RENDEZ-VOUS

PAVER BEAUCOUP, MAIS PAS INFINIMENT

Certaines formes pavent le plan jusqu'à l'infini. Plus difficiles à découvrir sont celles qui le font seulement sur une (grande) partie finie.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

La géométrie est un domaine mathématique qui comporte des sujets d'une très grande variété, que plus de trois millénaires d'étude n'ont pas épuisés. L'intérêt pour cette discipline n'exige souvent aucune compétence spécialisée, car nous sommes plongés dans un monde géométrique et munis d'une capacité générale à percevoir l'espace, le plan et les objets qui y interagissent. Cela nous donne immédiatement accès à la compréhension de questions qui, sinon, seraient difficiles ne serait-ce qu'à formuler.

Récemment plusieurs problèmes anciens et délicats ont été résolus au sujet des pavages. Il y a eu, par exemple, la classification complète des pavages convexes pentagonaux par le chercheur français Michael Rao en 2017, ou plus récemment encore (en 2023) la découverte d'un pavé apériodique du plan par David Smith, Joseph Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss.

Ici, nous allons revenir sur un problème évoqué dans cette rubrique il y a huit ans, mais qui depuis a largement progressé et mérite donc qu'on en reparle. Il s'agit des pavés du plan qui peuvent recouvrir une partie du plan – sans chevauchement, ni espace vide – mais qui ne peuvent pas recouvrir le plan entier. Notez qu'on s'autorise ici à utiliser les pavés à la fois sur l'endroit et sur l'envers, pour créer ces pavages partiels. La question posée est : « Jusqu'à quel point un tel recouvrement partiel est-il possible ? »

Pour évaluer ce pouvoir couvrant mais borné d'un pavé, le mathématicien allemand Heinrich Heesch a introduit en 1968 une mesure aujourd'hui appelée le « nombre de Heesch ». Par définition, ce nombre H associé à un pavé T est le plus grand entier positif ou nul tel que T peut être complètement entouré par des copies de lui-même H fois de suite (*voir l'encadré 1*). Si aucune couronne de T entourant T n'est possible, alors $H=0$. Si ce plus grand nombre n'existe pas – ce qui signifie que le pavé T peut paver entièrement le plan – on convient que H est infini.

PROGRÈS INCRÉMENTAUX

Progressivement, on a découvert des pavés ayant pour nombre de Heesch des entiers de plus en plus grands. C'est étonnant, car tout s'est passé lentement, avec plusieurs fois la tentation de croire qu'on avait atteint la limite du possible. En 1968, quand Heinrich Heesch a proposé sa mesure, il ne connaissait que des pavés avec un nombre de Heesch de 0, de 1, ou infini. Il a fallu attendre 1991 pour qu'Anne Fontaine, de l'université d'État de New York à Albany, aux États-Unis, propose une famille infinie de pavés ayant chacun un nombre de Heesch valant 2 (*voir l'encadré 1*).

Le premier pavé pour lequel il a été possible de montrer que $H=3$, fut découvert vers 1995 par Robert Ammann (*voir l'encadré 2*), un amateur américain de récréations mathématiques à qui on doit aussi plusieurs résultats concernant les pavages apériodiques, qui correspondit longuement avec Martin Gardner. Bien que ses travaux soient aujourd'hui reconnus et estimés, il termina sa vie dans un bureau de poste, chargé du tri du courrier.

Les progrès suivants se produisirent en l'an 2000, et conduisirent à la découverte de pavés pour lesquels $H=4$ et $H=5$. Les résultats proviennent de l'étude des formes appelées «piliers-carrés» (*polypillars*) et «piliers-hexagonaux» (*hexapillars*). Il s'agit de formes constituées de carrés ou d'hexagones collés les uns aux autres par un côté, et sur lesquels on place des bosses et des creux triangulaires (*voir l'encadré 2*). Les découvreurs de ces étonnants pavages partiels sont W. Marshall et Casey Mann. Ce dernier démontra en 2001, dans son mémoire de doctorat soutenu à l'université de l'Arkansas, aux États-Unis, les deux résultats suivants:

(a) Le nombre de Heesch du 2- et du 3-pilier-carré est 2, et il vaut 3 pour les n-piliers-carrés quand $n \geq 4$.

(b) Le nombre de Heesch du 2- et du 3-pilier-hexagonal est 4, et il vaut 5 pour les n-piliers-hexagonaux quand $n \geq 4$.

Les démonstrations consistent à construire des assemblages avec le nombre de couronnes voulues, dont on vérifie la correction par un simple examen visuel, puis, à l'aide d'un raisonnement soigneux de plusieurs pages, à établir qu'on ne peut pas ajouter de couronne supplémentaire.

Arrivé à ce point, le problème de trouver un pavé avec $H=6$ semblait extrêmement difficile, et l'hypothèse que ce soit impossible était considérée avec sérieux.

> L'existence de pavés aux nombres de Heesch finis aussi grands que possible est liée à une énigme centrale de la théorie des pavages

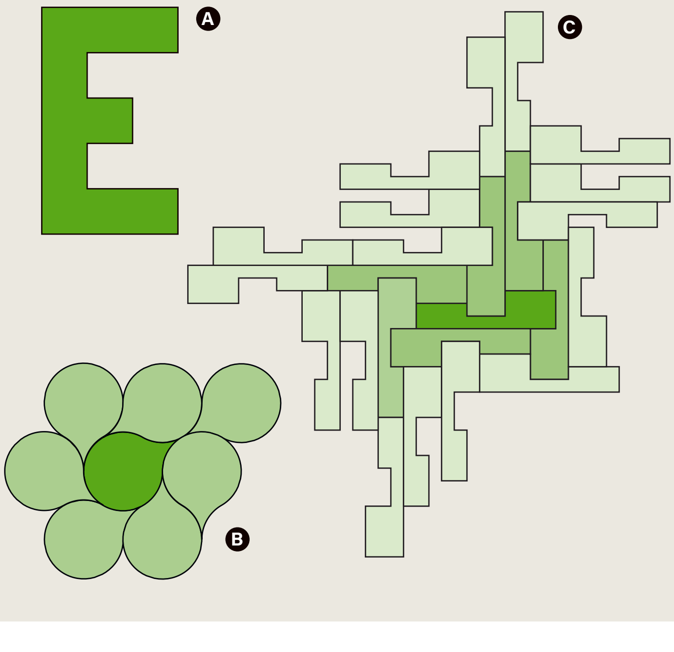
ALGORITHMES ET PAVAGES

Il est intéressant de noter que le problème de l'existence de pavés ayant des nombres de Heesch finis aussi grands que possible est lié à une énigme centrale de la théorie des pavages, qui aujourd'hui reste encore sans solution… avis aux amateurs.

Un théorème de 1966 dû au mathématicien américain Robert Berger établit qu'il n'existe pas d'algorithme qui, recevant en entrée la description géométrique d'un nombre fini quelconque de pavés polygonaux, indique après un calcul fini si l'on peut paver le plan avec des copies de ces pavés, ou si c'est impossible. On dit que le problème du pavage du plan par une famille finie de polygones est «algorithmiquement indécidable». On ne sait pas, en revanche, s'il existe un algorithme qui, recevant en entrée la description d'un pavé polygonal unique, indique après un calcul fini si l'on peut paver le plan en l'utilisant, ou si c'est impossible. Il se peut qu'un tel algorithme existe, il se peut que non. On sait en revanche que s'il n'existe pas – c'est-à-dire que le problème du pavage du plan par un pavé polygonal unique est algorithmiquement indécidable – alors il n'y a pas de maximum fini pour la valeur du nombre de Heesch des pavés polygonaux du plan.

1 COMPTER LES COURONNES

Un pavé est une partie du plan qui, si elle était en caoutchouc parfait, pourrait se déformer et donner un disque plein. Le nombre de Heesch d'un pavé *T* vaut *n* si l'on peut placer autour de *T* une couronne de *T*, sans vide ni chevauchement, puis une seconde couronne autour de la première, etc., jusqu'à obtenir *n* couronnes, mais qu'il est impossible d'en placer une de plus.
Le pavé présenté dans le dessin (A) a un nombre de Heesh égal à 0 : on ne peut pas l'entourer d'une couronne de pavés de la même forme sans laisser d'espace vide ni faire se chevaucher deux pavés.
Le dessin (B) montre « la goutte d'eau », un pavé découvert en 1928 par le mathématicien allemand Walther Lietzmann, avec l'unique couronne de gouttes d'eau possible autour d'elle-même. On comprend sans mal que construire une autre couronne de gouttes d'eau autour de la première est impossible. Le nombre de Heesch de ce pavé est donc 1.
Le dessin (C) montre un pavé découvert en 1991 par Anne Fontaine, de l'université d'État de New York à Albany, aux États-Unis, dont le nombre de Heesch est 2 : on peut l'entourer d'une couronne, de deux couronnes, mais pas de trois. La démonstration de cette impossibilité, purement arithmétique, occupe trois pages.



La démonstration (par contraposée) est assez simple. Voici le raisonnement. Supposons que le nombre de Heesch d'un pavé polygonal ne puisse jamais dépasser un certain entier, qu'on note k. Alors pour savoir si un pavé polygonal P pave le plan, on essaie systématiquement de l'utiliser pour construire une figure avec $k+1$ couronnes, ce qui est un calcul faisable par ordinateur – parfois très long, mais fini.

(a) En cas d'échec, on en déduit que le pavé P ne peut pas paver le plan – car si l'on ne peut pas faire $k+1$ couronnes avec P, alors P ne peut pas paver l'entièreté du plan.

(b) Si, au contraire, on réussit à construire un pavage avec $k+1$ couronnes, alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe un pavage utilisant P et comportant $k+n$ couronnes – car si une impossibilité se présentait pour un certain entier n, on en déduirait que le nombre de Heesch de P est fini et est supérieur à k, ce qui est contraire à notre hypothèse. Or un résultat classique de la théorie des pavages indique que si, avec des exemplaires de pavés pris dans un ensemble fini de pavés E, on peut paver des surfaces aussi grandes qu'on le souhaite, alors les pavés de E pavent le plan tout entier. Ce résultat s'applique ici, et assure donc que P pave le plan.

Si on savait que le nombre de Heesch d'un pavé ne pouvait pas dépasser un entier k fixé, on disposerait donc d'un algorithme permettant, pour tout pavé polygonal, de savoir s'il pave le plan ou non.

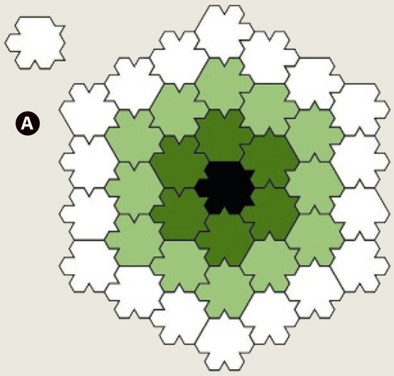
RECORD ACTUEL

La question de l'indécidabilité algorithmique du problème du pavage du plan par un pavé polygonal reste aujourd'hui ouverte. Cependant, il semble qu'on s'achemine, de manière indirecte, vers une réponse positive : oui, le problème serait indécidable. En effet, la découverte progressive de pavés avec des nombres de Heesch de plus en plus grands suggère qu'il n'y a pas de borne, et que c'est seulement notre incapacité à mener les longs calculs nécessaires qui nous empêche de le voir. Ce n'est pas le seul argument, car il a aussi été démontré que, si le problème est algorithmiquement indécidable, alors il existe un pavé apériodique du plan, et cela avant

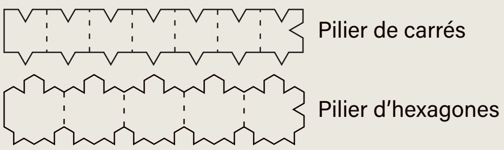
2 ÉLARGISSEMENT PROGRESSIF

Petit à petit, on a découvert des pavés avec des nombres de Heesch de plus en plus grands. Le dessin (A) présente le premier pavé trouvé pour lequel $H = 3$, qui est dû à Robert Ammann en 1995.
Deux types de formes sont particulièrement intéressantes à étudier : les « piliers » faits de carrés et ceux faits d'hexagones réguliers, comme montré dans le dessin (B). En ajoutant des bosses et des creux complémentaires, ces formes ont permis de découvrir des pavés pour lesquels $H = 3$, comme montré dans le dessin (C), et $H = 5$, comme montré dans le dessin (D).

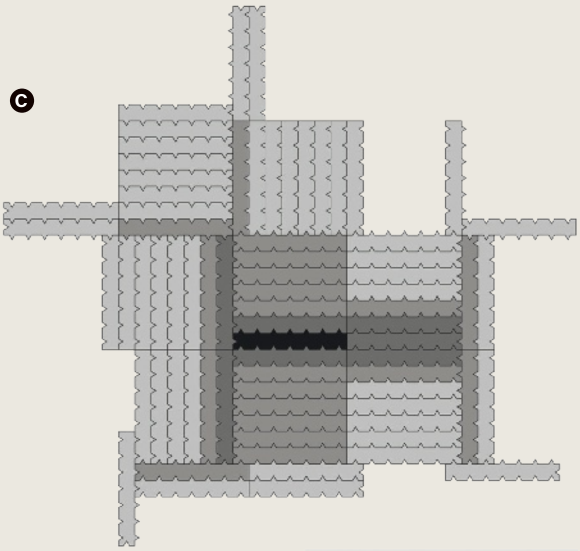
A



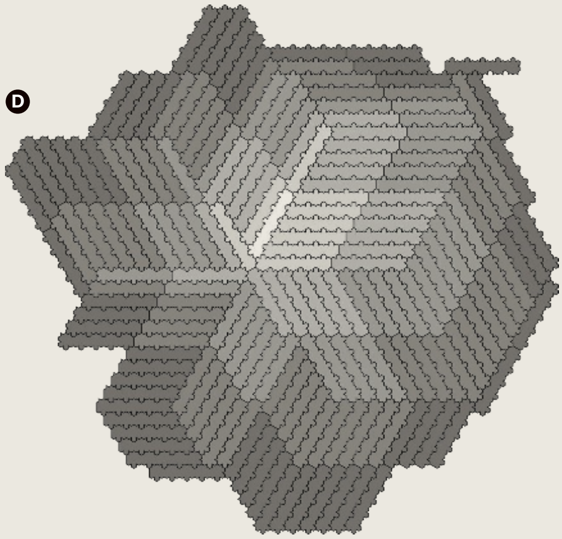
B



C



D



qu'on en trouve effectivement un, tout récemment, comme on l'a rappelé au début de l'article. Ces arguments ne sont pas des preuves définitives, mais constituent des indices qui vont dans le sens de l'indécidabilité.

Présentons maintenant le nouveau record pour le nombre de Heesch. Après une longue période de blocage à $H=5$ depuis le résultat de 2001, c'est seulement en 2021 que fut publié le premier exemple de pavé pour lequel $H=6$ (*voir l'encadré 3*). Le résultat est dû au mathématicien Bojan Bašić, professeur à l'université de Novi Sad, en Serbie, qui l'a trouvé en menant des explorations à l'aide de programmes informatiques.

La démonstration que le pavé proposé ne peut pas avoir 7 couronnes a exigé un ordinateur, donc l'affirmation selon laquelle $H=6$ pour ce pavé repose partiellement sur une démonstration informatique. Cependant, il existe un raisonnement purement mathématique, sans ordinateur, qui montre aussi que le pavé de Bojan Bašić ne peut pas paver le plan: sans s'appuyer sur un calcul informatique, on peut donc affirmer que ce pavé possède un nombre de Heesch fini valant au moins 6.

POLYMINOS

Face à un problème mathématique, trouver une solution est bien, mais trouver «la meilleure solution» est mieux. Pour donner un sens à cette idée de «meilleure solution», fixons-nous une catégorie de pavés simples, par exemple ceux constitués de n carrés de même taille collés côté contre côté – appelés «polyminos» ou «polyominos». On se demande alors quelle est la plus petite valeur de n qui permet un nombre de Heesch de 2, de 3, de 4, etc. (*voir l'encadré 4*). Les méthodes pour traiter ce problème sont informatiques, et plus on disposera de puissance de calcul plus loin on ira. Craig Kaplan, professeur à l'université de Waterloo, au Canada, et l'un des découvreurs du pavé apériodique évoqué dans l'introduction, a mené en 2021 une série de calculs informatiques massifs à la recherche de ces pavés les plus simples possible pour lesquels $H=2$, $H=3$, etc. Son calcul a été conduit en transformant le problème géométrique en un problème de logique booléenne, problèmes pour lesquels on dispose d'algorithmes puissants.

Tous les polyminos composés de 1 à 6 carrés pavent le plan, et ne possèdent donc pas de nombre de Heesch fini. Parmi les polyminos composés de $n=7$ carrés (appelés «heptaminos»), seuls 4 ne pavent pas le plan. L'un d'eux possède un trou, ce qui l'empêche de paver ou d'être entouré d'une couronne. Quant aux trois qui restent, on a $H=0$ pour l'un d'eux et $H=1$ pour les deux derniers. Par jeu, vous pouvez essayer de retrouver à la main ce résultat, sachant qu'il existe 108 heptaminos. Il faut commencer par les énumérer puis, en les prenant un par un, soit démontrer qu'ils pavent le plan, soit trouver la configuration qui donne la valeur de leur nombre de Heesch.

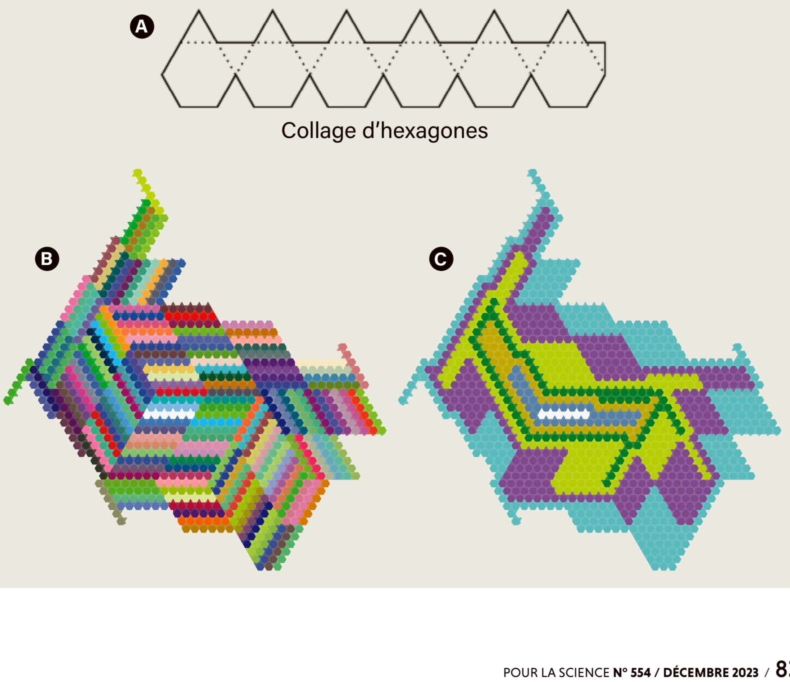
> **Trouver une solution est bien, mais «la meilleure solution» est mieux**

Pour $n=8$ (les «octaminos»), il est à nouveau impossible de dépasser $H=1$. Pour $n=9$ (les «ennéaminos») le programme de Craig Kaplan a trouvé un pavé pour lequel $H=2$. Pour atteindre $H=3$, il faut au moins $n=17$ (un «17-omino»!). On ne trouve jamais $H\geq 3$ pour $n=18$ et $n=19$, et au-delà le calcul devient trop long pour les méthodes utilisées par Craig Kaplan (*voir l'encadré 4*).

Les formes composées de n hexagones réguliers collés les uns aux autres – appelées «n-hexaminos» – ont donné de meilleurs résultats.

3 JUSQU'À 6… ET PLUS LOIN ?

On s'est longuement interrogé pour savoir s'il existait un pavé dont le nombre de Heesch valait 6. La solution est venue en 2021 du mathématicien Bojan Bašić, et a de nouveau été obtenue à l'aide d'un collage d'hexagones réguliers. Le dessin (A) montre le pavé qui atteint cette valeur record de $H = 6$.
Le dessin (B) montre la disposition donnant les six couronnes, que l'on peut plus facilement identifier sur le dessin (C). Qu'il soit impossible de construire sept couronnes semble trop compliqué à démontrer à la main : cela a exigé un programme informatique. La prochaine étape consistera à trouver un pavé avec $H = 7$… s'il existe. On ignore également si, pour tout $n \geq 7$, il existe un pavé pour lequel $H = n$. Cela ne semble pas impossible !

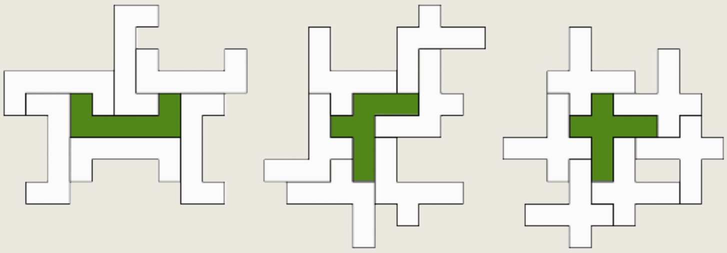


© Bojan Bašić

4 LES MEILLEURS PAVÉS DE CRAIG KAPLAN

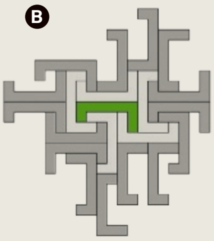
L'ordinateur, calculateur infatigable, permet de connaître les plus petits polyminos (des formes constituées de carrés de même taille accolés les uns aux autres) qui admettent un nombre de Heesch valant 1 : ils sont au nombre de trois, présentés dans le dessin (A), chacun de ces polyminos étant constitués de sept carrés accolés. Le troisième n'est considéré comme satisfaisant que si l'on accepte des trous dans la couronne la plus extérieure, ce qui est une convention parfois admise.

A



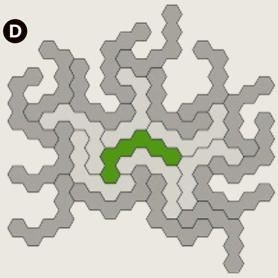
Pour $H = 2$, il faut un polymino constitué d'au moins neuf carrés – et il en existe un seul de cette taille minimale, présenté dans le dessin (B). Pour $H = 3$, il faut des polyminos constitués de 17 carrés, et il y a deux solutions de taille minimale. Ces polyminos sont présentés dans le dessin (C).

B



C

D



Il a été impossible d'aller plus loin avec les polyminos, car les calculs programmés par Craig Kaplan deviennent alors trop longs. Mais si, à la place de carrés collés les uns aux autres, on utilise des hexagones, on arrive à $H = 4$, avec un pavé constitué de onze hexagones accolés. Le dessin correspondant est trop grand pour être reproduit ici, mais le dessin (D) montre le pavé record de cette catégorie pour $H = 2$.

Les tableaux 1 et 2 synthétisent les résultats des calculs de Craig Kaplan pour les polyminos et les n-hexaminos. Ils dénombrent, pour différentes valeurs de H, les pavés de différentes tailles permettant d'atteindre ces valeurs.

n	$H = 0$	$H = 1$	$H = 2$	$H = 3$
7	1	2		
8	6	14		
9	75	122	1	
10	747	642	1	
11	5807	3628	39	
12	28572	6906	10	
13	149687	28694	67	
14	635951	60362	58	
15	2598257	123262	25	
16	10397466	285578	66	
17	40695200	639162	130	2
18	154744331	979375	68	
19	593856697	2325874	198	

Tableau 1. Décompte des polyminos par catégorie, calculé par Craig Kaplan

n	$H = 0$	$H = 1$	$H = 2$	$H = 3$	$H = 4$
6		3	1		
7	5	25	6	1	
8	70	264	44	3	
9	825	1822	67	3	
10	8248	10234	265	13	
11	67644	47940	817	37	1
12	431882	133484	567	10	
13	2565727	466159	1783	27	1
14	13676416	1156793	1836	22	
15	69871458	2758485	3534	179	2
16	350337478	6581529	4818	54	1
17	1731652467	15167876	13129	161	1

Tableau 2. Décompte des n-hexaminos par catégorie, calculé par Craig Kaplan

Avec onze hexagones on arrive déjà à $H=4$, et c'est encore le cas avec $n=13$, 15, 16 et 17 (*voir l'encadré 4*). Le programme de Craig Kaplan s'est arrêté là, mais la voie semble bonne et c'est peut-être celle qu'il faut suivre pour espérer atteindre, avec ces formes simples, $H=5$, $H=6$ et peut-être plus.

PROBLÈMES CONNEXES

Un mathématicien considère en général que les problèmes sur lesquels il se casse les dents sont intéressants. Il ne résiste alors pas à l'exploration des problèmes voisins qui pourraient eux aussi s'avérer difficiles, donc intéressants. Cela s'est produit pour le problème des nombres de Heesch. Étrangement les divers problèmes voisins étudiés se sont révélés un peu plus faciles que le problème de base. Examinons-en quelques-uns, en indiquant ce qu'on a réussi à savoir.

La première variante consiste à définir le nombre de Heesch non plus pour un pavé mais pour une famille finie de pavés P_1, P_2, ..., P_k. Si avec ces pavés on peut construire n couronnes successives autour de l'un d'eux, mais pas $n+1$ couronnes, on dira que le nombre de Heesch de la famille est n. Précisons que, dans cette définition, on exige que les pavages partiels donnant les couronnes utilisent au moins une fois chacun des k pavés de la famille considérée.

Se pose alors la question de trouver des familles finies de pavés aussi petites que possible mais permettant d'obtenir des nombres de Heesch aussi grands que l'on veut. Une solution élégante et relativement simple à ce problème a été proposée par Bojan Bašić et publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* en 2015. Il démontre en effet que pour tout entier $n \geq 2$, il existe une famille de trois pavés qui permet d'obtenir n couronnes mais pas $n+1$ – ce qui signifie que, pour cette famille, $H=n$ (*voir l'encadré 5*). Cet énoncé général obtenu avec trois pavés s'étend sans difficultés aux familles de quatre pavés, cinq pavés, etc. On ne sait pas, cependant, si un tel résultat est encore valide quand on ne s'autorise que des familles de deux pavés.

Bien évidemment la question du nombre de Heesch maximum possible pour un pavé se pose aussi pour l'espace de dimension 3, et même pour tous les espaces de dimension d pour $d \geq 3$. Remarquez qu'en dimension 3, ce qu'on appelle «couronne» dans la définition du nombre de Heesch est en fait une sorte de sphère – et on généralise cette notion en dimension d. Un beau résultat, également obtenu par Bojan Bašić et sa collègue Anna Slivková en 2022, assure que le nombre maximal de Heesch, pour un pavé généralisé de l'espace de dimension d, tend vers l'infini quand la dimension d tend vers l'infini. Autrement dit, à condition de se placer dans un espace de dimension assez grande, on trouve des pavés généralisés dont le nombre de Heesch est aussi grand qu'on le souhaite.

Les pavés proposés par Bojan Bašić et Anna Slivková pour établir ce résultat sont des cubes de l'espace de dimension d dans lesquels ils placent des bosses et des creux complémentaires (à la manière de ce qui est fait dans *l'encadré 5*). La démonstration qu'on peut avoir un H aussi grand qu'on le souhaite avec de tels pavés n'a pas nécessité d'ordinateur, mais seulement le raisonnement: l'honneur humain est sauf! Précisons que la méthode démontre que H augmente avec d, mais que cela ne résout que partiellement le problème en dimension d qui, sous sa forme complète, consiste à savoir, pour chaque dimension d (et en particulier pour $d=2$) quels sont les nombres de Heesch possibles pour un pavé. De quoi occuper longtemps encore les géomètres!

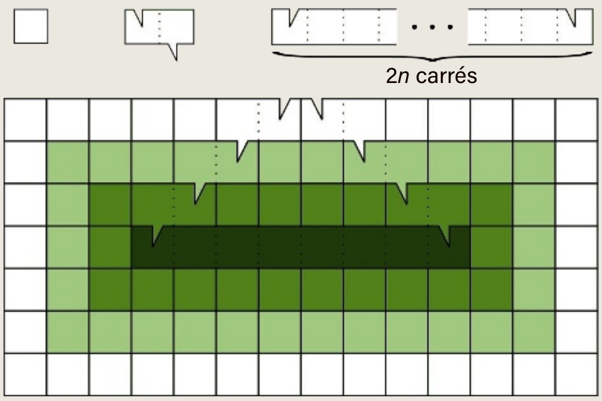
Plus généralement encore, vouloir «faire beaucoup sans faire infiniment» – c'est l'idée des nombres de Heesch – conduit souvent à des problèmes intéressants. Un autre bel exemple mathématique de ce type est le problème consistant à définir des nombres entiers finis très grands, sans proposer des nombres infinis comme la théorie des ordinaux l'envisage. Les mathématiciens Donald Knuth et John Conway ont excellé sur cette question avec la notation des flèches. Celle-ci permet, en utilisant quelques symboles, de définir des entiers finis dépassant tout ce qu'un humain peut imaginer. Par exemple:

$2\uparrow\uparrow\uparrow 4=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2))$
$=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 4)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ avec 65536 fois 2

... mais c'est une autre histoire. ■

5 AVEC TROIS PAVÉS, TOUT EST POSSIBLE

Les dessins ci-dessous montrent un astucieux ensemble de trois pavés, trouvé par Bojan Bašić. Considérés ensemble, ils ont un nombre de Heesch de *n*, pour *n* un entier quelconque supérieur ou égal à 2. Cela signifie, et on le comprend en regardant attentivement les dessins, qu'on peut créer *n* couronnes autour du plus grand des pavés, le tout utilisant au moins une copie de chacun d'eux, mais qu'on ne peut pas créer *n* + 1 couronnes – ni bien sûr paver le plan avec les trois pavés – en s'imposant d'utiliser chacun au moins une fois.



BIBLIOGRAPHIE

B. Bašić *et al.*, Solutions to seven and a half problems on tilings, *The Electronic J. of Combinatorics*, 2023.

B. Bašić, A figure with heesch number 6 : Pushing a two-decade-old boundary, *Mathematical Intelligencer*, 2021.

C. Kaplan, Heesch numbers of unmarked polyforms, *arXiv preprint*, 2021.

B. Bašić, The Heesch number for multiple prototiles is unbounded, *Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences de Paris*, 2015.

C. Mann, *On Heesch's Problem and Other Tiling Problems*, University of Arkansas ProQuest Dissertations Publishing, 2001.

A. Fontaine, An infinite number of plane figures with Heesch number two, *Journal of Combinatorial Theory*, 1991.

H. Heesch, Reguläres Parkettierungsproblem, *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen*, 1968.