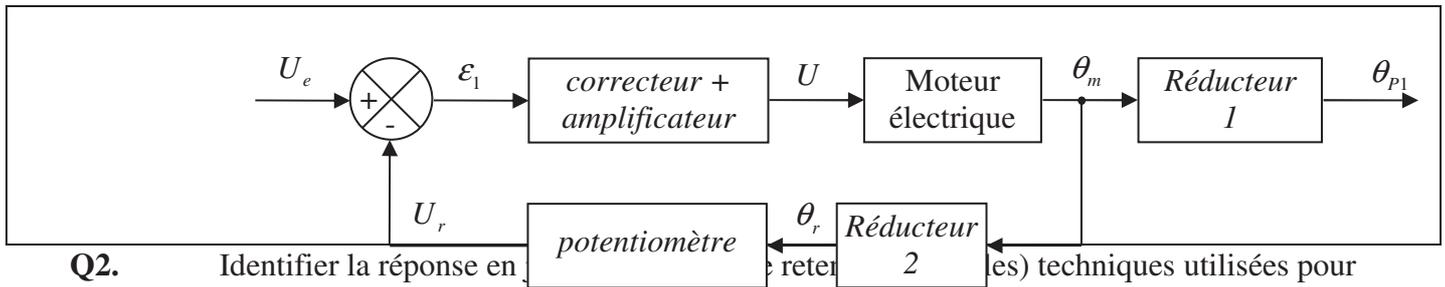


DS1

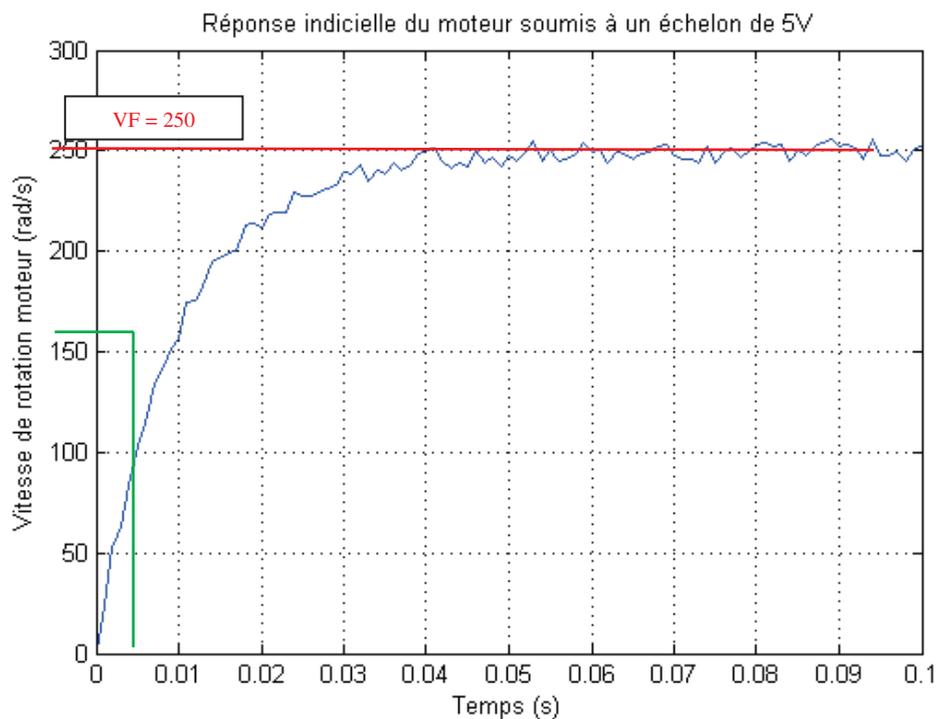
CORRIGE

I : Analyse et Etude de la modélisation et du comportement d'un système de commande d'airbus A340

Q1. Construire le schéma bloc fonctionnel de cet asservissement.



Q2. Identifier la réponse en () techniques utilisées pour déterminer les paramètres.



Ordre du modèle : Ordre 1

Détermination de K : on mesure la valeur finale 250 rad/s = K.U, donc K=50 rad/s/V.

Détermination de T : 63% de VF donne T=0.01s. Tangente à l'origine qui vaut K.U/T, donne T=0,009s.

Justifications :

La réponse présente une tangente à l'origine non nulle et tend vers une valeur finie, il s'agit donc de la réponse d'un système du 1^{er} ordre

Q3. Déterminer la fonction de transfert $M(p) = \frac{\theta_m(p)}{U(p)}$ du moteur électrique et montrer qu'elle

peut se mettre sous la forme d'un intégrateur $\frac{1}{p}$ multiplié par une fonction de transfert d'un 1^{er} ordre

de gain statique K_m et de constante de temps τ_m .

On transforme les 4 équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} U(p) = RI(p) + E(p) \\ E(p) = k_e p \theta_m(p) \\ J_e p^2 \theta_m(p) = C_m(p) \\ C_m(p) = k_a I(p) \end{cases} \Rightarrow U(p) = \left(\frac{RJ_e}{k_a} p^2 + k_e p \right) \theta_m(p) \Rightarrow \frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{1}{p \left(\frac{RJ_e}{k_a} p + k_e \right)} = \frac{1/k_e}{p \left(\frac{RJ_e}{k_a k_e} p + 1 \right)}$$

Q4. Donner les expressions littérales de K_m et τ_m .

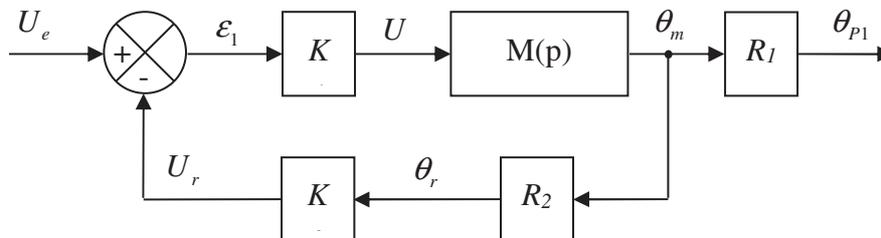
$$K_m = 1/k_e \text{ et } \tau_m = \frac{RJ_e}{k_a k_e}.$$

Q5. Application numérique : calculer K_m et τ_m en précisant les unités.

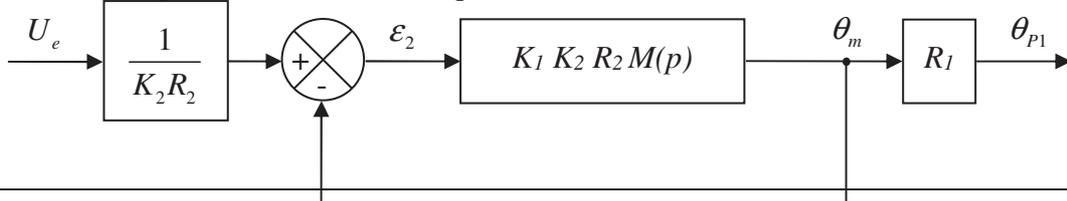
$$K_m = 50 \text{ rad/s/V et } \tau_m = 0,01 \text{ s (même résultats qu'avec l'identification)}$$

Q6. Montrer que le schéma bloc peut se mettre sous la forme :

Schéma initial :



On place les blocs K_2 et R_2 après le sommateur, ce qui nous donne le schéma suivant :



Q7. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p) = \frac{\theta_m}{\varepsilon_2}$, la mettre sous la forme

$$T(p) = \frac{K_{BO}}{p(1+\tau_m p)} \text{ et en déduire l'expression du gain de boucle } K_{BO}.$$

$$T(p) = \frac{\theta_m}{\varepsilon_2} = K_1 K_2 R_2 M(p) \text{ d'où } K_{BO} = K_1 K_2 K_m R_2.$$

Q8. Déterminer la fonction de transfert $F(p) = \frac{\theta_{p1}}{U_e}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre. On notera K_{BF} le gain statique, ζ le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre.

$$F(p) = \frac{\theta_{p1}}{U_e} = \frac{1}{K_2 R_2} \frac{K_{BO}}{p(1+\tau_m p)} R_1 = \frac{R_1}{K_2 R_2} \frac{K_{BO}}{p(1+\tau_m p) + K_{BO}} = \frac{\frac{R_1}{K_2 R_2}}{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p + 1}$$

Q9. Donner l'expression littérale de K_{BF} en fonction de R_1 , R_2 et K_2 , de ζ et ω_0 en fonction de K_{BO} et τ_m .

$$K_{BF} = \frac{R_1}{K_2 R_2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}}, \quad \zeta = \frac{1}{2K_{BO}} \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}} = \frac{1}{2\sqrt{\tau_m K_{BO}}}$$

Q10. Déterminer la valeur du gain de boucle K_{BO} de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement.

$$\text{On doit avoir un amortissement égal à 1 : } \zeta = 1 = \frac{1}{2\sqrt{\tau_m K_{BO}}} \Rightarrow K_{BO} = \frac{1}{4\tau_m} = 25 \text{ s}^{-1}.$$

Q11. Déterminer l'écart de position pour une entrée de type échelon en calculant l'écart statique : $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t)$. Le système est précis à une entrée de type échelon si $\varepsilon_s = 0$, conclure.

$$\varepsilon_2(p) = \frac{1}{K_2 R_2} U_e - \frac{1}{R_1} \theta_{p1} = \frac{1}{K_2 R_2} U_e - \frac{1}{R_1} \frac{\frac{R_1}{K_2 R_2}}{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p + 1} U_e = -\frac{1}{K_2 R_2} \frac{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p}{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p + 1} U_e$$

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{K_2 R_2} \frac{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p}{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p + 1} \frac{1}{p} = 0 \text{ donc le système est précis.}$$

Q12. Déterminer le temps de réponse à 5% à l'aide de la Figure 3.

$$\text{On a } t_r \cdot \omega_0 \approx 5 \Rightarrow t_r = 5 \sqrt{\frac{\tau_m}{K_{BO}}} = 0,1 \text{ s}$$

Q13. Déterminer le nombre de tour maximal N_v que va faire la vis.

$$N_v = 600/10 = 60 \text{ tours}$$

Q14. Déterminer le nombre de tour N_{P1} que va faire l'arbre d'entrée du réducteur 52.

$$N_{P1} = \frac{1}{5} N_v = 12 \text{ tours}$$

Q15. En déduire le nombre de tour N_m que va faire l'arbre du moteur.

$$N_m = 150 N_{P1} = 1800 \text{ tours}$$

Q16. En supposant que l'on utilise le capteur sur toute sa plage (10 tours), déterminer le rapport de réduction R_2 du réducteur reliant la sortie du moteur à l'entrée du potentiomètre.

$N_{\text{moteur}} = 1800 \text{ tours/min}$. On veut que le potentiomètre tourne de 10 tours, il faut donc que $R_2 = 1/180$.

Q17. Déterminer le gain du capteur potentiométrique.

$$K_2 = \frac{12}{5 \times 2\pi} \approx 0,382 \text{ V/rad}$$

Q18. En déduire le gain K_1 du régulateur connaissant la valeur de K_{BO} fixée en Q10/.

$$K_{BO} = 25 = K_1 K_2 R_2 K_m \Rightarrow K_1 = \frac{25}{K_2 R_2 K_m} \approx 235,6$$

Q19. Déterminer l'écart de traînage $\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t)$ à une entrée de type rampe.

$$\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{K_2 R_2} \frac{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p}{\frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p + 1} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{K_2 R_2} \frac{1}{K_{BO}}$$

Q20. En déduire une première inégalité sur K_{BO} permettant de vérifier cette partie du cahier charges.

$$\frac{1}{K_2 R_2} \frac{1}{K_{BO}} < 0,5 \Rightarrow K_{BO} > \frac{2}{K_2 R_2} \approx 942 \text{ s}^{-1}$$

Q21. En reprenant la Q10/, déterminer une seconde inégalité sur K_{BO} permettant d'assurer que la réponse indicielle du système ne présentera pas de dépassement.

$$\zeta > 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\tau_m K_{BO}}} > 1 \Rightarrow K_{BO} < \frac{1}{4\tau_m} = 25 \text{ s}^{-1}$$

II : Etude du comportement d'un agitateur médical**Q 1 – Signification du sommateur situé en amont du bloc de transfert de la chambre**

Prise en compte de la **perturbation** que représente l'énergie calorifique q_p perdue ou reçue par la chambre.

Q 2 – Identification de la F.T.B.O.

La réponse à l'échelon de tension :

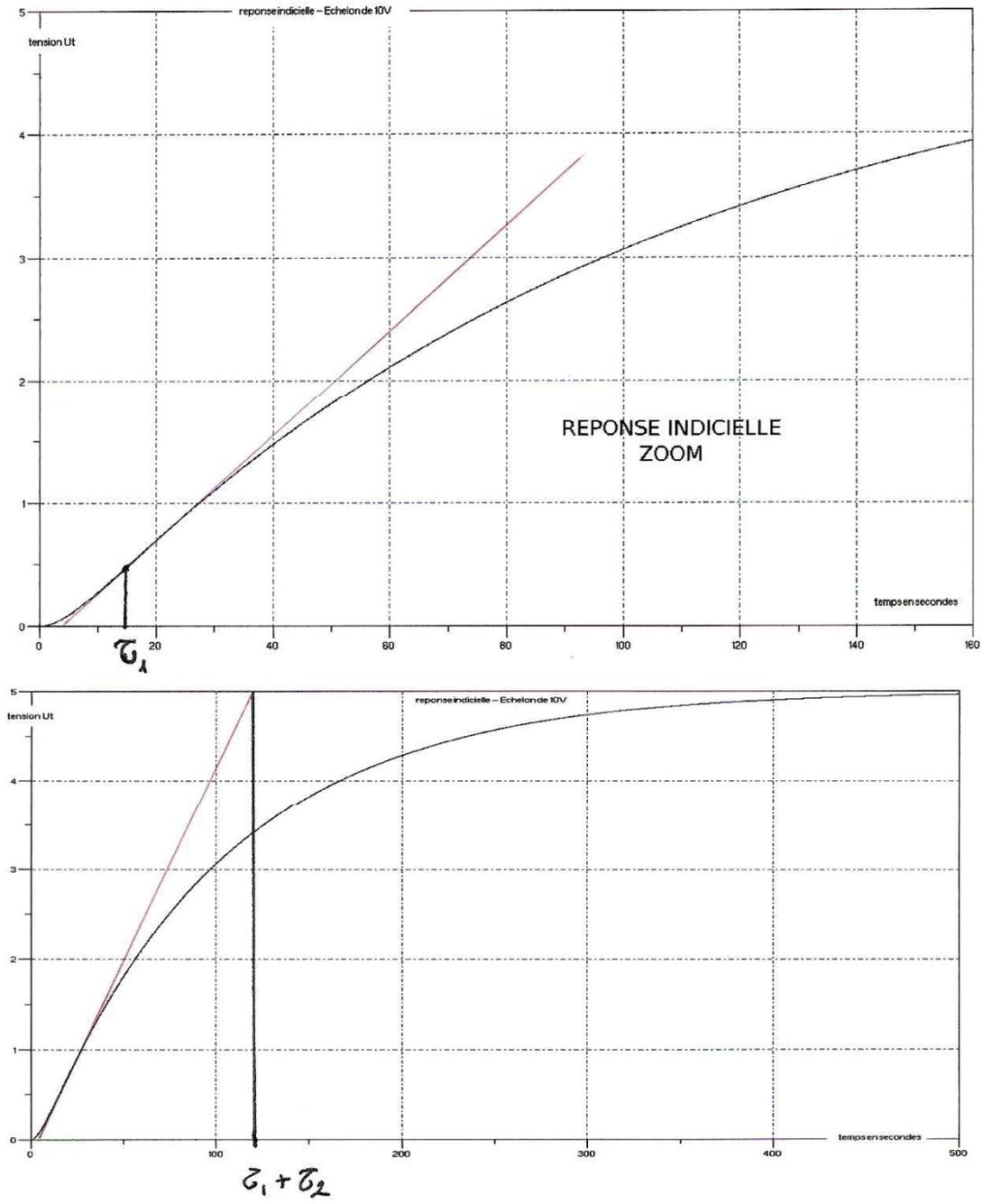
- présente une tangente horizontale à l'origine,
- est apériodique amorti.

Par conséquent la forme proposée, fonction de transfert du **second ordre** avec pôles **réels négatifs** est pertinente.

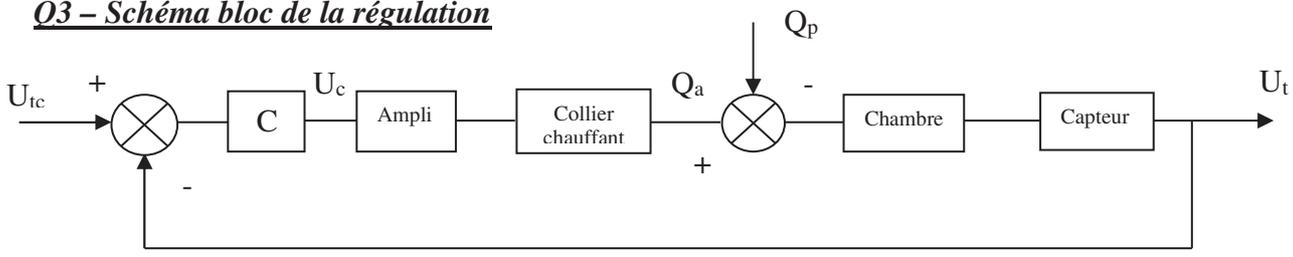
De toute évidence $G = 1/2$

En exploitant la remarque " Si $\tau_1 \ll \tau_2$ on peut approximer τ_1 comme l'intersection..." on relève :

- $\tau_1 \approx 5 \text{ s}$
- $\tau_1 + \tau_2 \approx 120 \text{ s} \Rightarrow \tau_2 \approx 115 \text{ s}$



Q3 – Schéma bloc de la régulation



Q4 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_i(p)}{U_{ic}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_n telle que : $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \neq 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = \underline{218 \text{ s}}$ **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Q5 – Cas général : cf. cours SLCI, chapitre 5, grand I : Précision en l'absence de perturbation

Nombre d'intégrations de $H_{BO}(p)$	Écart de position Entrée échelon de position $m = 0$	Écart de traînage Entrée rampe (échelon de vitesse) $m = 1$	Écart en accélération Entrée échelon d'accélération $m = 2$
$\alpha = 0$	$\frac{A}{1+K}$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
$\alpha = 1$	0	$\frac{A}{K}$	$\rightarrow \infty$
$\alpha = 2$	0	0	$\frac{A}{K}$
$\alpha = 3$	0	0	0

Q6 – Ecart de position – Ecart de traînage

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro)} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

$\underline{\varepsilon_p = 0,66}$ **66 % Incompatible** avec le cahier des charges.

Q7 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$; $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

Qd $\omega \rightarrow 0$ $H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6\text{dB} \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$

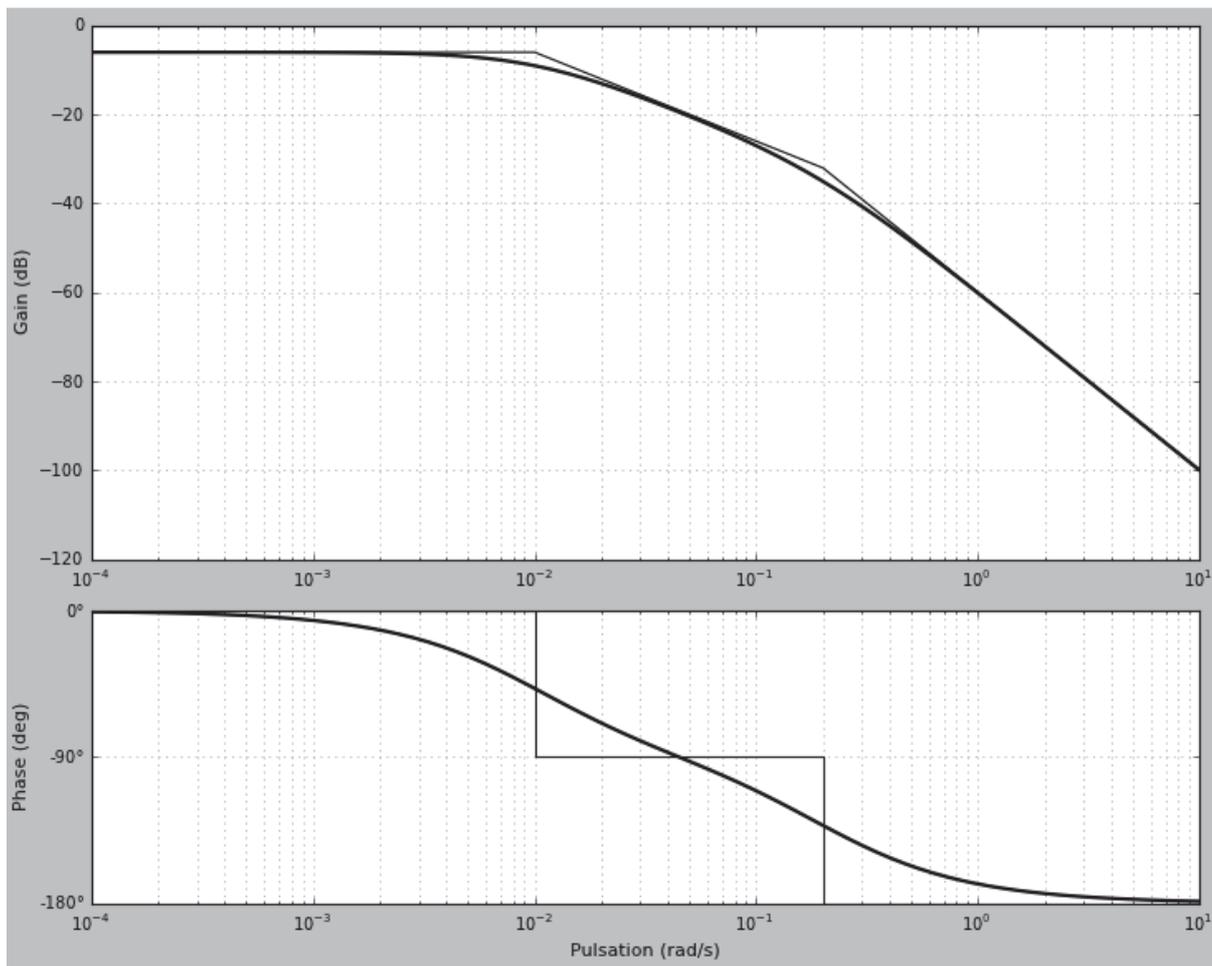
$$G = -6\text{dB} - 10 \cdot \text{Log}(1 + 25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \text{Log}(1 + 10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\text{Arc tan}(5 \cdot \omega) - \text{Arc tan}(100 \cdot \omega)$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
φ (°)	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante



Q8 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

On règle K de telle sorte que $\xi = 1$; la réponse indicielle est alors **apériodique critique**

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot K}{500}}$$

$$\text{Facteur d'amortissement, il est tel que : } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K},$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1 + 0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** : $\xi = 1 \Leftrightarrow K = 9,02$

On choisit **$K=9$** alors **$\xi \approx 1$** la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Q9 – Diagramme de Bode avec correcteur P

Aucun changement sur le diagramme de phase ; la courbe de gain est quant à elle décalée vers le haut de $20 \log(9)$.

Q10 – Éléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = \underline{50 \text{ s}}$ **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro)} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

$\varepsilon_p = 0,55$ 55 % Incompatible avec le cahier des charges.

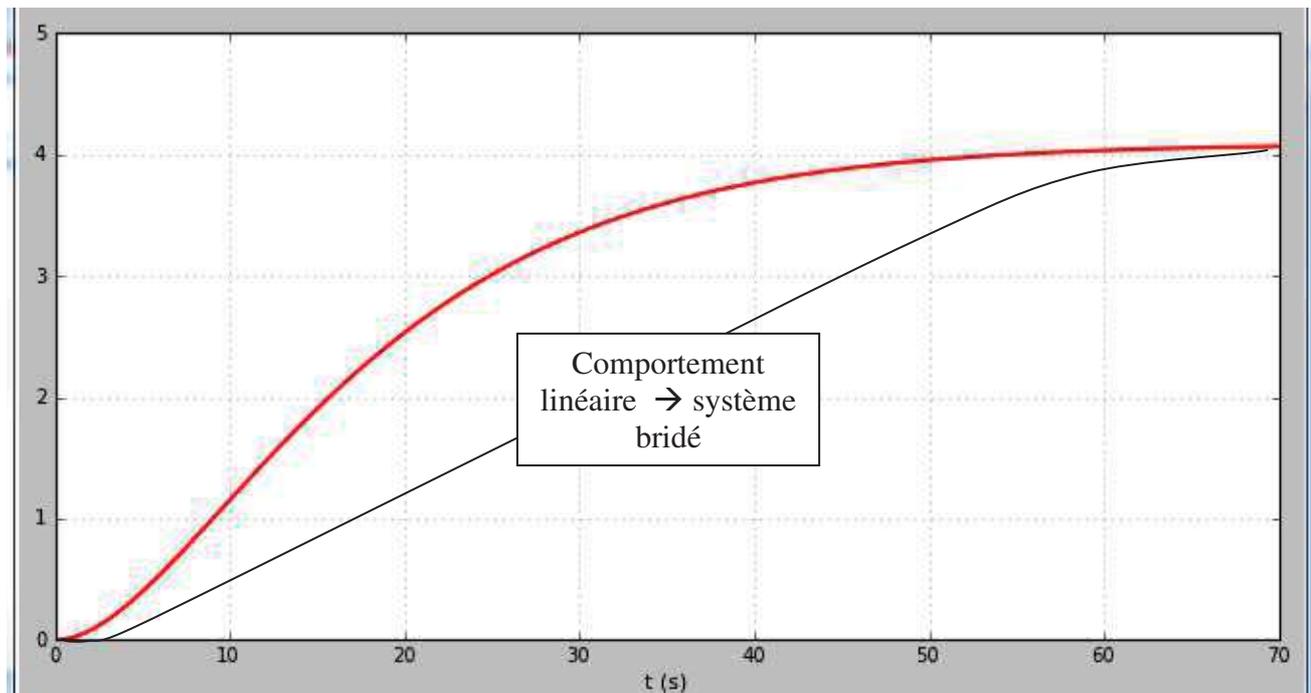
Q11 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U_{tc} est de 5 V

A 17° C correspond $U_c = 0 V$, donc $U_t = 0 V$.

Si $U_{tc} = 5 V \Rightarrow \underline{U_c = 45 V}$. ($U_c = K \cdot \varepsilon$)

Alors $\underline{U_a = 450 V}$ Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

Q 12 – Saturation de l'ampli et risque CDCF



Risque de ralentissement du système et de dépassement du temps de réponse requis.

Q 13– Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

Le réglage du correcteur se fait **par compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps T_i du correcteur égale à **la constante de temps la plus grande** du système à corriger : $T_i = 100$. On réglera le gain K du correcteur afin que **la réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit $\xi = 1$).

$$\text{La F.T.B.O. s'écrit alors : } H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{100 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$\text{La F.T.B.F. s'écrit alors : } H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{100}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$$

$$\text{La pulsation propre (non amortie) vaut alors : } \omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$$

$$\text{Le facteur d'amortissement vaut alors : } \xi = \frac{100}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$$

On choisit $\xi = 1$ la réponse indicielle est apériodique critique. Alors : $K = 10^{-3} \cdot T_i^2$

On a toujours : $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$ puisque $\xi = 1$

Tableau des valeurs de K , ω_n , $t_{5\%}$ en fonction du choix de T_i

T_i	K	ω_n	$t_{5\%}$	Commentaires
<u>100 s</u>	10	0,1 rd/s	<u>50 s</u>	A RETENIR

Q 14 – Diagramme de Bode avec correcteur PI

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Bode :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

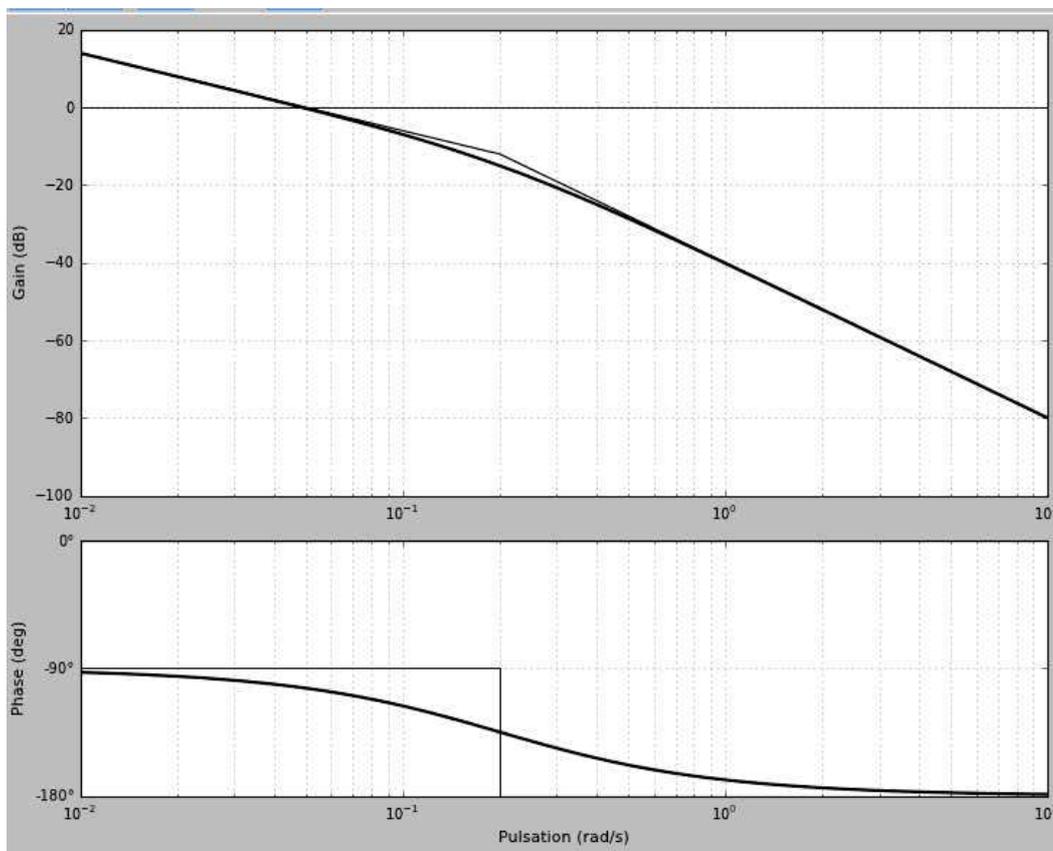
$$\text{Gain : } G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \text{Log} \omega - 10 \cdot \text{Log}(1 + 25 \cdot \omega^2)$$

$$\text{Argument : } \varphi = -90^\circ - \text{Arctan}(5\omega)$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	-7	-15	-40
φ (°)	-93	-117°	-135	-169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O., le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations $\varphi = -90^\circ$ et $\varphi = -180^\circ$.



Q 15 – Nouvel écart de position

Le système est de **classe 1** $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$