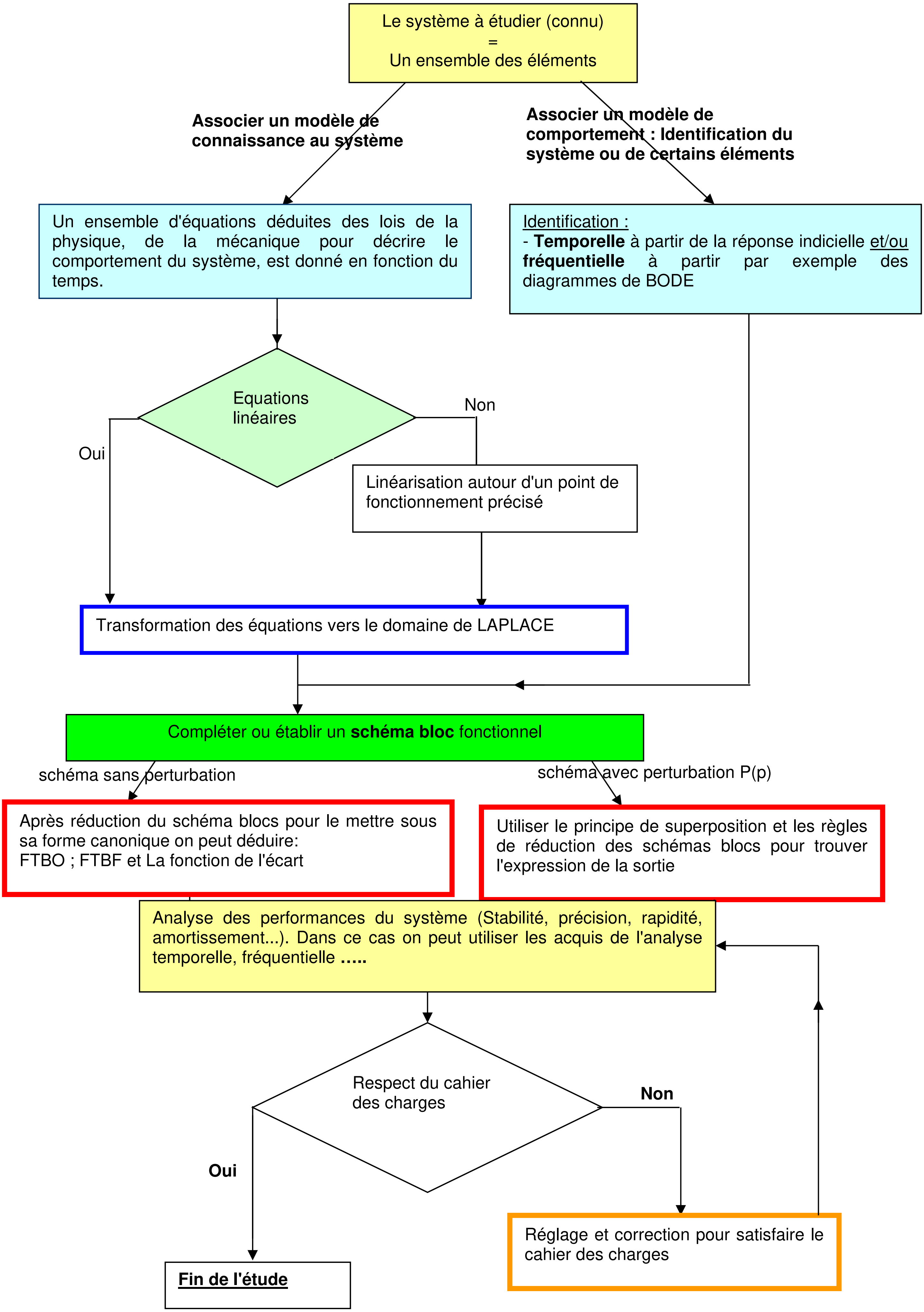
THEME1 - Ch 0 **: SLCI** **Démarche générale pour l'étude et l'optimisation des Systèmes Linéaires Continus et Invariants et rappels sur les réponses temporelles**



TRANSFORMÉES DE LAPLACE INVERSES DES FONCTIONS USUELLES

F(p)	f(t) = L-1[F(p)]
1	$\delta(t)$ impulsion de Dirac
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ échelon unité
e^{-Tp}	$\delta(t-T)$ impulsion retardée
$\frac{e^{-Tp}}{p}$	$u(t-T)$ échelon unité
$\frac{1}{p^2}$	$t \cdot u(t)$ rampe unitaire
$\frac{1}{p^n}$; n entier	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^2} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n (n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1-(1+\frac{t}{\tau}) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t-\tau+\tau e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{e^{\frac{-t}{\tau_1}}-e^{\frac{-t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}$
$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1-\frac{\tau_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{p+z\omega_0}{\omega_0^2+2z\omega_0 p+p^2}$	$e^{-z\omega_0 t} \cdot \cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p=\omega_0\sqrt{1-z^2}$
$\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_p t)$
$\frac{1}{p(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2})}$	$1-\frac{\omega_0}{\omega_p} e^{-z\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_p t+\psi)$ avec $\psi=\arccos(z)$

Il est sous-entendu que toutes les fonctions de t sont multipliées par $u(t)$, c'est-à-dire qu'elles sont nulles avant l'instant $t=0$.

Propriétés de la transformée de Laplace

1) Unicité

À une $f(t)$correspond une $F(p)$unique, et inversement.

2) Linéarité

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$$
$$L[\lambda f(t)] = \lambda L[f(t)] = \lambda F(p)$$

3) Théorème du retard

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} \cdot F(p)$$

4) Théorème de dérivation

$$L[\frac{d\,f(t)}{dt}] = p \cdot F(p) - f(0^+)$$

donc, <u>dans le cas particulier des fonctions causales</u>, qui sera *toujours* le cas auquel on se ramènera :

$$\boxed{L[\frac{d\,f(t)}{dt}] = p \cdot F(p)}$$

<u>pour la dérivée seconde :</u>

$$L[\frac{d^2\,f(t)}{dt^2}] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f'(0^+)$$

et donc, pour les fonctions causales : $\boxed{L[\frac{d^2\,f(t)}{dt^2}] = p^2 \cdot F(p)}$

5) Théorème d'intégration

Si $f(t) = \frac{d\,g(t)}{dt}$, alors : $L[\int_0^t f(u)\,du] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$

si $g(t)$ est causale alors : $\boxed{L[\int_0^t f(u)\,du] = \frac{F(p)}{p}}$

6) Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p)$$

7) Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

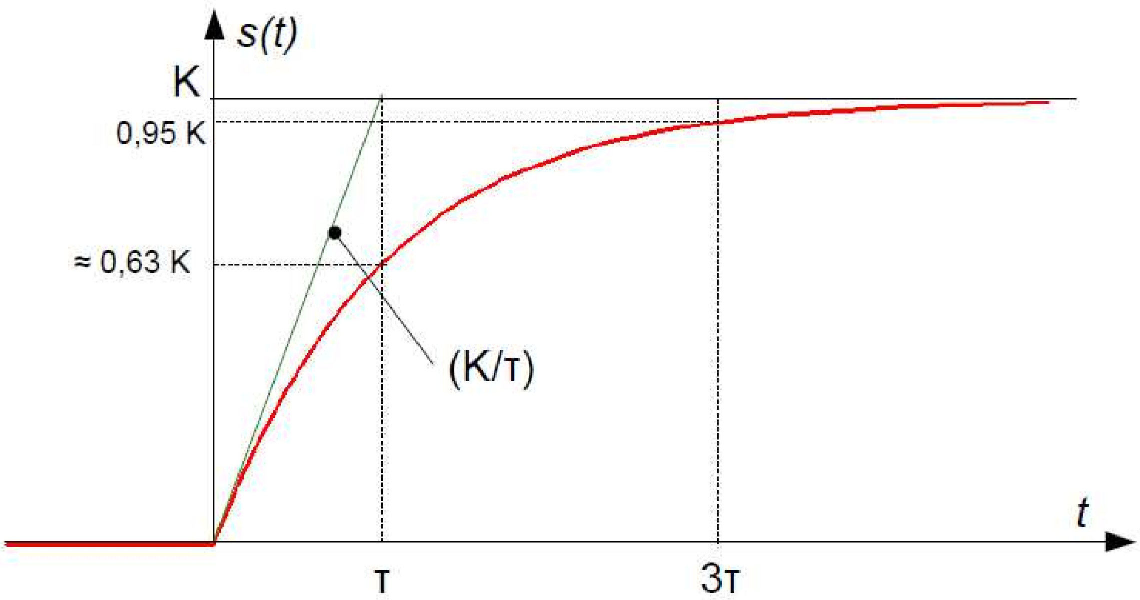
Réponse indicielle des systèmes du 1er ordre

Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$

Rappel : la réponse indicielle est la réponse à l'échelon ; on prendra ici un échelon unitaire

Réponse indicielle : $s(t) = K\left(1-e^{-t/\tau}\right) \quad pour\, t \geq 0$

Tracé :



Propriétés :

- $s(0)=0$
- Tangente à l'origine de pente $\frac{K}{\tau}$.
- $\lim_{t \to +\infty} s(t)=K$ (asymptote horizontale en $+\infty$, **permet de déterminer K**).
- Croissance monotone (pas de dépassement ni d'oscillations).
- $s(\tau) \approx 0{,}63\ K$.
- $t_{5\%} \approx 3\ \tau$.

NB : si l'échelon est d'amplitude A, la réponse est multipliée par A $s(t) = AK\left(1-e^{-t/\tau}\right) \quad pour\, t \geq 0$

EXEMPLE : SYSTEMES DU 1er ordre

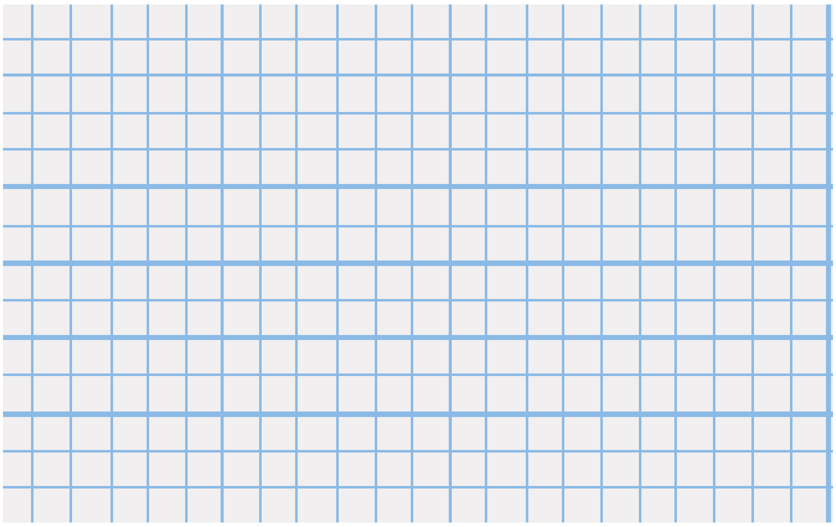
Calcul et tracé de réponse

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{20}{5+p}$$

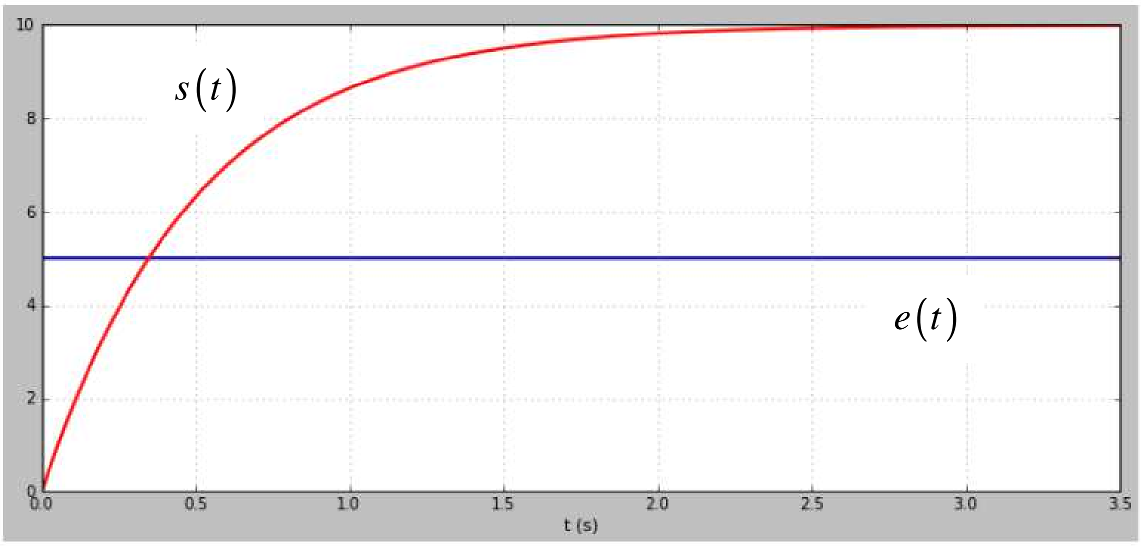
1. Sachant ici que e(t) est l'echelon d'amplitude 5, combien vaut :

$E(p) =$	$s(t) =$

2. Tracer la réponse s(t) à <u>l'échelon d'amplitude 5</u> - Allure et points caractéristiques (valeur finale, T5%, tangente en 0, temps caractéristique…) – Vous respecterez scrupuleusement votre choix d'échelle.



Identification :



1. A l'aide d'une identification graphique , combien vaut :

$E(p) =$	$H(p) =$
$s(t) =$	

Réponse indicielle des systèmes du 2nd ordre

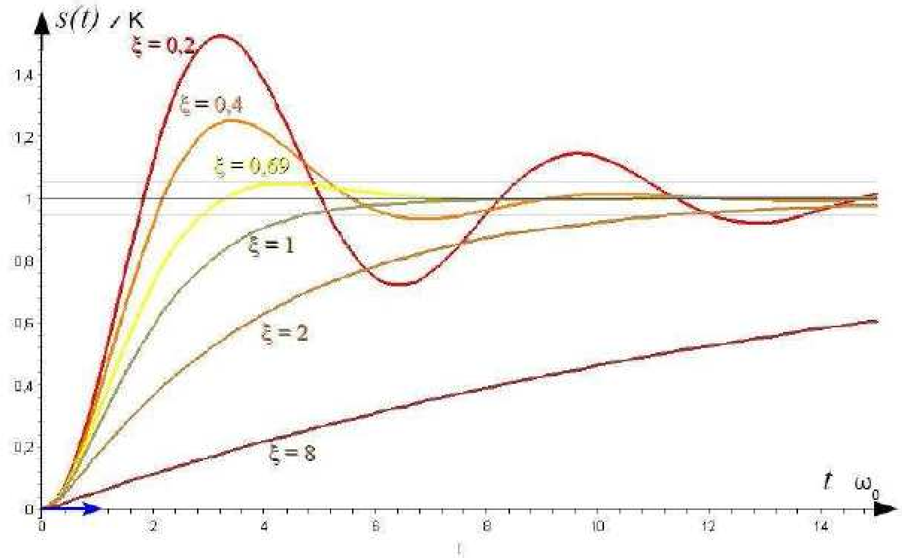
Fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2\,\xi}{\omega_0}\cdot p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$

Si $\xi\geq 1$, la fonction de transfert peut s'écrire $H(p)=\dfrac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$.

Réponse indicielle (échelon unitaire) : 3 cas :

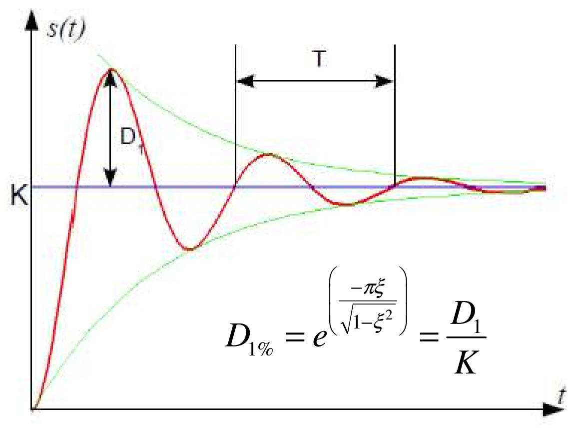
$\xi>1$	$\xi=1$	$\xi<1$
$s(t)=K\left(1-\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}(\tau_1\, e^{\frac{-t}{\tau_1}}-\tau_2\, e^{\frac{-t}{\tau_2}})\right)$	$s(t)=K\left(1-(1+\dfrac{t}{\tau_0})(e^{\frac{-t}{\tau_0}})\right)$	$s(t)=K\left(1-\dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin[\,\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t+\arccos(\xi)]\right)$
Système amorti	*Amortissement critique*	*Système oscillant*

Tracés :



Propriétés :

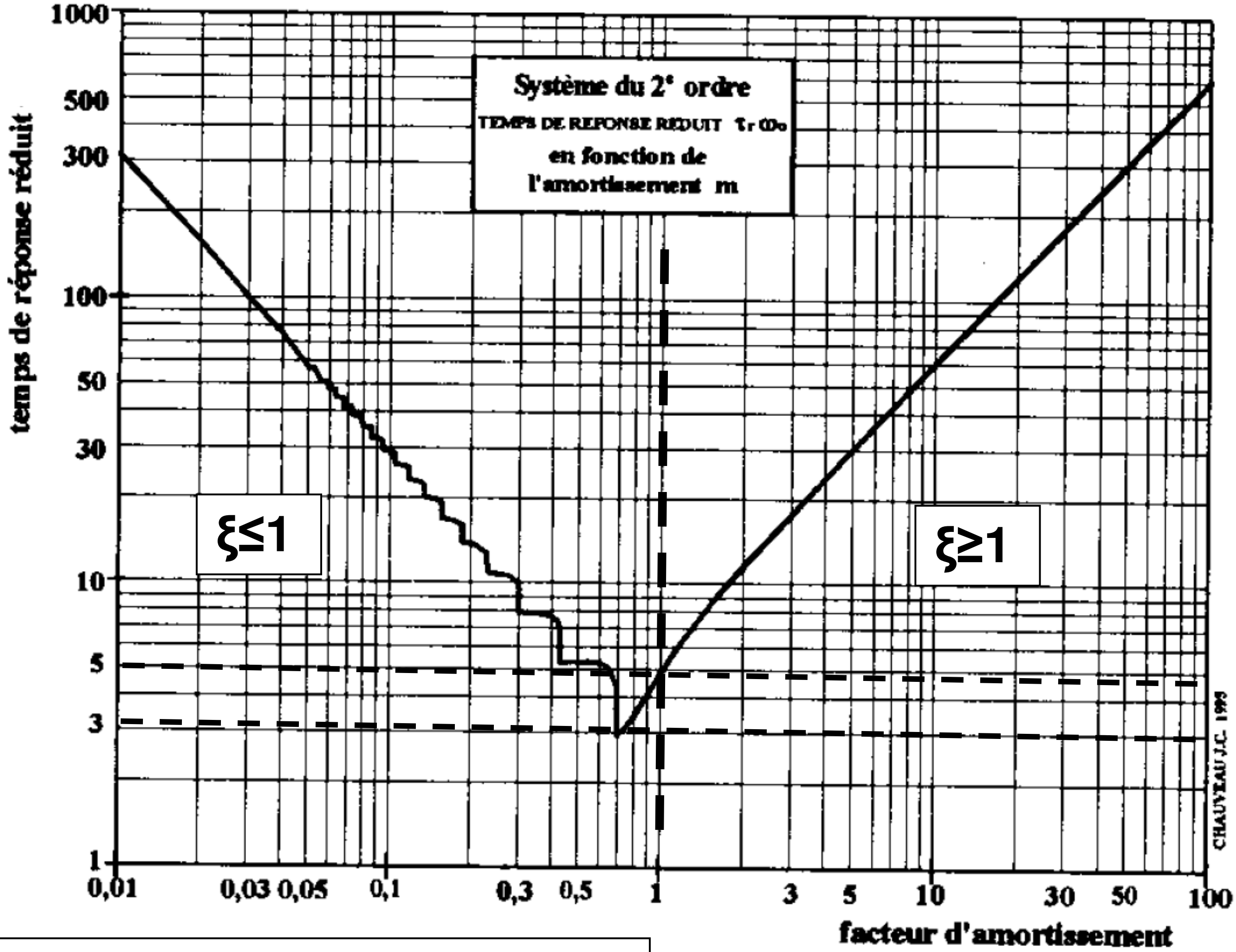
- <u>Dans tous les cas :</u>
  - $s(0)=0$
  - $s'(0)=0$ (tangente horizontale à l'origine)
  - $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)=K$ (asymptote horizontale en +∞, **permet de déterminer K**).
- <u>Pour les systèmes oscillants ($\xi<1$) :</u>
  - $T=\dfrac{2\,\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ (**permet de déterminer ω_0** si on connaît ξ)
  - $D_1=K\,e^{\frac{-\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ (**permet de déterminer ξ**)



Le temps de réponse le plus court est obtenu pour $\xi=0{,}69\approx 0{,}7$, alors $t_{5\%}\approx 3/\omega_0$.

<u>NB : si l'échelon est d'amplitude A, la réponse est multipliée par A</u>

Diagramme de détermination du temps de réponse à 5 % d'un système du deuxième ordre à une entrée indicielle (ou échelon)



En abscisse : le coefficient d'amortissement ξ
En ordonnée : la valeur du produit $\omega_0 \times t_{5\%}$ (en rad)

Lecture dans le sens « abscisse vers ordonnée » (cas unique)

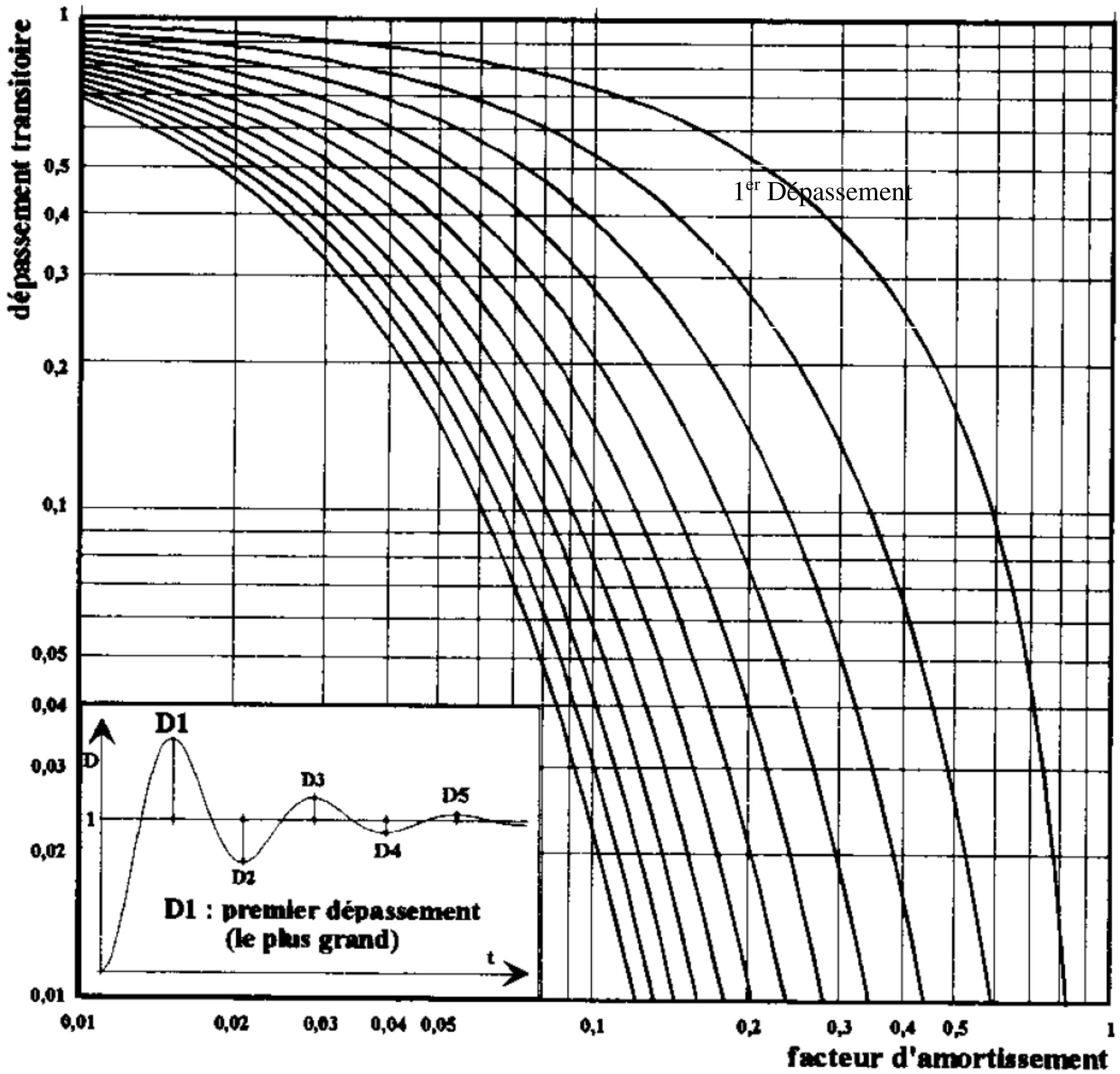
Cherchons par exemple la valeur du temps de réponse à 5 % d'un système du 2^e ordre de pulsation propre ω_0 = 120 rad.s^{-1} et coefficient d'amortissement ξ = 0,5 : on trace une droite verticale au niveau de ξ = 0,5 et, en regardant la valeur de l'ordonnée au niveau de la courbe, on trouve $\omega_0 \times t_{5\%}$ = 5,1 environ, ce qui donne un temps de réponse à 5 % qui vaut $t_{5\%}$ = 42,5 ms.

Valeurs particulières

Remarquons les valeurs particulières pour $\boxed{\xi = 0{,}692 \ : \omega_0 \times t_5 \simeq 3}$ (vraie valeur 2,987)

$\boxed{\xi = 1 \ : \omega_0 \times t_5 \simeq 5}$ (vraie valeur 4,744)

Diagramme de détermination des dépassements successifs d'un système du deuxième ordre à une entrée indicielle (échelon)



En abscisse : le coefficient d'amortissement ξ En ordonnée : la valeur du dépassement transitoire *relatif :* $D_{n\%}$

On rappelle que $D_1\% = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ et $D_n\% = (D_1\%)^n = e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Lecture dans le sens « abscisse vers ordonnée » (détermination des D_n à partir de ξ)

Cherchons par exemple les valeurs des dépassements pour ξ = 0,6 : on trace une droite verticale pour cette valeur de ξ et on mesure environ 0,095 (9,5 %) pour le 1er dépassement et un peu moins de 0,01 (1 %) pour le 2e : le calcul donne 0,0947 (9,47 %) pour le 1er et 0,0089 (0,89 %) pour le 2e.

Lecture dans le sens « ordonnée vers abscisse » (détermination de ξ à partir de D_1)

On mesure un 1er dépassement de 40 %, soit 0,4 : on trace une droite horizontale pour cette valeur et on en déduit un valeur de 0,28 environ pour ξ : le calcul donne 0,28 exactement (un peu de chance).

EXEMPLE : SYSTEMES DU 2d ordre

Calcul et tracé de réponse

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + p + p^2}$$

1. Donner ξ et ω_0. En déduire D1 (pour l'échelon d'amplitude 2) et T.

Pulsation propre $\omega_0 =$

Coefficient d'amortissement : $\xi =$

$E(p) =$

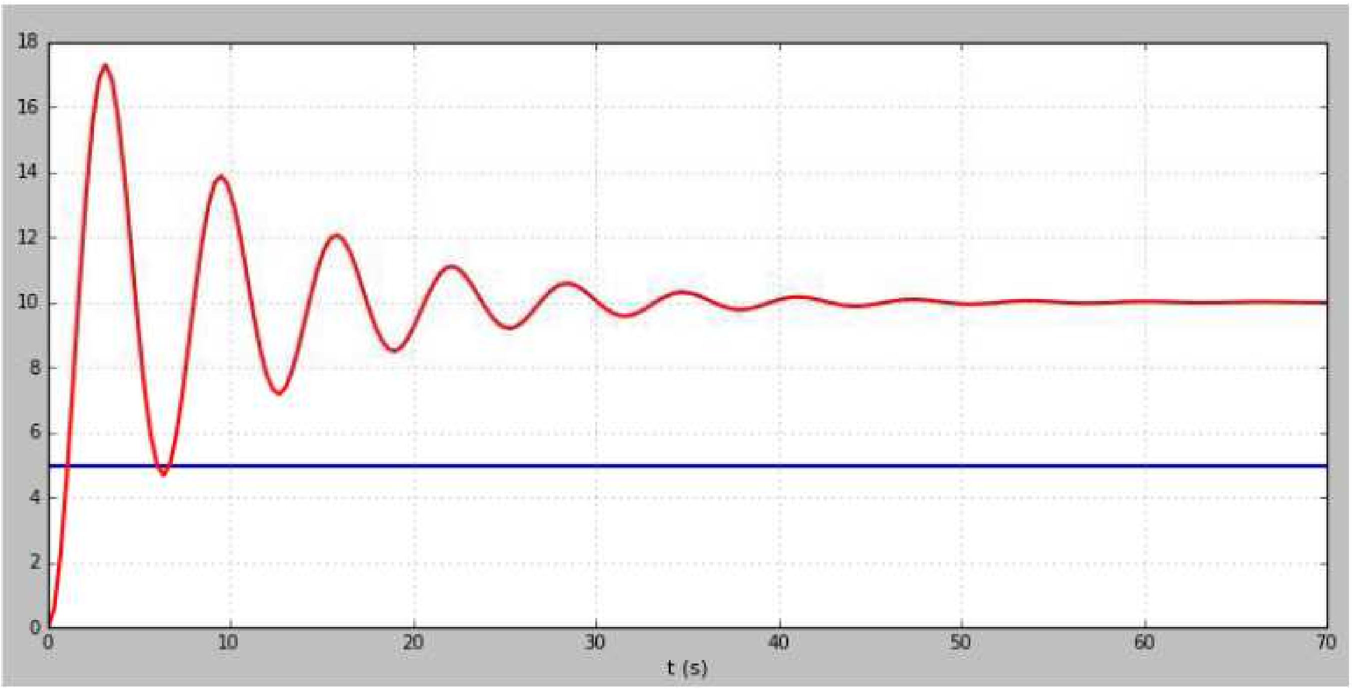
$D_1 =$

$D_1\% =$

$T =$

2. Tracer la réponse s(t) à l'échelon d'amplitude 2 - Allure et points caractéristiques (valeur finale, T5%, tangente en 0, temps caractéristique…) – Vous respecterez scrupuleusement votre choix d'échelle.

Identification



1. A l'aide d'une identification graphique , combien vaut :

$E(p) =$

$D_1 =$

Coefficient d'amortissement : $\xi =$

$T =$

Pulsation propre $\omega_0 =$

$H(p) =$