STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

1. L'instabilité ?

Du point de vue de l'utilisateur, l'instabilité d'un système se traduit par des oscillations aléatoires et longues. Par exemple, pour un asservissement de position, un système instable n'atteindra pas une position fixe mais oscillera de manière anarchique et incontrôlée autour d'une valeur.

Propriété :

D'un point de vue strictement théorique, un système est stable si et seulement si à une **consigne bornée correspond une réponse bornée** elle aussi.

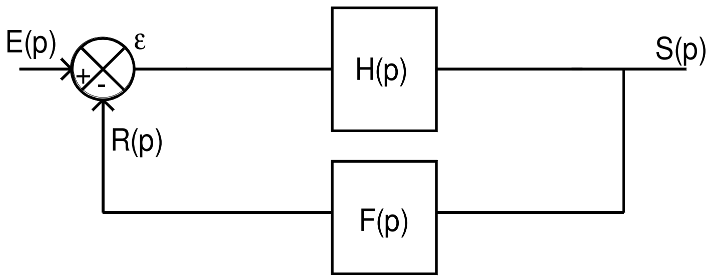
L'instabilité d'un système a des conséquences néfastes sur la précision et est la cause de graves dégradations dans les liaisons mécaniques, l'ingénieur cherchera donc à s'éloigner le plus possible d'une situation instable en respectant des **« marges de stabilité »** .

2. Critère de stabilité

Un système asservi est bouclé. Par conséquent, l'instabilité est due en fait à un « **feedback** », un « **larsen** » en quelque sorte qui ne fait qu'augmenter. C'est cette situation qui est la cause de l'instabilité.

Pour déterminer un critère de stabilité, étudions l'évolution de **l'écart $\varepsilon(t)$**. Si $\varepsilon(t)$ tend vers une valeur constante, à priori le système est stable, si $\varepsilon(t)$ diverge, il y a de grandes chances que le système devienne instable.

Soit le système modélisé par le schéma-bloc suivant :



La FTBO de ce système vaut : $\boxed{FTBO = H(p).F(p) = \dfrac{R(p)}{\varepsilon(p)}}$ $\boxed{FTBF = \dfrac{H(p)}{1+H(p).F(p)} = \dfrac{S(p)}{E(p)}}$

Le système est soumis à une entrée $e(t)$ bornée, par exemple une entrée sinusoïdale. Si l'entrée $e(t)$ est sinusoïdale, le retour $r(t)$ l'est aussi à la même fréquence mais avec une amplitude différente :

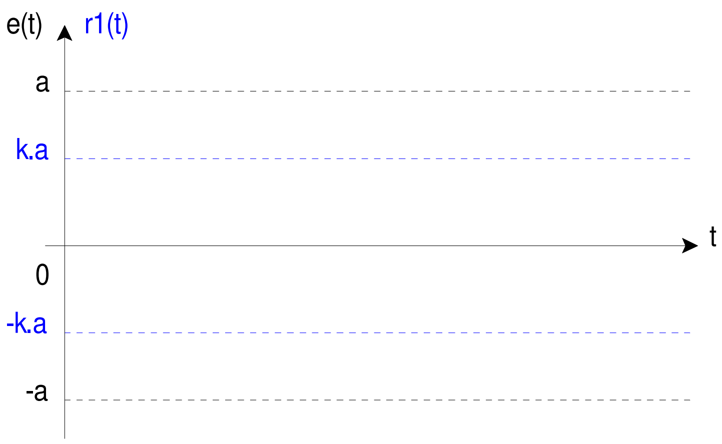
- $e(t) = a.\sin(\omega.t)$;
- $r(t) = b.\sin(\omega.t + \varphi)$.

Pour déterminer l'écart $\varepsilon(t)$ après une boucle, plaçons dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire celui où **l'entrée $e(t)$ et le retour $r(t)$ sont en opposition de phase**. C'est dans ce cas que l'écart $\varepsilon(t)$ est le plus grand.

Cas défavorable : opposition de phase

Il existe une pulsation ω_p telle que : $\begin{cases} \varphi = \arg(FTBO(j.\omega_p) = -180° \\ \dfrac{b}{a} = \left|FTBO(j.\omega_p)\right| = k \end{cases}$

Tracé :



Après une boucle, $\varepsilon 1=e1-r1=a$

Après deux boucles, $\varepsilon 2=e2-r2=-a+(-k.a)=-a-k.a$

….. $\varepsilon 3=e3-r3=a-(k.(-a-k.a))=a+k.a+k^2.a$

$\varepsilon i=ei-ri=ei-k\ (\varepsilon i-1)$

Après n boucles, $\varepsilon_n = a.\sum_{i=0}^{n} k^i$: divergent si $k \geq 1$ et convergent si $k < 1$.

Un critère de stabilité des systèmes asservis peut donc s'énoncer ainsi :

Critère de stabilité :

Lorsque le **déphasage en boucle ouverte est de -180°**, le système est **stable si le module de la FTBO est strictement inférieur à 1**.

Pour ω_p ***telle que*** $\arg(FTBO(j.\omega_p)) = -180°$ ***stable si*** $\boxed{\begin{array}{c} \left|FTBO\left(j.\omega_p\right)\right| < 1 \\ 20.\log\left(\left|FTBO\left(j.\omega_p\right)\right|\right) < 0 \end{array}}$

Pour appliquer ce critère de stabilité et évaluer la marge de stabilité, nous allons étudier en la **FTBO** du système asservi.

Nous disposerons d'une **méthode graphique** que nous allons présenter par la suite : l'analyse des diagrammes de Bode

Par ailleurs, il existe une **méthode analytique** basée sur l'analyse de la FTBF qui permet de conclure sur la stabilité : de manière stricte (stable ou instable) sans pouvoir quantifier précisément la marge de stabilité vis-à-vis de l'instabilité. Il s'agit de l'analyse des pôles de la FTBF ; nous la présenterons en fin de chapitre.

3. Méthodes graphiques.

L'objectifs des méthodes graphiques est de déterminer d'une part si le système est stable ou pas mais l'étude va plus loin, elle permet aussi de déterminer les **« marges de stabilité »**.

Ces marges n'ont de sens que lorsque **LE SYSTEME VERIFIE LE CRITERE DE STABILITE**.

- **Marge de phase MP :**

lorsque que le **gain en dB est nul**, la marge de phase notée **MP** représente le **déphasage que peut prendre la FTBO avant d'arriver à l'instabilité, soit -180°**.

Pour ω_C ***telle que*** $20.\log|FTBO(\omega_C)| = 0\,dB$ **,** $\boxed{MP = 180° + \arg(FTBO(\omega_C))}$

- **Marge de gain MG :**

lorsque le **déphasage de la FTBO est de -180°**, la marge de gain **MG** représente **le gain en dB restant avant d'atteindre la limite de l'instabilité, soit 0 dB.**

Pour ω_P ***telle que*** $\arg(FTBO(j.\omega_p)) = -180°$ **,** $\boxed{MG = -20.\log(|FTBO(\omega_P)|)}$

a. Diagrammes de Bode.

L'étude de la stabilité se porte sur l'étude du déphasage et **du gain** $A_{dB}(\omega)$ **de la FTBO**.

On trace les diagrammes de gain et de déphasage de cette fonction transfert en boucle ouverte.

Marges de stabilité :

Marge de Gain :

Pour déterminer la **marge de gain MG**, on cherche ω_p telle que le déphasage soit de -180°, en correspondance directe si le gain AdB est <0 le système est stable, sinon il est instable.

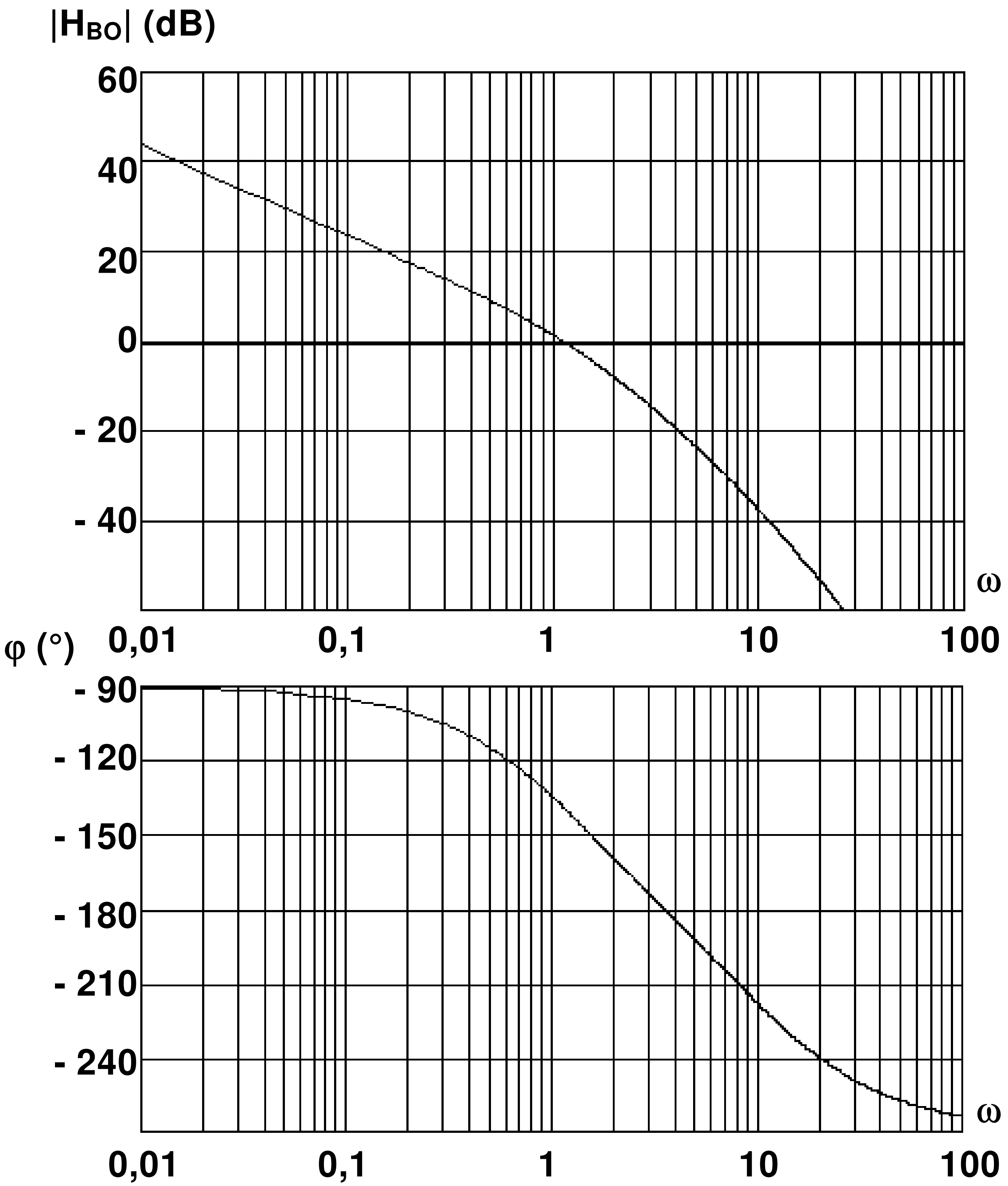
Dans le cas d'un système stable, la marge de gain **MG** est l'écart avec le 0 dB.

Marge de Phase :

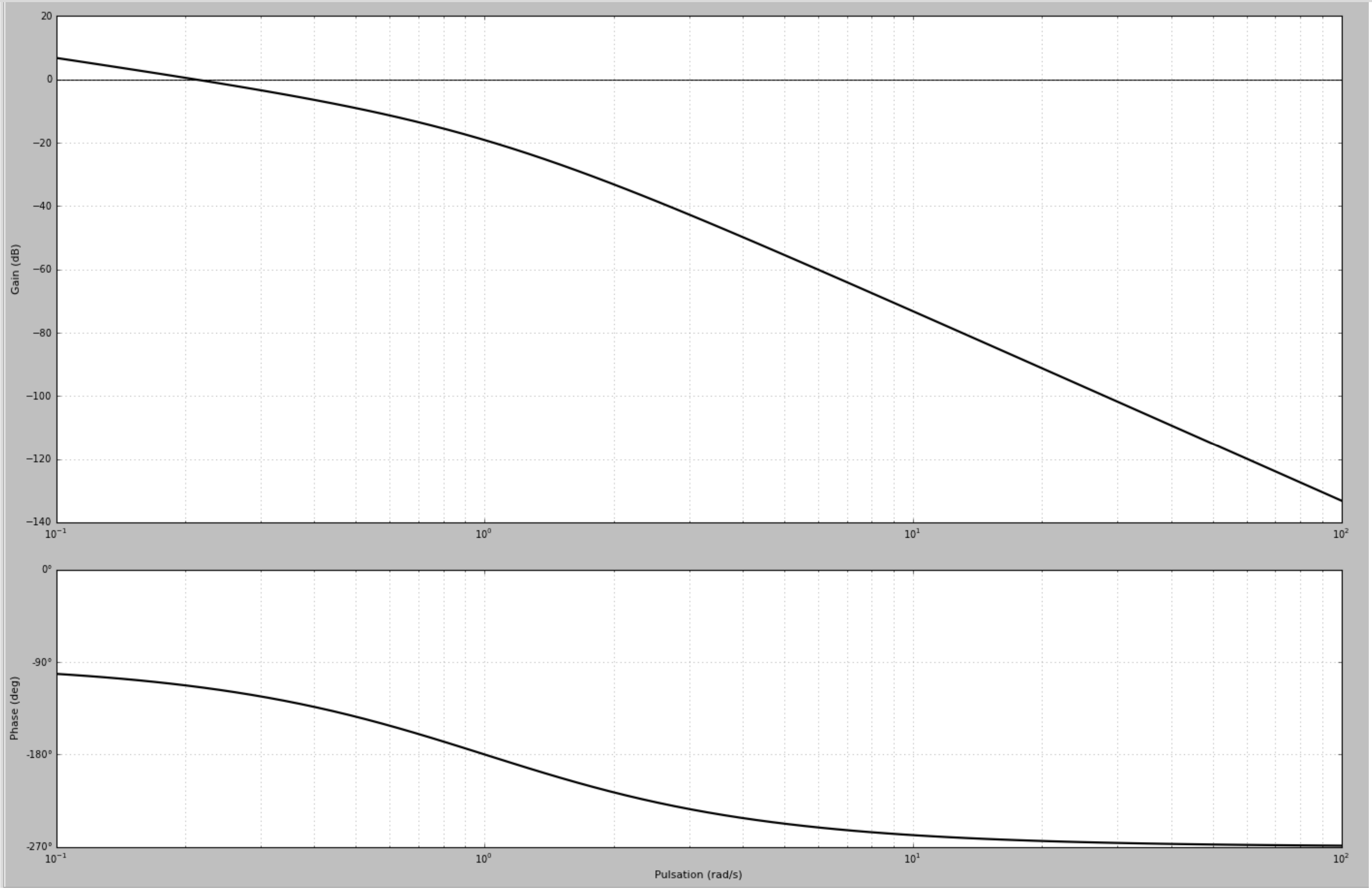
Dans le cas d'un système stable, pour déterminer la **marge de phase MP**, on cherche ω_c telle que le gain AdB soit nul, en correspondance directe la marge de phase MP est l'écart avec -180°.

NB : ces marges peuvent être, dans certains cas particuliers, infinies ou non définies

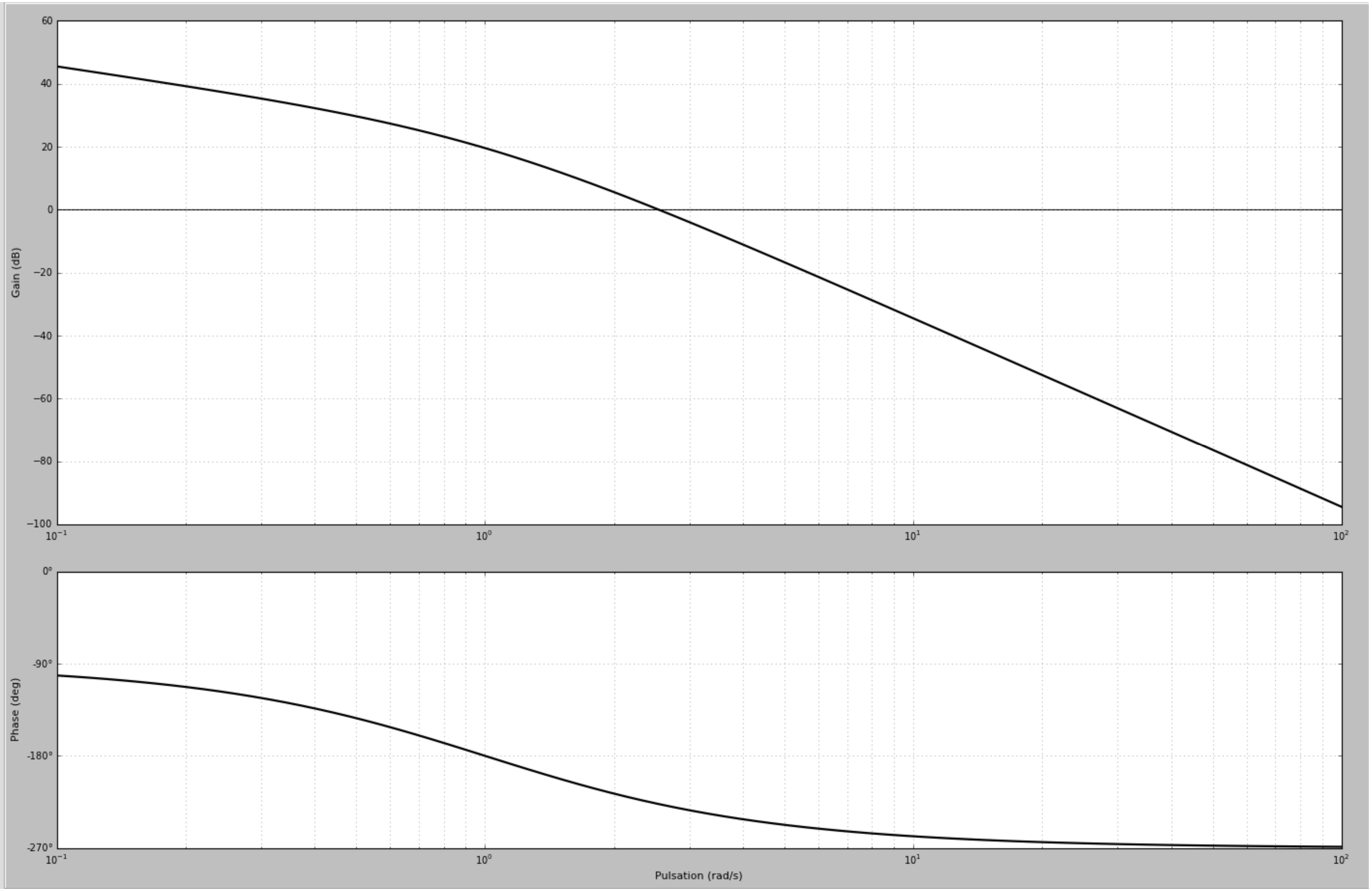
Exemple 0 : Le système est stable, on cherche la marge de gain MG et la marge de phase MP graphiquement.



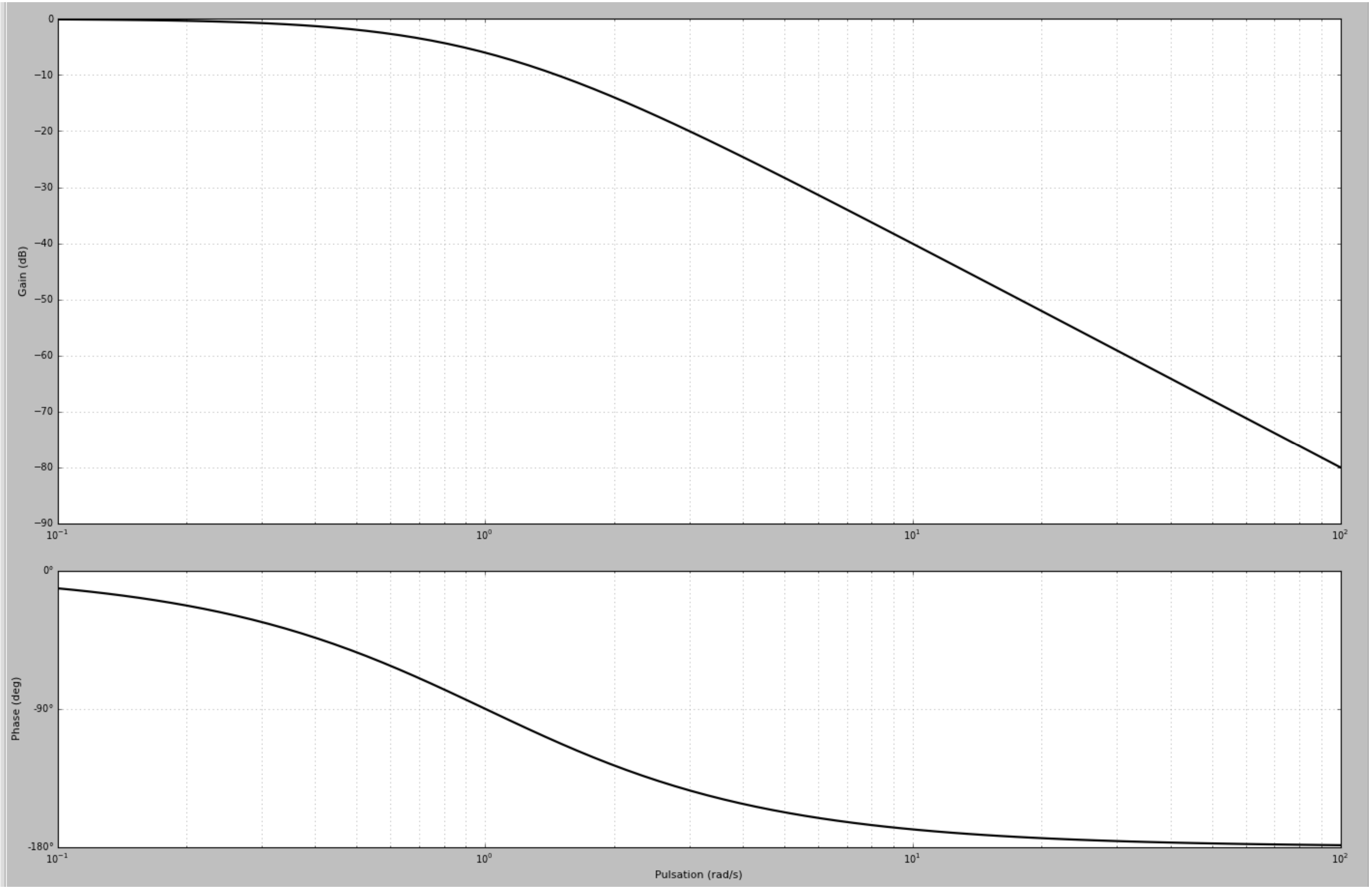
EXEMPLE 1 – cas stable



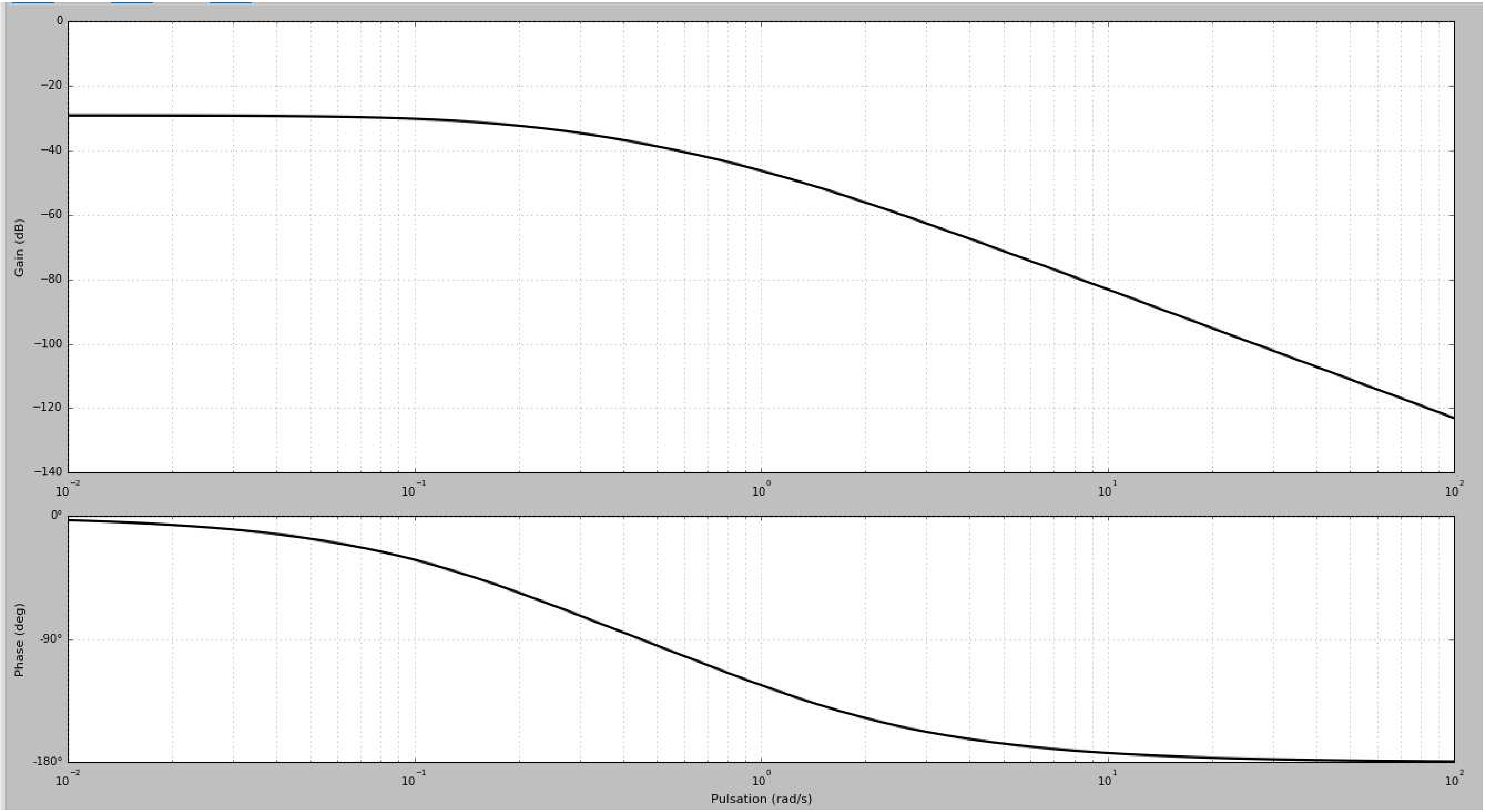
EXEMPLE 2 – cas instable



EXEMPLE 3 – détermination asymptotique des marges



EXEMPLE 4 – marge non définie



4. Méthode analytique : Analyse de pôles de la FTBF

En revenant à la définition de la stabilité théorique, un système est stable si à une entrée bornée il répond par une sortie bornée.

La fonction transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme canonique générale suivante :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{K}{D(p)} = \frac{S(p)}{E(p)}}$$

Prenons le cas d'une entrée de type impulsion unitaire $E(p)=1$ avec des conditions initiales nulles $s(0)=0$.

La réponse s'écrit : $\boxed{S(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.1 = \frac{K}{D(p)}}$

$D(p)$ est un polynôme de degré n possédant des racines (appelés pôles pour la FTBF) de 4 types différents :

- pôles nuls ;
- pôles réels simples p_i ;
- pôles réels multiples p_j ;
- pôles complexes conjugués $p_k = a_k \pm i.b_k$.

Ainsi le polynôme $D(p)$ s'écrit sous forme factorisée de la façon suivante :

$$\boxed{D(p) = p^{\alpha}.\prod_i (p-p_i).\prod_j (p-p_j)^{m_j}.\prod_k (p-a_k-i.b_k)(p-a_k+i.b_k)}$$

Finalement :

$$\boxed{S(p) = \frac{K}{D(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}.\prod_i (p-p_i).\prod_j (p-p_j)^{m_j}.\prod_k \left[(p-a_k)^2+b_k^{\,2}\right]}}$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse afin de voir si la sortie est bornée.

A l'aide des transformée de Laplace suivantes :

$\frac{1}{p^{\alpha}}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$
$\frac{1}{p-p_i}$	$e^{p_i.t}$
$\frac{1}{(p-p_j)^{m_j}}$	$\frac{e^{p_j.t}.t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}$
$\frac{1}{\left[(p-a_k)^2+b_k^{\,2}\right]}$	$\frac{1}{b_k}e^{a_k.t}.\sin(b_k.t)$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ est obtenue en décomposant en éléments simples et en utilisant le tableau précédent :

$$\boxed{s(t) = K_1.\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + K_2.\Sigma e^{p_i.t} + K_3.\Sigma\frac{e^{p_j.t}.t^{m_j-1}}{(m_j-1)} + K_4.\Sigma\frac{1}{b_k}.e^{a_k.t}.\sin(b_k.t)}$$

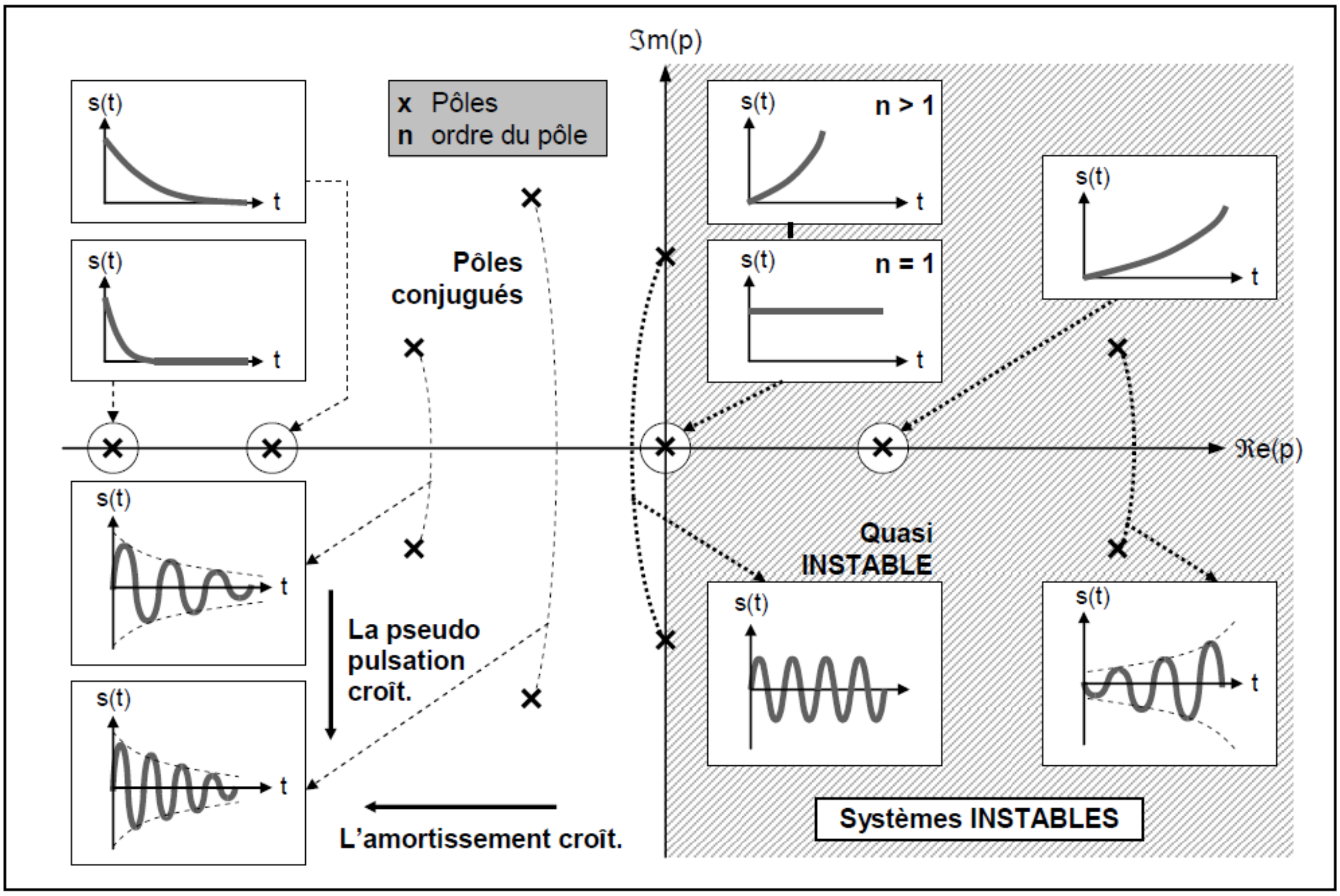
La réponse est bornée si :

- il y a un seul pôle nul ;
- les pôles simples sont négatifs ;
- les pôles multiples sont négatifs ;
- les pôles complexes ont une partie réelle négative.

En conclusion :

Un système linéaire est stable si tous les pôles de la FTBF sont à partie réelle négative et il existe un seul pôle nul.

On peut illustrer la stabilité selon la position des pôles de la fonction transfert en boucle fermée dans le plan complexe :



Exemple 1 :

$$H_{BF}(p)=\frac{5\cdot(p-3)}{(p+1)\cdot(p+2)}$$

Exemple 2 :

$$H_{BF}(p)=\frac{2}{(p-1)^2\cdot(p^2+p+1)}$$