ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout le chapitre on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les intervalles considérés contiennent au moins deux points. Quand on parlera d'ouvert, on sous-entendra qu'il s'agit d'un ouvert non vide.

1. Equations scalaires linéaires du premier ordre

Dans tout ce paragraphe on s'intéresse à une équation scalaire du type

$$(E) \quad : \quad ay' + by = c$$

où les fonctions a, b et c sont continues sur I. Rappels:

▷ Une solution de (E) sur I est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que:

$$\forall t \in I \ , \ a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

▷ L'équation est dite homogène lorsque $c = 0$.

▷ L'équation homogène associée à (E) est (E_0) : $ay' + by = 0$.

1.1. **Structure de l'espace des solutions.** On a le théorème de structure des solutions:

Proposition 1.2. (i) *L'ensemble H des solutions sur I de l'équation homogène associée à (E) est un sev de l'ensemble des fonctions dérivables sur I.*

(ii) *Si $\tilde{y}$ est solution de (E) sur I, alors l'ensemble des solutions sur (i) de (E) est $\tilde{y} + H$.*

1.3. **Résolution dans le cas d'une ED écrite sous forme résolue.** On commence par traiter le cas d'une ED mise sous forme normalisée: $y' = \alpha y + \beta$ (E) où α et β sont des fonctions continues sur un intervalle I. Alors on a le résultat suivant:

Proposition 1.4. (i) *L'ev H des solutions sur I de (E_0) est de dimension un et, pour tout t_0 dans I, la droite vectorielle H est engendré par la fonction $y_0 : t \mapsto \exp(A(t))$ où A est une primitive de α sur I. En particulier toute solution de (E_0) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

(ii) *L'équation avec second membre (E) admet au moins une solution $\tilde{y}$ et l'ensemble des solutions de (E) sur I est $\tilde{y} + \mathrm{Vect}(y_0)$.*

En outre on peut prendre $\tilde{y} : t \mapsto e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\beta(s)ds$ pour un t_0 arbitrairement choisi dans I.

Les solutions peuvent alors s'écrire sous la forme: $\tilde{y} : t \mapsto e^{A(t)}(\lambda + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\beta(s)ds)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) *En particulier, pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy cosntitué de (E) et de la condition initiale de $y(t_0) = y_0$ admet une solution et une seule.*

exercice 1.4.1. *Soit g une fonction continue de limite nulle en $= \infty et \alpha$ un réel strictment négatif. Montrer que toute solution de l'ED: $y' + \alpha y = g$ tend vers 0 en $+\infty$.*

Revenons à une équation différentielle d'ordre 1 générale : $ay' + by = c$ avec a, b, c fonctions continues sur I. Sur tout intervalle J sur lequel a ne s'annule pas, on peut transformer (E) en $y' = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ et appliquer le résultat précédent, ce qui donne:

Proposition 1.5. *Supposons que la fonction a ne s'annule pas sur I.*

Alors l'ev H des solutions sur I de (E_0) est de dimension 1 .

En particulier toute solution de (E_0) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

† On ne dispose pas de résultat général sur la dimension des solutions sur un intervalle où a s'annule comme nous le verrons sur des exemples dans le paragraphe suivant.

Remarque 1.5.1. *Avant de se lancer dans une résolution par formule intégrale (ou variation de la constante), il est utile de vérifier s'il n'y a pas une solution évidente : voir par exemple le cas d'une équation à coefficients constants avec second membre constant.*

exercice 1.5.2. *Résoudre l'équation différentielle* $t(2-t)x' + (1-t)x = 1$ *sur* $I =]-\infty, 0[$ *puis sur* $I' =]0, 2[$.

1.6. **Etude du cas où la fonction a s'annule sur I.** On supposera que la fonction a s'annule un nombre fini de fois sur I. Attention : dans ce cas l'espace des solutions de l'équation homogène associée n'est pas nécessairement de dimension 1 comme nous le verrons sur des exemples. En pratique, on résoud l'équation sur des intervalles (maximaux) sur lesquels f ne s'annule pas et on essaie de "raccorder" les solutions obtenues pour obtenir des fonctions dérivables.

exemple 1.6.1. *On considère l'équation différentielle* $(E) : ty' - 2y = t^3$. *Calculer la dimension de l'espace des solutions sur* $\mathbb{R}$.

exercice 1.6.2. *Reprendre l'exercice précédent avec* $(E) :\ t^2y' - y = 0$ *puis avec* $(1-t)y' - y = t$.

2. Equations linéaires scalaires du second ordre

2.1. **Généralités.**

Définition 2.2. *Soient a, b, c, d quatre fonctions de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et (E) l'équation différentielle linéaire scalaire du second ordre:*

$$(E) \quad ay" + by' + cy = d$$

Une solution sur I de (E) est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables telle que:

$$\forall t \in I\ ,\ a(t)y"(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

L'équation est dite homogène ssi $d = 0$.

L'équation homogène associée à l'équation (E) est l'équation:

$$ay" + by' + cy = 0$$

On dispose d'un théorème de structure des solutions:

Proposition 2.3. *On reprend les notations de l'énoncé précédent.*

(i) *L'ensemble H des solutions de l'équation homogène (E_0) est un sev de l'espace des fonctions deux fois dérivables sur I.*

(ii) *Si $\tilde{y}$ est une solution sur I de (E), alors l'ensemble des solutions sur I de (E) est $\tilde{y} + H$.*

exercice 2.3.1. Un exemple de problème avec conditions aux limites:
Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f \leq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y" + fy = g$ possède une solution unique sur $[a, b]$ telle que $y(a) = y(b) = 0$.

Rappelons le principe de superposition, utile par exemple lorsque le second membre est une fonction trigonométrique:

Proposition 2.4. *Si y_1 est solution de $ay" + by' + cy = d_1$ et y_2 est solution de $ay" + by' + cy = d_2$, alors pour tout couple de scalaires (λ_1, λ_2), la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de $ay" + by' + cy = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$.*

exercice 2.4.1. *Soient ω_0 et ω deux réels strictement positifs. Etudier à quelle condition l'équation $(E) :\ y" + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)$ n'admet que des solutions bornées.*

2.5. **Théorème de résolution des équations linéaires d'ordre deux sous forme normalisée.** On s'intéresse dans cette section à des équations de la forme$(E) : y" = \alpha y' + \beta y + \gamma$ où α, β, γ sont des fonctions continues sur un intervalle I.

On reprend les notations précédentes.

Théorème 2.6. (i) *L'espace H des solutions de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel de dimension deux. Toute base de cet espace sera appelée* système fondamental de solutions

(ii) *Si $\tilde{y}$ est une solution particulière (dont on admettra l'existence), l'ensemble des solutions de (E) est $\tilde{y} + H$.*

(iii) *Pour tout (t_0, y_o, y_1) dans $I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} \text{(E)} & \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \end{cases}$$

admet une solution et une seule.

Remarque 2.6.1. *Le théorème de Cauchy montre que pour t_0, l'application $x \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme d'ev entre l'espace des solutions S et $\mathbb{R}^2$. En particulier un couple de solutions (y, z) est une base de l'espace S ssi le déterminant $y(t_0)z'(t_0) - y'(t_0)z(t_0)$ est non nul. Cette condition est indépendante de t_0. La fonction $xy' - x'y$ s'appelle le Wronskien du système de solutions (x, y). Voir la dernière section pour des applications de cette notion.*

2.7. **Théorème de résolution des équations linéaires d'ordre deux sous forme normalisée.** Revenons à une équation linéaire d'ordre deux écrite sous forme générale:
$(E)\ :\ ay" + by + c = 0$, les fonctions a, b, c étant continues sur un intervalle I. Si a ne s'annule pas sur I, les résultats du paragraphe précédent s'applique à l'équation mise sous forme résolue $y" = -\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a} + \frac{d}{a}$. On trouve ainsi un espace affine de solutions de dimension deux.

exercice 2.7.1. *On s'intéresse dans cet exercice à l'équation (E) : $y" + \varphi(t)y = 0$ avec φ une fonction continue sur un intervalle I. On notera f_1 et f_2 les solutions des pbs de Cauchy associés à (E) avec conditions initiales respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$.*

On suppose que $I = [-a, a]$ et φ paire. Montrer que si y est une solution sur I, la fonction $t \mapsto y(-t)$ est aussi solution.

En déduire que f_1 et f_2 sont respectivement paires et impaires. Caractériser alors les solutions paires et les solutions impaires de (E).

2.8. **Méthode de recherche de solutions.** Citons quelques méthodes de recherche dun système fondamental de solutions (SFS):

Dans le cas d'une équation à coefficients non constants, on ne dispose pas d'un théorème donnant un système fondamental de solutions de l'équation homogène. On propose dans ce paragraphe quelques méthodes permettant de résoudre ce problème dans des cas pratiques.

▸ **Recherche d'une solution DSE**.

Cette méthode fonctionne (parfois) lorsque les coefficients de l'équation sont polynomiaux.

Rappelons qu'il s'agit de chercher formellement une série $\sum a_n t^n$ convergente sur un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

✓ En invoquant le théorème de dérivation terme à terme et le théorème d'unicité des coefficients, on ramène l'équation différentielle étudiée à une relation de récurrence sur les coefficients a_n.
✓ On résout la récurrence précédente.
‡ Il ne faut pas oublier de vérifier que le rayon de convergence de la série entière obtenue $\sum a_n t^n$ est non nul, ce qui permet de valider les calculs précédents.

exercice 2.8.1. *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_-^*$ *l'équation différentielle* (E) *:* $xy" + 2y' + xy = 0$.

Touver les solutions de (E) *sur* $\mathbb{R}$.

▸ **Compléter une solution en une base** On reprend les notations habituelles et on suppose que l'on dispose déjà d'une solution y_1 de l'équation $ax" + bx' + cx = 0$ qui ne s'annule pas sur I. L'idée de base est d'effectuer le changement de fonction $y = y_1 z$. En reportant l'expression de y dans l'équation on aboutit à une équation en z:

$$ay_1 z" + (2ay_1' + by_1)z' + (ay_1" + by_1' + cy_1)z = d$$

Comme y_1 est solution, le coefficient de z est nul et on est donc ramené à une équation d'ordre 1 en y'.

exemple 2.8.2. *Trouver une solution polynomiale évidente de* (E)*:* $(t^2 + 1)x" + tx' - x = 0$*. Résoudre alors complètement* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

▸ **Méthode de changement de variable**. Cette méthode permet de se ramener à une équation différentielle plus simple (idéalement à coefficients constants).

Commençons par une définition:

Définition 2.9. *Soient* $k \in \mathbb{N}^*$*,* I *et* J *deux intervalles et* $\varphi : I \to J$*.*

On dira que φ *est un* $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme de* I *sur* J *si* φ *est une bijection de classe* $\mathcal{C}^k$ *dont la réciproque est également de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

En pratique pour vérifier que φ *est un* $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme, il suffit de vérifier que* φ *est bijective de* I *dans* J*, de classe* $\mathcal{C}^k$ *et que :* $\forall t \in I\ ,\ \varphi'(t) \neq 0$*.*

On cherche donc à résoudre sur I l'équation différentielle (E) : $ax" + bx' + cx = 0$.

(a, b et c fonctions continues, a ne s'annulant pas sur I).

Si φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de I dans un autre intervalle J, alors pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur I, il existe une et une seule fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur J telle que $x = y \circ \varphi$ (y est la fonction $x \circ \varphi^{-1}$).

En reportant $x = y \circ \varphi$ dans (E) on obtient une nouvelle équation différentielle (E') dont l'inconnue est la fonction y. La fonction x est solution de (E) sur I ssi y est solution de (E') sur J.

exemple 2.9.1. *Résoudre* $t^2 x"(t) + 2tx'(t) + x(t) = 0$ *en utilisant le changement de variable* $\varphi(t) = \ln t = u$*.*

2.10. **Recherche d'une solution particulière.**

▸ Dans le cas d'une ED linéaire d'ordre deux à coefficients constants, il faut savoir trouver une solution particulière lorsque le second membre est polynomial, polynomial-exponentiel, trigonométrique, polynomial-trigonométrique (on se ramène au cas précédent via une exponentielle complexe)

▸ Dans le cas d'une ED à coefficients polynomiaux, dont le second membre est également DSE, la recherche d'une solution particulière DSE peut s'avérer efficace.

▸ La méthode de changement de variable s'applique de la même façon que dans le cas homogène.

▸ Enfin, si y_1 est une solution **de l'équation homogène** qui ne s'annulle pas sur I, en effectuant le changement de fonction $y = y_1 z$, on aboutit par les même calculs qu'à la section précédente à une ED d'ordre 1 en z' mais avec second membre. On sait en théorie résoudre cette ED, ce qui donne z' puis z (les calculs peuvent être laborieux...)

3. UN CAS PARTICULIER IMPORTANT: LES ÉQUATIONS DE STURM-LIOUVILLE

Ces équations ont déjà fait l'objet de nombreux problèmes et exercices de concours. Il s'agit d'équations du type : $(E)\ :\ y'' + py = 0$, où p est une fonction continue sur un intervalle I.

On peut tout d'abord établir des résultats concernant les "zéros" (càd les points d'annulation) des solutions.

exercice 3.0.1. *Soit y une solution de (E)* ***qui n'est pas la fonction nulle****.*

(a) Montrer que si $x_0 \in I$ est tel que $y(x_0) = 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que y ne s'annule pas sur $]x_0, x_0 + \delta[$ (commencer par montrer que $y'(x_0) \neq 0$).

(b) Si y est une solution telle que $y(x_0) = 0$ et qui s'annule pour au moins une valeur $x > x_0$, justifier l'existence de $x_1 = \min\{x > x_0\ ,\ y(x) = 0\}$. On dira alors que x_0 et x_1 sont des "zéros consécutifs" de y.

De nombreux résultats portent sur "l'entrelacement des zéros" des solutions de deux équations de Sturm-Liouville.

exercice 3.0.2. *Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $y" + ay' + by = 0$, où a et b sont des fonctions réelles continues sur un segment I.*

(a) Montrer que y_1 n'admet qu'un nombre fini de zéros dans I.

*(b) Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 il y a un unique zéro de y_2 (*on pourra s'intéresser au Wronskien W_{y_1,y_2}*).*

exercice 3.0.3. *Soient q et r deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $r \geq q$ sur I. On considère les deux équations de Sturm-Liouville associées:*

$$(E_1)\ :\ y'' + qy = 0\ ,\ \ (E_2)\ :\ z'' + rz = 0$$

Dans tout l'exercice, on notera y une solution non nulle de (E_1) et $x_0 < x_1$ deux zéros consécutifs de y dans I.

(a) Etudier le signe de $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ (en fonction de celui de y sur $]x_0, x_1[$).

(b) Soit z une solution de (E_2). On note $W = yz' - y'z$; calculer W' puis $W(x_1) - W(x_0)$.

Prouver que z s'annule au moins une fois sur $[x_0, x_1]$.

(c) Soit x une solution de (E_1) non proportionnelle à y. Montrer que x a un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

On peut donner une application de l'exercice précédent:

exercice 3.0.4. *Soit $\lambda > 0$ et y une solution de*

$$y'' + (1 + \frac{\lambda}{t^2})y = 0$$

On admettra que y est définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout réel a, la fonction y s'annule au moins une fois sur l'intervalle $|a, a + \pi]$.

(b) Montrer que les zéros de y forment une suite strictement croissante (x_n) telle que $x_{n+1} - x_n$ tend vers π quand $n \to +\infty$ (*indication*: pour $\epsilon > 0$ donné, encadrer $1 + \frac{\lambda}{t^2}$ entre 1 et $1 + \epsilon$ et appliquer l'exercice précédent).

Terminons par un exercice utilisant le lemme dit "de Gronwall":

exercice 3.0.5. *(a) (Lemme de Gronwall). Soient u et v des fonctions continues sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives et $c > 0$ tel que:*

$$\forall x \geq a\ ,\ u(x) \leq c + \int_a^x u(t)v(t)dt$$

Montrer que pour tout $x \geq a$:

$$u(x) \leq c\exp(\int_a^x v(t)dt)$$

(b) Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que q' soit intégrable.

Démontrer que les solutions de l'équation:

$$y'' + (1 + q)y = 0$$

sont bornées ainsi que leur dérivée d'ordre 1 (*indication*: introduire $E = \frac{1}{2}(y^2 + y'^2)$).