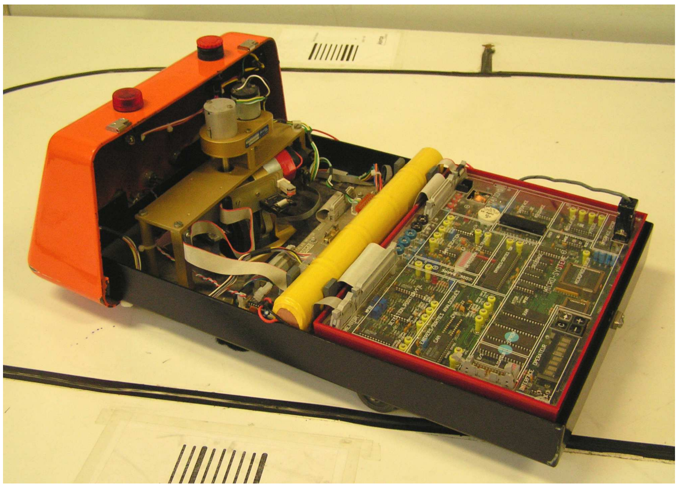
I - PROBLEMATIQUE

Sur un système linéaire asservi stable, plusieurs phénomènes sont à l'origine de la différence entre la consigne et la réponse obtenue. Les inerties des solides en mouvement, les amortissements présents dans la chaîne d'énergie, les frottements secs dans les liaisons. Afin de se conformer au cahier des charges lors de la conception d'un produit industrialisé, il est indispensable de pourvoir :

- **définir l'erreur** entre la consigne et la réponse du système ;
- déterminer **l'erreur en régime permanent** ;
- **étudier l'effet d'une perturbation** physique s'exerçant sur le système.

Les perturbations sont des efforts s'opposant au fonctionnement du système. Elles influent sur la précision puisqu'elles écartent la réponse de la consigne souhaitée.

Exemple : Asservissement en vitesse du Chariot Filoguidé



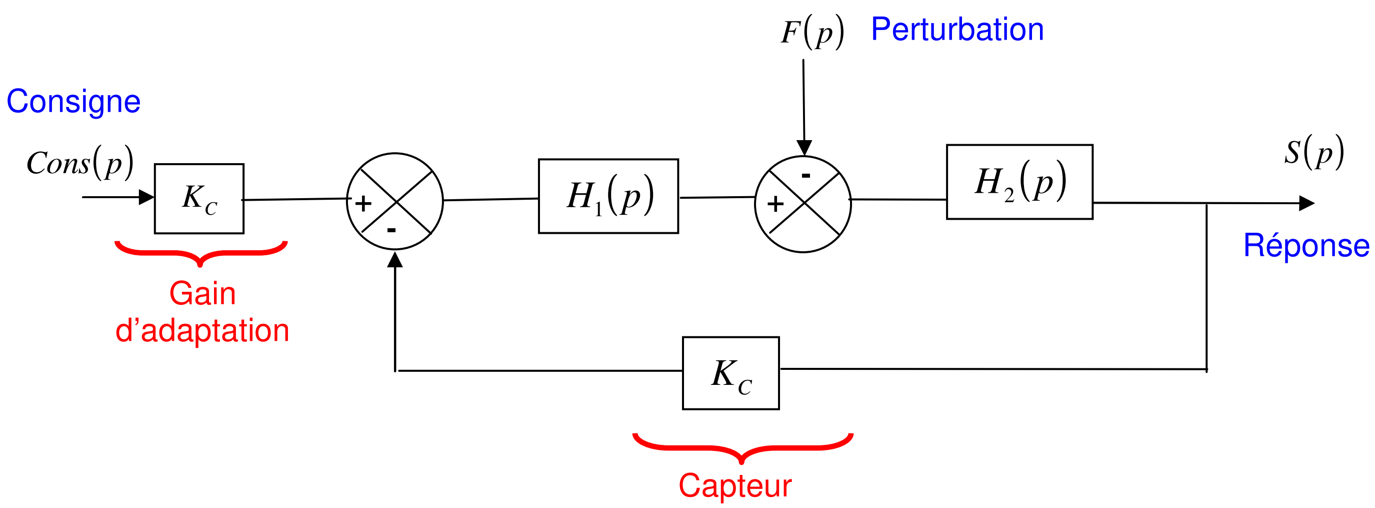
Causes d'erreur :

- gain des capteurs ;
- frottements ;
- déformations ;
- jeu dans les liaisons.

Perturbations :

- poids ;
- pente de la route ;
- effets aérodynamiques ;
- résistance au roulement.

Pour l'étude suivante nous considèrerons un **système asservi** de schéma-bloc suivant :



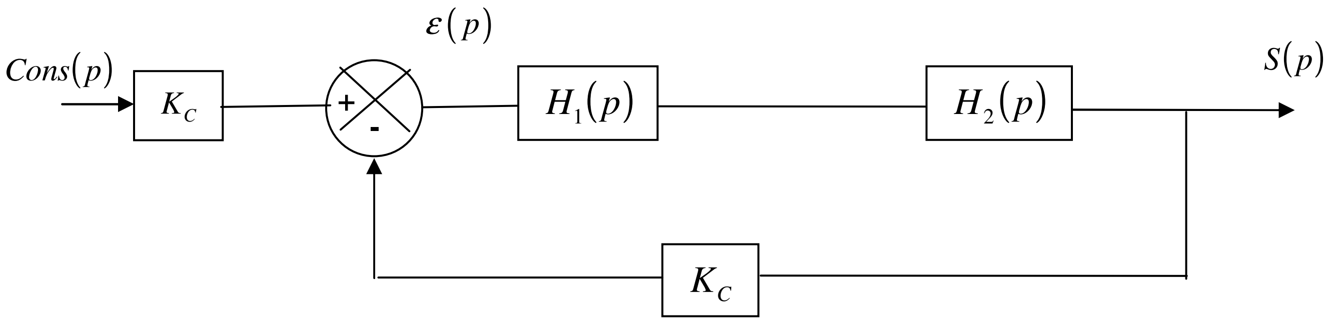
Rappel :

$$FTBO(p) = K_c.H_1(p).H_2(p)$$

$$FTBF(p) = \frac{K_c.H_1(p).H_2(p)}{1+K_c.H_1(p).H_2(p)}$$

II - ETUDE DE L'ERREUR SANS PERTURBATION : Précision de l'asservissement

Plaçons dans le cas d'une perturbation nulle dans un premier temps. Le schéma bloc devient :



1. Erreur d'un système

- **Définition 1 :** l'erreur $e_r(t)$ d'un système est la différence entre la consigne $cons(t)$ et $s(t)$:

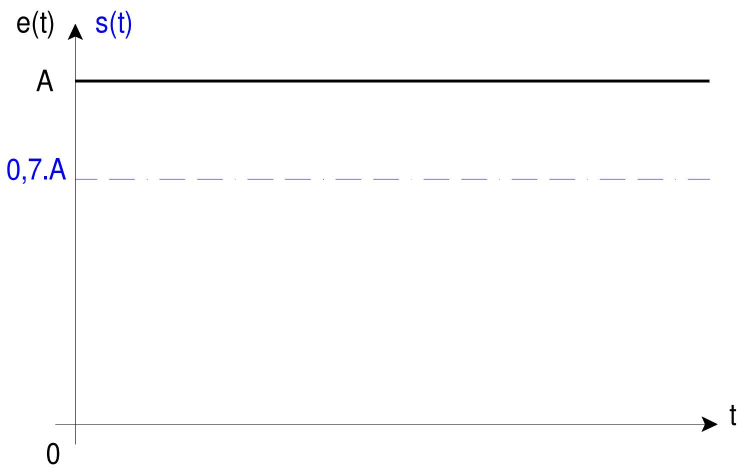
$$\boxed{e_r(t) = cons(t) - s(t)}$$

NB : $\varepsilon(t) = K_c.e_r(t)$

ATTENTION s(t) et cons(t) ont même unité !!!

Cette erreur est instantanée, elle est différente à chaque instant.

Exemple : soit un système défini par sa FTBF : $\dfrac{S(p)}{Cons(p)} = \dfrac{0,7}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}.p+\dfrac{p^2}{\omega_O{}^2}}$. avec z<1. Ce système est soumis à une consigne échelon de hauteur A. Observons graphiquement l'erreur $e_r(t)$ de ce système.



L'erreur instantanée n'est souvent pas observable par l'utilisateur car les temps de réponses de systèmes mécaniques sont faibles. Cependant, il est intéressant de connaître la valeur de cette **erreur en régime permanent,** valeur observable lors d'un asservissement de position par exemple.

Calcul de l'erreur :

$$\boxed{E_r(p) = \frac{1}{1+FTBO}.Cons(p)}$$

La FTBO (fonction transfert en boucle ouverte) du système asservi peut être écrite sous forme canonique générale de la manière suivante :

$$\boxed{FTBO(p) = \frac{K}{p^{\alpha}}.\frac{1+a_1.p+....+a_n.p^n}{1+b_1.p+....+b_m.p^m}} \text{ avec } m > n$$

K : **gain statique** de la FTBO

$\alpha \geq 0$: **classe du système**

- **Définition 2 :**

la classe α d'un système asservi est **le nombre d'intégrateur(s) $\frac{1}{p}$ présent(s) dans la boucle ouverte du système**.

2. Erreur statique :

- **Définition 3 :** l'erreur statique E_s d'un système est la valeur de l'erreur $e_r(t)$ en régime permanent :

$$\boxed{E_s = \lim_{t \to +\infty} cons(t) - s(t)}$$

Le système asservi est soumis à une entrée échelon, rampe ou parabole. La consigne s'écrit donc dans le domaine de Laplace :

- Echelon $A.u(t)$: $Cons(p) = \frac{A}{p}$;
- Rampe $A.t.u(t)$: $Cons(p) = \frac{A}{p^2}$;
- Parabole $A.t^2.u(t)$: $Cons(p) = \frac{A}{p^3}$

La consigne peut être écrite sous la forme suivante : $Cons(p) = \frac{A}{p^i}$ avec $i = 1,2,3$.

Calcul de l'erreur statique : $E_s = \lim_{t \to +\infty} cons(t) - s(t)$

L'erreur statique d'un système sans perturbation est : $\boxed{E_s = \lim_{p \to 0} \frac{A}{p^{i-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}}$

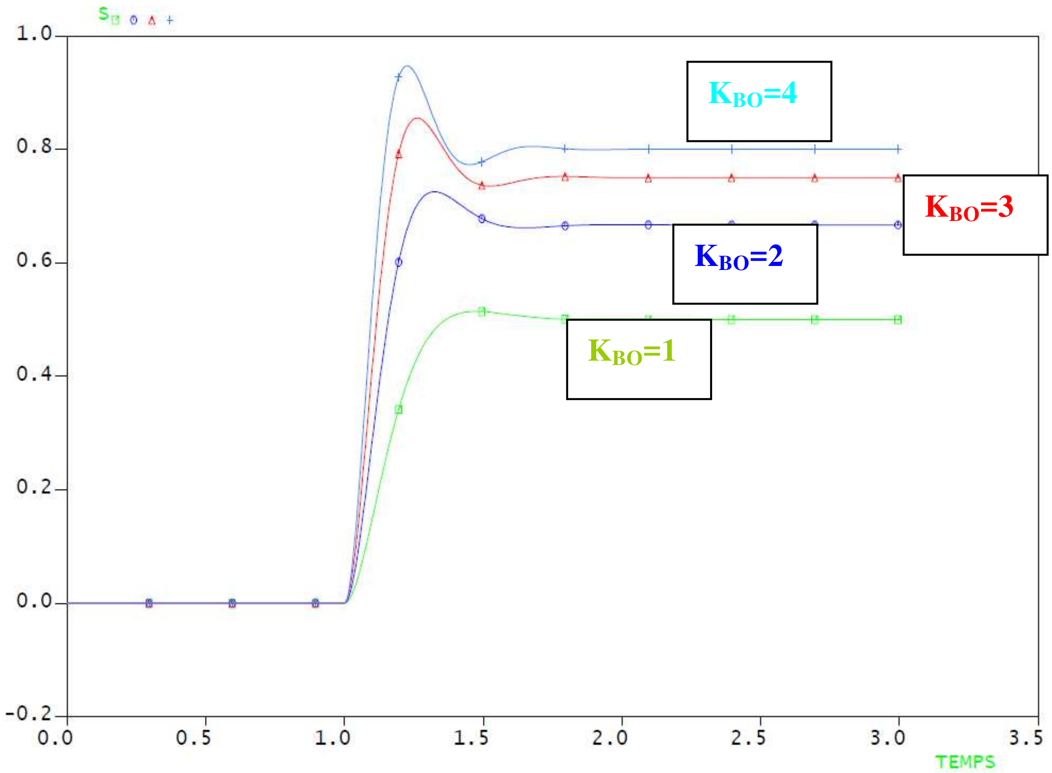
Nous pouvons dresser un tableau indiquant l'erreur statique en fonction de la classe α et du type de la consigne i.

Consigne / Classe α	**Echelon** $\frac{A}{p}$	**Rampe** $\frac{A}{p^2}$	**Parabole** $\frac{A}{p^3}$
α=0			
α=1			
α=2			

Tableau des erreurs statiques :

Consigne / Classe α	Echelon $\frac{A}{p}$	Rampe $\frac{A}{p^2}$	Parabole $\frac{A}{p^3}$
α=0	$\frac{A}{1+K}$	$+\infty$	$+\infty$
α=1	0	$\frac{A}{K}$	$+\infty$
α=2	0	0	$\frac{A}{K}$

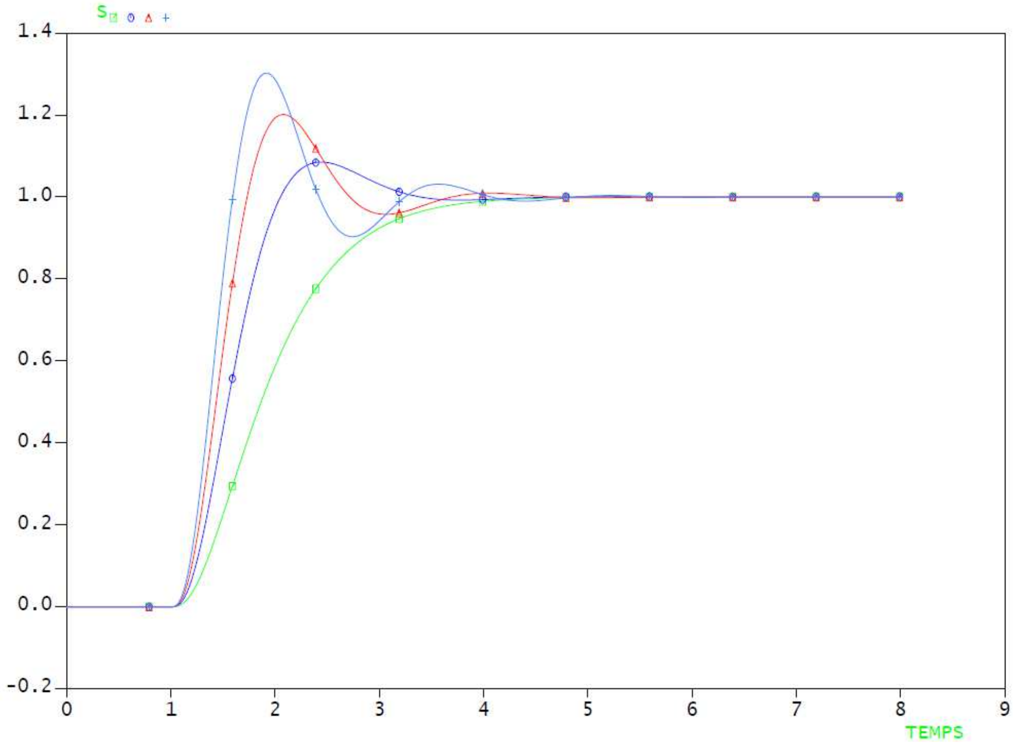
EXEMPLES :



Entrée : échelon de hauteur 1 avec de retard de 1s.

FTBO= $\frac{K}{(1+0.1.p)(1+0.3.p)}$. Pas de perturbation.

K=1 Es= ; K=2 Es= ; K=3 Es= ;K=4 Es=



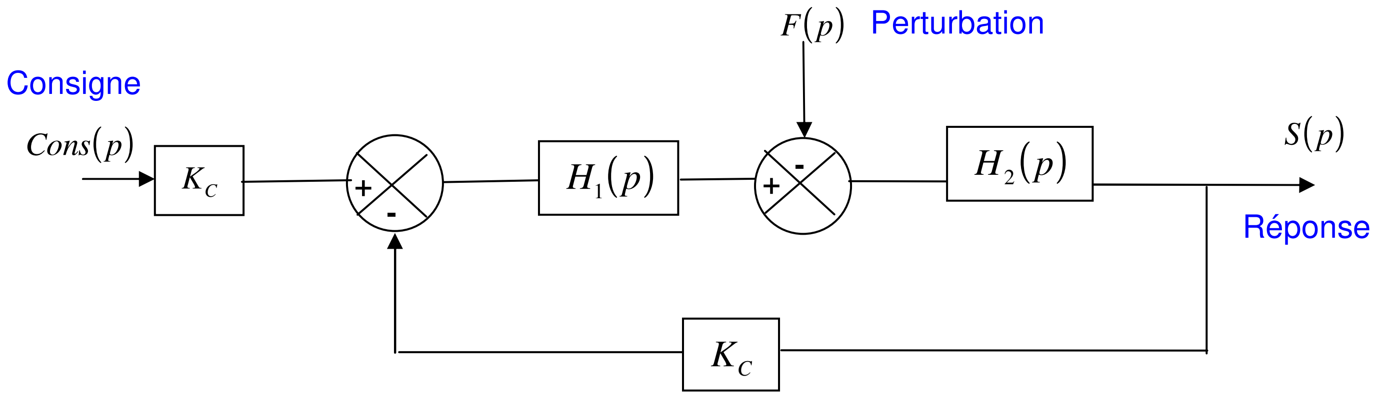
Entrée : échelon de hauteur 1 avec retard de 1s.

FTBO= $\dfrac{K}{p(1+0.1.p)(1+0.3.p)}$. Pas de perturbation.

Pour toute valeur de K , Es=

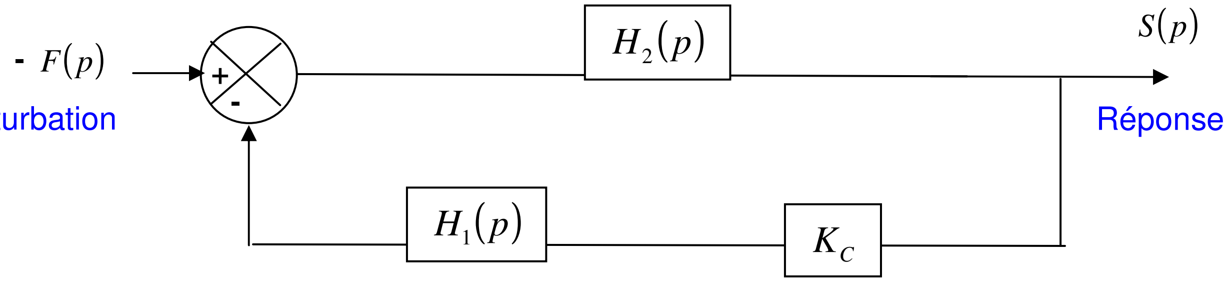
III – EFFET D'UNE PERTURBATION : Robustesse de l'asservissement

Revenons au système asservi subissant une perturbation physique. Le schéma bloc est de nouveau le suivant :



Le schéma bloc peut être considéré avec deux entrées : la consigne et la perturbation. En utilisant le théorème de superposition, nous pouvons calculer la double fonction transfert du système sous la forme:

Le schéma bloc avec $Cons(p)=0$ est le suivant :



Calcul de G(p) :

Calcul de H(p) :

Bilan S(p)=

L'effet de la perturbation sur la réponse en annulant la consigne et en calculant **l'erreur statique dûe uniquement à la perturbation** $F(p)$.

1. **Erreur statique dûe à la perturbation (ou contribution à l'erreur due à la perturbation)**

Par définition : $E_s = \lim_{t \to +\infty} cons(t) - s(t)$.

Calcul :

L'erreur statique dûe à la perturbation est : $\boxed{E_S = \lim_{p \to 0} p.\frac{F(p)}{H_1.K_C}.\frac{K}{p^\alpha + K}}$

2. Cas d'une perturbation constante.

Considérons une perturbation constante de la forme : $\boxed{F(p) = \frac{F_0}{p}}$

L'erreur statique devient : $\boxed{E_S = \lim_{p \to 0} \frac{F_0}{H_1.K_C}.\frac{K}{p^\alpha + K}}$. On suppose $H1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{1 + c_1 p + ... + c_n p^n}{1 + d_1 p + ... + d_m p^m}$

Annulation de l'effet de la perturbation en régime permanent : $\boxed{E_S = 0}$

Si $\alpha = 0$

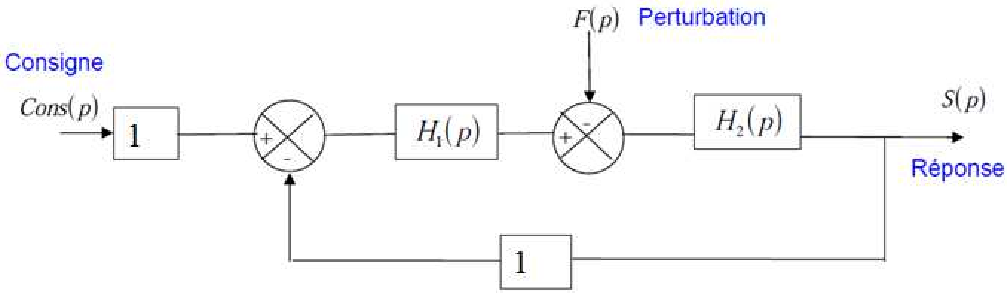
Si $\alpha = 1$ et si $\alpha_1 = 1$ (intégrateur dans H1(p))

Si $\alpha = 1$ et si si $\alpha_1 = 0$ (intégrateur dans H2(p))

Synthèse :

Pour annuler l'effet d'une perturbation constante en régime permanent, il suffit de placer un **intégrateur en amont de la perturbation.**

Cas 1 :



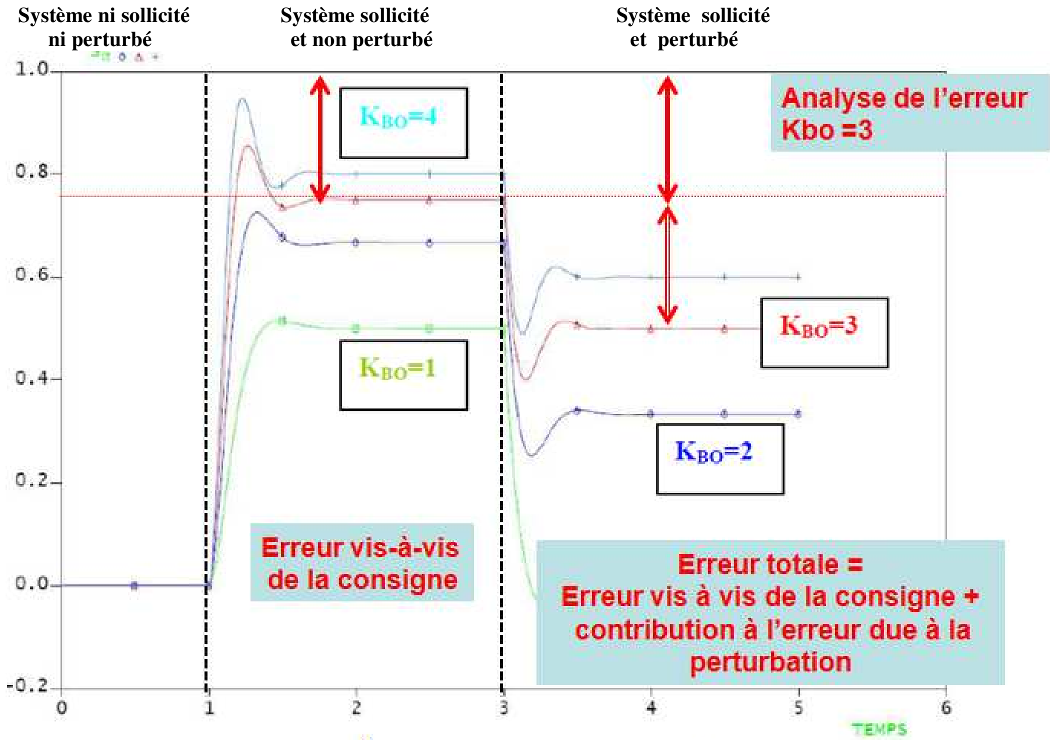
Système perturbé : F échelon de hauteur 1 avec 3 s de retard

$$\boxed{H_1(p)=\frac{K}{1+0.1.p}} \quad \boxed{H_2(p)=\frac{1}{1+0.3.p}}$$

Gain de boucle ouverte : $K_{BO}=K$

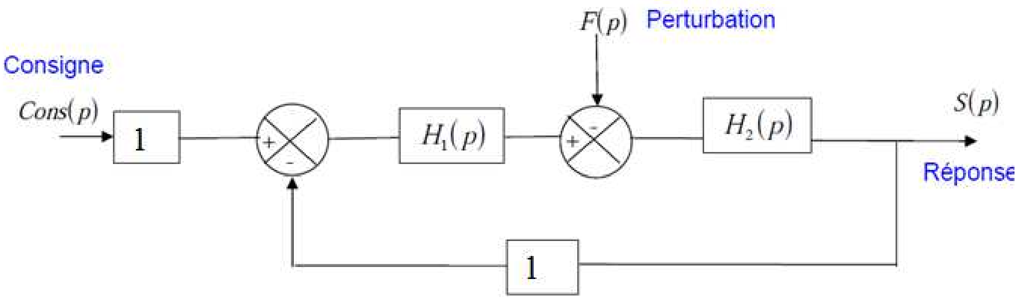
Entrée de type échelon unitaire avec 1s de retard

Classe de la BO: 0



$$E_s=\frac{1}{(1+K)} \qquad E_{totale}=\frac{1}{(1+K)}+\frac{1}{(1+K)}$$

Cas 2 :



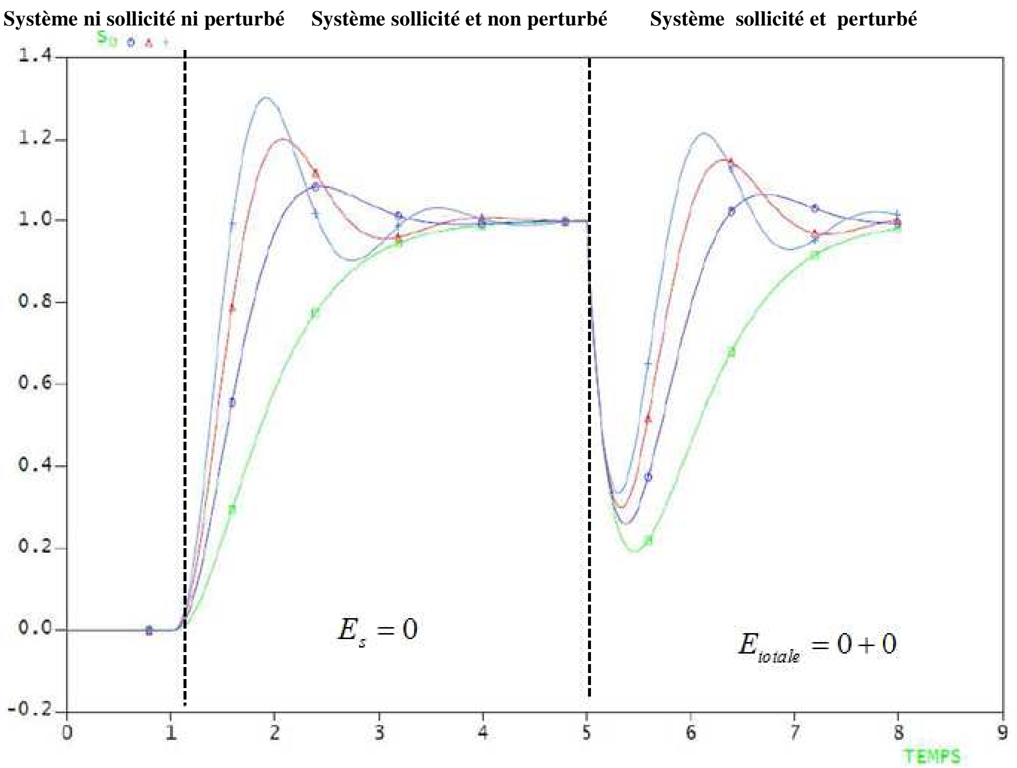
Système perturbé : F échelon de hauteur 1 avec 5 s de retard

$H_1(p) = \dfrac{K}{p(1+0.1.p)}$ $H_2(p) = \dfrac{1}{1+0.3.p}$

Gain de boucle ouverte : K_{BO}=K

Entrée de type échelon unitaire avec 1s de retard

Classe de la BO: 1



Généralisation :

Pour annuler l'effet d'une perturbation de la forme $F(p) = \dfrac{F_0}{p^n}$, il faut placer **n intégrateur en amont de la perturbation.**