh Woodin, qui n'accepte pas l'idée du multivers, en déduit qu'il faut rechercher des axiomes A pour compléter ZFC tels que la méthode de forcing ne fonctionne plus avec ZFC + A pour faire basculer HC. S'il réussit, il disposera d'un argument contre le multivers ensembliste.

C'est l'objectif qu'il poursuit avec sa théorie du « L-ultime ».

des ensembles à celle de deux autres champs des mathématiques : la théorie des groupes d'une part, et la géométrie d'autre part. Les axiomes Ax_G de la théorie des groupes définissent la structure mathématique de « groupe » (*voir l'encadré 2*). Il y a cependant plusieurs structures différentes qui satisfont ces axiomes, et qu'on appelle des « modèles de Ax_G ». Par exemple, pour tous les entiers *n* il existe un groupe à *n* éléments, et ces groupes sont essentiellement différents les uns des autres. Il y a aussi des groupes avec une infinité d'éléments, comme l'ensemble des entiers relatifs (positifs et négatifs) par exemple. Vis-à-vis des axiomes de la théorie des groupes, chaque groupe est un univers, et la coexistence de plusieurs groupes ne se ramenant pas les uns aux autres peut être vue comme un multivers pour les groupes. En géométrie aussi nous avons une sorte de multivers des modèles que personne ne conteste. Les axiomes de base de la géométrie, parfois appelés « géométrie absolue », ne permettent pas de savoir si, par un point extérieur à une droite *D*, il ne passe aucune, une seule ou plusieurs droites ne coupant pas *D* (les parallèles à *D* passant par ce point). Le développement des géométries non euclidiennes a montré qu'il existe des espaces géométriques différents, dans lesquels la réponse n'est pas la même. Comme pour les groupes, ces structures non assimilables les unes aux autres constituent des univers géométriques parallèles.

DES UNIVERS PARALLÈLES

Le point de vue du réaliste pluraliste, en théorie des ensembles, veut donc que nous envisagions les axiomes de ZFC, ou ZFC+GC (ZFC avec les axiomes de grands cardinaux), comme nous envisageons les axiomes de la théorie des groupes ou ceux de la géométrie absolue : en considérant que l'objet de la théorie des ensembles est l'étude des structures qui vérifient les axiomes retenus. Pour le réaliste pluraliste, toutes ces structures sont réelles, sans qu'on puisse dire que l'une est meilleure que les autres.

L'analogie entre la théorie des groupes et la théorie des ensembles a été renforcée par la mise au point, par Kurt Gödel puis par Paul Cohen et ses successeurs, de méthodes générales permettant, à partir d'une structure vérifiant les axiomes de ZFC, d'en construire de nouvelles. De la même manière, en théorie des groupes, on peut partir d'un groupe et en construire de nouveaux. À partir d'un groupe *G*, on peut, par exemple, créer un nouveau groupe *G′* dont les éléments sont des couples d'éléments de *G*. Ce nouveau groupe est plus gros que celui de départ. Autre exemple : en ne retenant que les nombres pairs du groupe des entiers relatifs, on obtient un groupe plus petit.

De telles méthodes – constructions externes et constructions internes – existent en théorie des ensembles, et elles gênent le réaliste non pluraliste. Et cela est d'autant plus vrai que la méthode de Paul Cohen appelée « forcing » permet, à partir d'une structure

L'idée du réalisme pluraliste est qu'il y a plusieurs mondes ensemblistes

qui ne vérifie pas HC, d'en construire une qui vérifie HC, et inversement. Joel Hamkins, défenseur du réalisme pluraliste, l'explique clairement : « L'abondance de possibilités issues de la théorie des ensembles crée une sérieuse difficulté pour une vision unique de l'univers. Il faudrait expliquer ou considérer comme imaginaires toutes les structures alternatives que les théoriciens des ensembles ont proposées. Cette attitude semble intenable, car nous avons une solide expérience de ces structures. Le point de vue du multivers rend compte de cette expérience en les considérant comme réels. »

UNE POSITION VRAIMENT RÉALISTE ?

Cependant, cette vision des choses engendre des difficultés si l'on entend vraiment défendre une position réaliste. D'abord, il y a un grand nombre de façons de concevoir la multitude des univers ensemblistes qui composeraient le multivers. On peut être plus ou moins tolérant : doit-on considérer que le multivers est constitué de toutes les structures qui vérifient les axiomes ZFC, ou seulement de toutes celles qui vérifient ZFC+GC ? Ou doit-on, encore, se référer à d'autres systèmes d'axiomes, plus faibles que ZFC ? Le panel de choix est large, et risque d'apparaître arbitraire. C'est étrange, et insatisfaisant, puisqu'un tel choix fixe l'ontologie ultime des mathématiques, c'est-à-dire ce qui, en définitive, existe ou n'existe pas. Les chercheurs du domaine ne semblent d'ailleurs pas s'accorder sur ce point. Notons qu'en physique, il y a aussi diverses notions de multivers incompatibles entre elles, et que c'est l'un des arguments pour n'en accepter aucune.

4 DE GRAVES PROBLÈMES !

Une difficulté avec l'idée du multivers ensembliste est qu'elle rend complexe la compréhension ce que veut dire « vrai » pour les ensembles. Si on convient qu'est vrai ce qui est vrai simultanément dans toutes les structures qui constituent le multivers ensembliste, alors cela signifie que HC et bien d'autres énoncés ne sont ni vrais, ni faux. Cela revient à contester que la question « est-ce que HC est vraie ? » a un sens clair, alors que c'est le cas puisqu'il s'agit de la question : « Est-ce que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ ou avec $\mathbb{R}$? » La défense du multivers est alors une position d'antiréalisme concernant les ensembles.
Une autre option consiste à défendre que nous sommes dans l'une des structures composant le multivers ensembliste, et que cette structure fixe ce qui est vrai pour nous. Se posent alors des questions délicates et difficiles auxquels les partisans du multivers ensemblistes se gardent de répondre : pourrons-nous savoir dans quelle composante du multivers nous sommes ? Que veut dire précisément « être dans l'une des composantes sans être dans les autres » ? Peut-on « voyager » d'une composante à une autre ? Comment ?

Un deuxième problème se présente à qui veut défendre un réalisme pluraliste. Une fois fixée la catégorie de structures qui composerait le multivers, il y a au moins deux façons d'envisager la vérité mathématique:

(a) Considérer qu'est vrai ce qui est vrai dans chacune des structures;

(b) Imaginer que nous sommes dans l'une et pas dans les autres (c'est le sens qu'on donne aux univers parallèles en physique), et que c'est celui des univers possibles dans lequel nous sommes qui détermine la vérité pour nous.

La position (a) n'est pas satisfaisante, car elle amène à dire que HC n'est ni vraie ni fausse. Or, justement, un réaliste réfute l'idée qu'il n'y a pas de vérité sur une question aussi simple. Cette position signifie aussi qu'il n'y a pas une réalité unique, et donc pas d'ontologie claire qui définit ce qui existe ou pas: c'est gênant, car alors on ne saura pas répondre à une multitude de questions élémentaires liées à HC – par exemple: existe-t-il un groupe dont la taille est un type d'infini entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$? Au fond, adopter la position (a) est une façon de ne pas être authentiquement réaliste et de ne pas croire qu'il y a une bonne façon, unique, de penser le concept d'ensemble.

Le parallèle avec la théorie des groupes est en réalité trompeur. Il n'y a pas de difficultés à penser à toutes les structures vérifiant les axiomes des groupes quand on dispose d'un arbitre ultime, qui indique ce qui existe et ce qui n'existe pas. Ce dernier est justement fourni par la théorie des ensembles qu'on retient, même si on sait qu'il faudra encore lui ajouter des axiomes pour la rendre plus précise dans l'avenir. À l'inverse, discuter des structures qui vérifient tel ou tel système d'axiomes pour les ensembles et en accepter simultanément plusieurs conduit à une sorte d'autoréférence ontologique pour le réaliste pluraliste, quant aux modèles de ZFC. Il faut une ontologie déterminée pour avoir une vérité déterminée, et accepter que l'ontologie ne le sera jamais précisément, en se référant à un multivers comme le fait le pluraliste, est une façon de nier qu'il y a bien une réalité.

La position (b) n'est pas plus satisfaisante. On ne voit pas ce que pourrait signifier le fait d'«être dans l'un des univers ensemblistes possibles et pas dans les autres». Si nous sommes dans l'un précis des univers du multivers ensembliste, que notre sens mathématique nous met en relation avec lui, alors nous pourrons le connaître avec de plus en plus de détails. Pourquoi ne pas croire que cet univers est le bon, et qu'il est le seul possible? Si, en revanche, il nous est impossible de le connaître avec précision, alors «être dans l'un et pas les autres» ne signifie rien.

NON-PLURALISME, OU NON-RÉALISME

La discussion présentée brièvement dans le paragraphe précédent semble montrer qu'aucune vision satisfaisante du multivers ensembliste n'est possible. Ce n'est donc pas un hasard si Gödel, très informé de la situation, n'a jamais envisagé que le réalisme pluraliste pouvait être une option face au problème posé par HC. Même Woodin, confronté plus violemment encore aux foisonnements de structures possibles pour les ensembles, reste du côté de Gödel. Considérer des familles de structures ensemblistes en prétendant qu'elles doivent toutes être prises au sérieux est une forme de renoncement au réalisme, car, avec de tels multivers ensemblistes, il n'y a plus de conception philosophiquement univoque et cohérente de l'ontologie et de la vérité. Cette conclusion est aussi celle de la logicienne et philosophe spécialiste des questions de théorie des ensembles Penelope Maddy, professeuse à l'université de Californie à Irvine. Elle écrit: «Jusqu'à présent au moins, les raisons de remplacer l'univers par un multivers ne sont pas concluantes.»

Finalement, soit nous avancerons dans le problème de la formulation de nouveaux axiomes, comme l'attend le réaliste non pluraliste et comme Woodin tente de le faire, soit, si la situation d'échec vis-à-vis de HC persiste, nous serons obligés de nous replier sur une forme d'antiréalisme mathématique – ce que sont, en définitive, les prétendues positions réalistes pluralistes. Cet antiréalisme reste à formuler et à clarifier, pour préserver au mieux sa compatibilité avec la philosophie spontanée du mathématicien au travail... qui reste le réalisme non pluraliste. ■

BIBLIOGRAPHIE

N. Barton, Iterative Conceptions of Set, 2023.

J. R. Steel, Generically invariant set theory, *UC Berkeley*, 2022.

P. Maddy et T. Meadows, A reconstruction of Steel's multiverse project, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2020.

P. Maddy, Set-theoretic foundations, *Foundations of Mathematics*, American Mathematical Society, 2017.

C. J. Rittberg, How Woodin changed his mind : New thoughts on the Continuum Hypothesis, *Archive for History of Exact Sciences*, 2015.

J. D. Hamkins, A multivers perspective on the axiom of constructability, *Infinity and Truth*, World Scientific, 2014.

P. Koellner, Hamkins on the multiverse, *Exploring the frontiers of incompleteness*, 2013.

J. D. Hamkins, The set-theoretic multiverse, *The Review of Symbolic Logic*, 2012.