DS1 - EXERCICE 1 : ROBOT SPIRIT d'après X-ENS 2005

Q1-Q3 Modif. Schéma

Q4 RSG   RSG $x(t) = R\,\theta(t)$.

Q5-Q6

(1) $M.\ddot{x}(t) = 6.F_R(t) + F_V(t)$, $Mp^2 X(p) = 6 F_R(p) + F_V(p)$

où M est la masse du robot sans les roues, $F_R(t)$ l'action d'une roue sur le robot et $F_V(t)$ l'action du vent,

(2) $M_R.\ddot{x}(t) = -F_R(t) + F_M(t)$, $M_R p^2 X(p) = -F_R(p) + F_M(p)$.

où M_R est la masse d'une roue et $F_M(t)$ l'effort de liaison entre la roue et le robot,

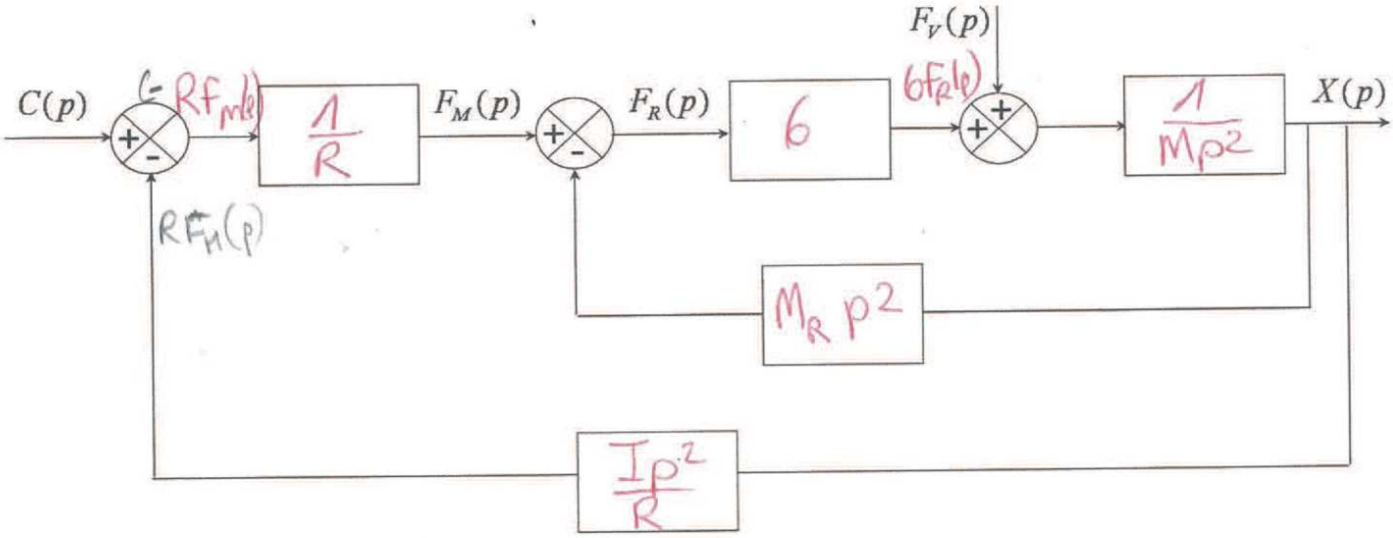
(3) $I.\ddot{\theta}(t) = C(t) - R.F_M(t)$, $I p^2 \theta(p) = C(p) - R F_m(p)$.

où I est l'inertie de la roue et du moteur ramenée sur l'arbre moteur, $\theta(t)$ la rotation de la roue et $C(t)$ le couple moteur. On note de plus R le rayon de la roue.

L'étude de la motorisation dans le cas d'un moteur à courant continu donne les équations suivantes (effet de l'inductance négligé) : $V(p) = E(p) + R I(p)$ $C(p) = \eta K_t I(p)$ $E(p) = K_e \eta p \theta(p)$.

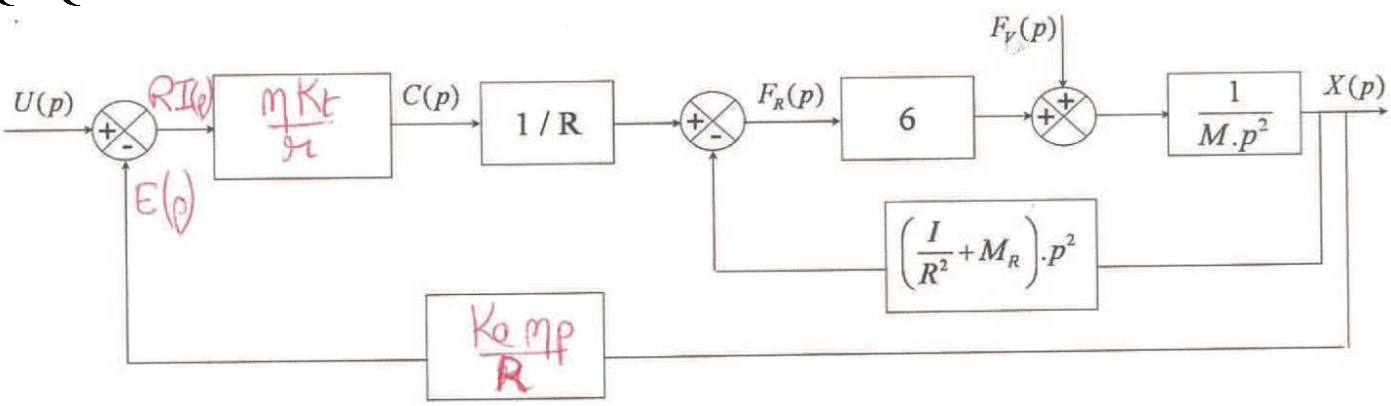
(4) $u(t) = e(t) + r.i(t)$,   (5) $C(t) = \eta.K_t.i(t)$,   (6) $e(t) = K_e.\eta.\dot{\theta}(t)$,

où $u(t)$ est la tension d'alimentation, $e(t)$ la force contre électromotrice, r la résistance aux bornes de l'induit, η le rapport de réduction du réducteur, K_t la constante de couple et K_e la constante de force contre électromotrice.



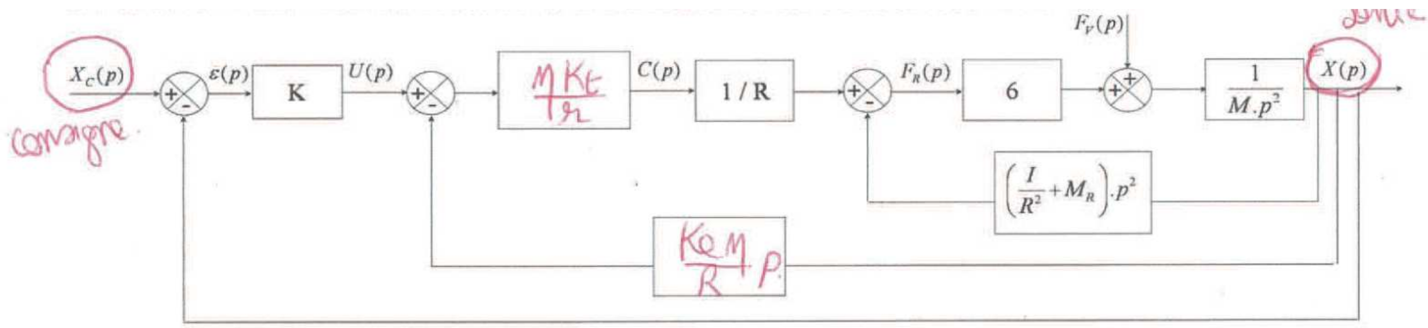
Q7 déplacement vers la droite du premier comparateur (saut du bloc 1/R)

Q8-Q9

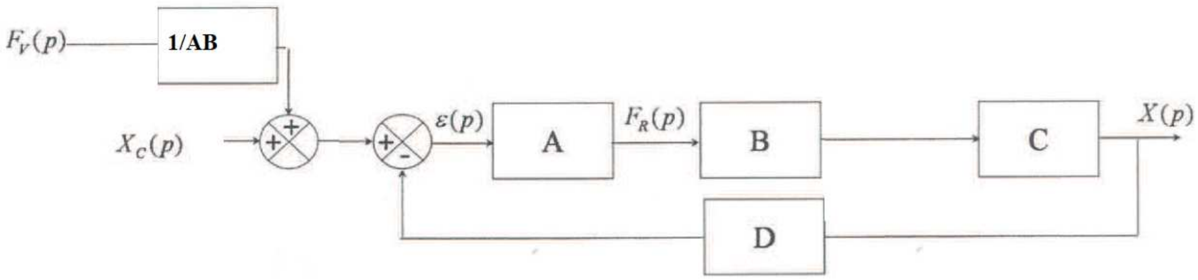


Q 10 non ! boucle de retour sans capteur mais intrinsèque aux équations du système, pas d'entrée et de sortie en rapport

Q11



Q12-Q13



$$X(p)=\frac{ABC}{1+ABCD}\left(X_c(p)+\frac{F_v(p)}{AB}\right)$$

$$A=\frac{\eta.K_t.K}{r.R} \qquad B=6 \qquad C=\frac{1}{M.p^2} \quad \text{et} \quad D=\frac{\left(I+M_R.R^2\right).r.p^2+\eta^2.K_t.K_e.p+\eta.R.K_t.K}{\eta.R.K_t.K}$$

$$X(p)=\frac{ABC}{1+ABCD}\frac{Xc_O}{p}\ ;\ x(\infty)=xc_O$$

Q14 $e_s=0$ par théorème de la valeur finale ou bien en justifiant par le nombre d'intégrateurs

Q15 PRECIS

Q16 elle est non nulle

$$X(p)=\frac{ABC}{1+ABCD}\frac{F_{v0}}{ABp}\ ,\ \varepsilon(p)=-\frac{C}{1+ABCD}\frac{F_{v0}}{p}\ ;\ \varepsilon(0)=-\frac{rRF_{v0}}{6\eta K_T K}$$

Q17 ne respecte pas le CDCF sauf si K très grand….

Q18-20
Ordre 2 factorisable

20) $H(p) = \dfrac{1}{1+30p+0{,}3p^2} \simeq \dfrac{1}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)} \Rightarrow \begin{cases} T_1+T_2 = 30 \\ T_1 \cdot T_2 = 0{,}3 \end{cases}$

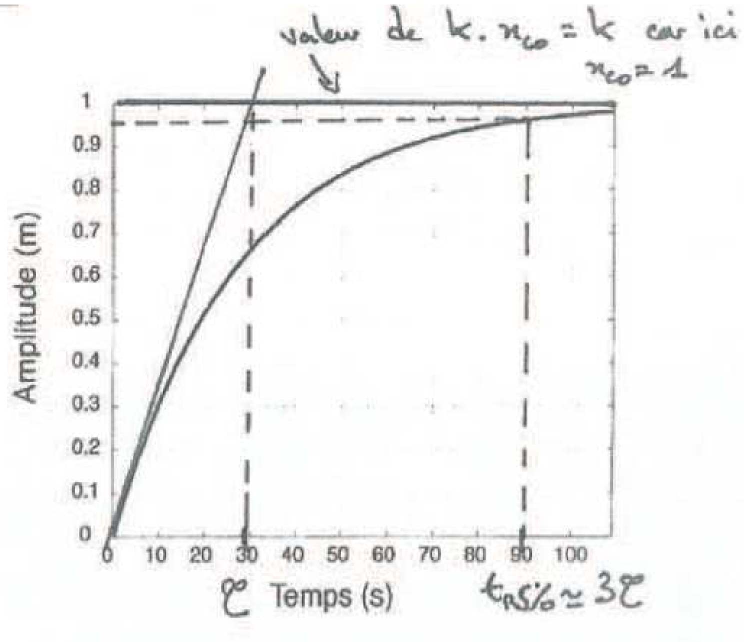
avec $T_1 \gg T_2$

Donc $T_1 = 30$ et $T_2 = 10^{-2}$. car $T_1 + T_2 \sim T_1$

Q21

21) D'après la courbe du Document réponse, Hexp est d'ordre 1, elle correspond à la réponse classique d'un système d'ordre 1. $\left\}\begin{array}{l}\text{tgt à l'origine non nulle} \\ \text{pas de dépassement}\end{array}\right.$

Q21-22 : allure de la réponse expérimentale à un échelon de position d'amplitude 1.



Q22

cf DR 1

$H_{exp}(p) = \dfrac{k}{1+\tau p}$ avec $k = 1$ ← obtenu en considérant $x(\infty)$. (sans unité)

et $\tau \sim 30$ s ← obtenu par t_r 5% ou tgt à l'origine

Q23

$I_{RSi_0} = 30\ A$

Q24

Finalement : $H_{exp}(p) = \dfrac{1}{1+30p}$ et $H(p) = \dfrac{1}{(1+30p)(1+10^{-2}p)}$

En négligeant $10^{-2}p$ devant 1, le modèle établi $H(p)$ est équivalent au modèle $H_{exp}(p)$.

Q25

Cela revient à négliger la constante de temps T_2 ($\sim 0{,}01\,s$) reliée au comportement du moteur électrique.
En effet les temps de réponse électrique sont négligeables devant ceux de la mécanique dans cette application.

EXERCICE 2 : Machine de rééducation SYS-REEDUC d'après CCINP PSI 2013

Q0 $\boxed{\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_3}}$

Q1 $\boxed{K_2 = \dfrac{k_t}{R}}$ $\boxed{H_3(p) = \dfrac{1}{(m+M).r^2.\rho_1^2.p}}$ $\boxed{H_4(p) = \dfrac{1}{p}}$ $\boxed{K_5 = \rho_1 = 0{,}1}$ $\boxed{K_6 = r = 0{,}0461\ (m)}$

$\boxed{K_7 = k_e}$ $\boxed{K_8(p) = \dfrac{2000}{2\pi}}$ $\boxed{K_9 = r.\rho_1}$

Q2

$$\varepsilon(p) = K_1.X_c(p) - K_8.\theta_m(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) = K_1 X_c(p) - \frac{K_8}{K_5.K_6}.X(p)$$

Pour une question de cohérence, si on souhaite que les deux grandeurs soient comparables : $\boxed{K_1 = \dfrac{K_8}{K_5.K_6} = \dfrac{1000}{\pi.r.\rho_1} \approx 69047{,}7 \text{ incréments /mètre}}$

Q3

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \dfrac{K_8}{k_e} \\ B = \dfrac{R.(m+M).r^2.\rho_1^2}{k_e.k_t} \end{array}}$$ et $$\boxed{D = \frac{r^2.\rho_1^2.R}{K_8.k_t}}$$

Q4 $\varepsilon_X = X_c - X$ et en BF : $(\varepsilon_X.C(p) - D.F_p).\dfrac{A}{p.(1+B.p)} = X$

$$\varepsilon_X = X_c - (\varepsilon_X.C(p) - D.F_p).\frac{A}{p.(1+B.p)} \Leftrightarrow p.(1+B.p).\varepsilon_X = p.(1+B.p).X_c - \varepsilon_X.A.C(p) + D.A.F_p \Leftrightarrow$$

D'où :

$$(p.(1+B.p) + A.C(p)).\varepsilon_X = p.(1+B.p).X_c + D.A.F_p$$

$$\varepsilon_X = \frac{p.(1+B.p)}{p.(1+B.p) + A.C(p)}.X_c + \frac{D.A}{p.(1+B.p) + A.C(p)}.F_p$$

Avec C(p) = K_c, il vient : $\boxed{\varepsilon_X = \dfrac{p.(1+B.p)}{p.(1+B.p) + A.K_c}.X_c + \dfrac{D.A}{p.(1+B.p) + A.K_c}.F_p}$

Q5 En supposant un échelon de consigne et d'effort :

$$\varepsilon_X = \frac{X_0}{p}.\left(\frac{p.(1+B.p)}{p.(1+B.p) + A.K_c}\right) + \frac{F_0}{p}.\left(\frac{D.A}{p.(1+B.p) + A.K_c}\right)$$

Avec le théorème de la valeur finale : $\boxed{\lim_{t\to\infty} \varepsilon_X(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon_X(p) = F_0.\left(\dfrac{D}{K_c}\right) = \dfrac{6.F_0}{K_c}}$

Le cahier des charges n'est pas respecté puisque l'écart statique n'est pas nul.

Q6 $C(p) = K_i\left(1 + \dfrac{1}{T_i.p}\right) = K_i.\left(\dfrac{1+T_i.p}{T_i p}\right)$

$$\varepsilon_X = \frac{p.(B.p+1)}{A.K_i\left(\dfrac{1+T_i.p}{T_i.p}\right) + p.(B.p+1)}.X_c + \frac{A.D}{A.K_i\left(\dfrac{1+T_i.p}{T_i.p}\right) + p.(B.p+1)}.F_p$$

Q7 $\varepsilon_X(p) = \dfrac{p.(B.p+1)}{A.K_i\left(\dfrac{1+T_i.p}{T_i.p}\right)+p.(B.p+1)}.\dfrac{X_0}{p} + \dfrac{A.D}{A.K_i\left(\dfrac{1+T_i.p}{T_i.p}\right)+p.(B.p+1)}.\dfrac{F_0}{p}$

Avec le théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_X(t) = \lim\limits_{p\to 0} p.\varepsilon_X(p) = 0$

Le cahier des charges est respecté.

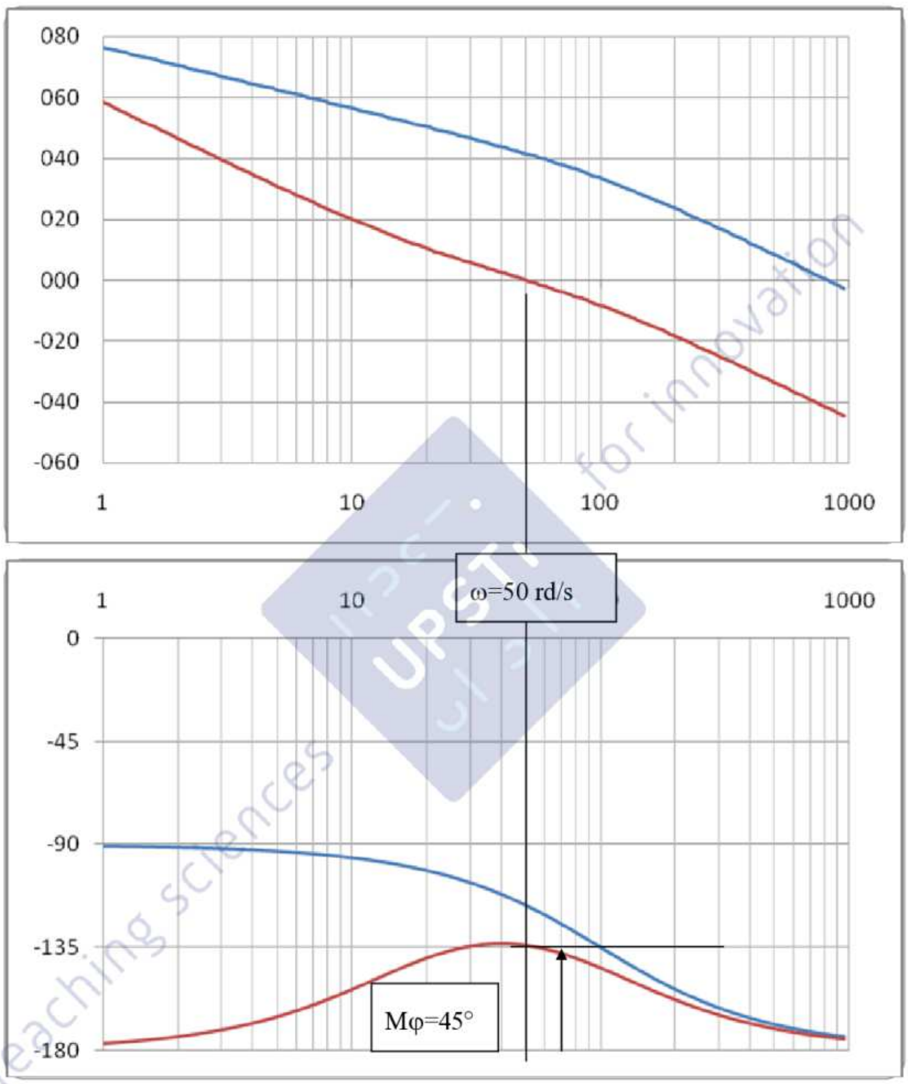
Q8 $FTBO(p) = \dfrac{A}{p.(B.p+1)}.K_i.\dfrac{1+T_i.p}{T_i.p} = \dfrac{6700}{p.(0{,}01.p+1)}.K_i.\dfrac{1+T_i.p}{T_i.p}$

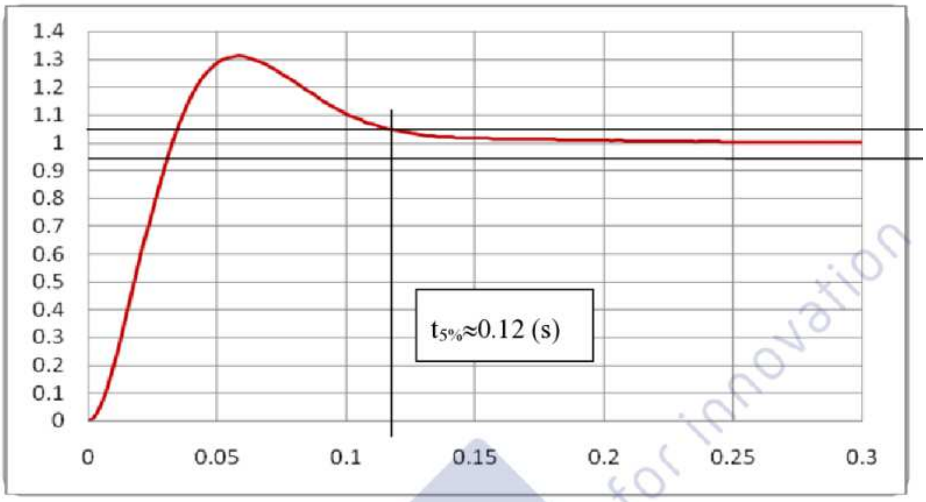
Q9 On souhaite une phase à -135° à la pulsation 50 rd/s.
Soit $-180 - \arctan(0{,}01.\omega) + \arctan(T_i.\omega) = -135$ pour ω = 50 rd/s
donc $\arctan(T_i.50) = 73{,}6 \rightarrow \boxed{T_i = 0{,}068\ (s)}$

Q10 Le gain à 50 rad/s doit être unitaire : $\left| \dfrac{K_i.6700}{0{,}068}.\dfrac{\sqrt{1+0{,}068^2.50^2}}{50^2.\sqrt{1+0{,}01^2.50^2}} \right| = 1$

$\rightarrow \boxed{Ki = 0{,}008}$

Q11 Il semble que le réglage soit correct puisque l'on retrouve la courbe donnée en la traçant (BO non corrigée en bleu et BO corrigée en rouge) :



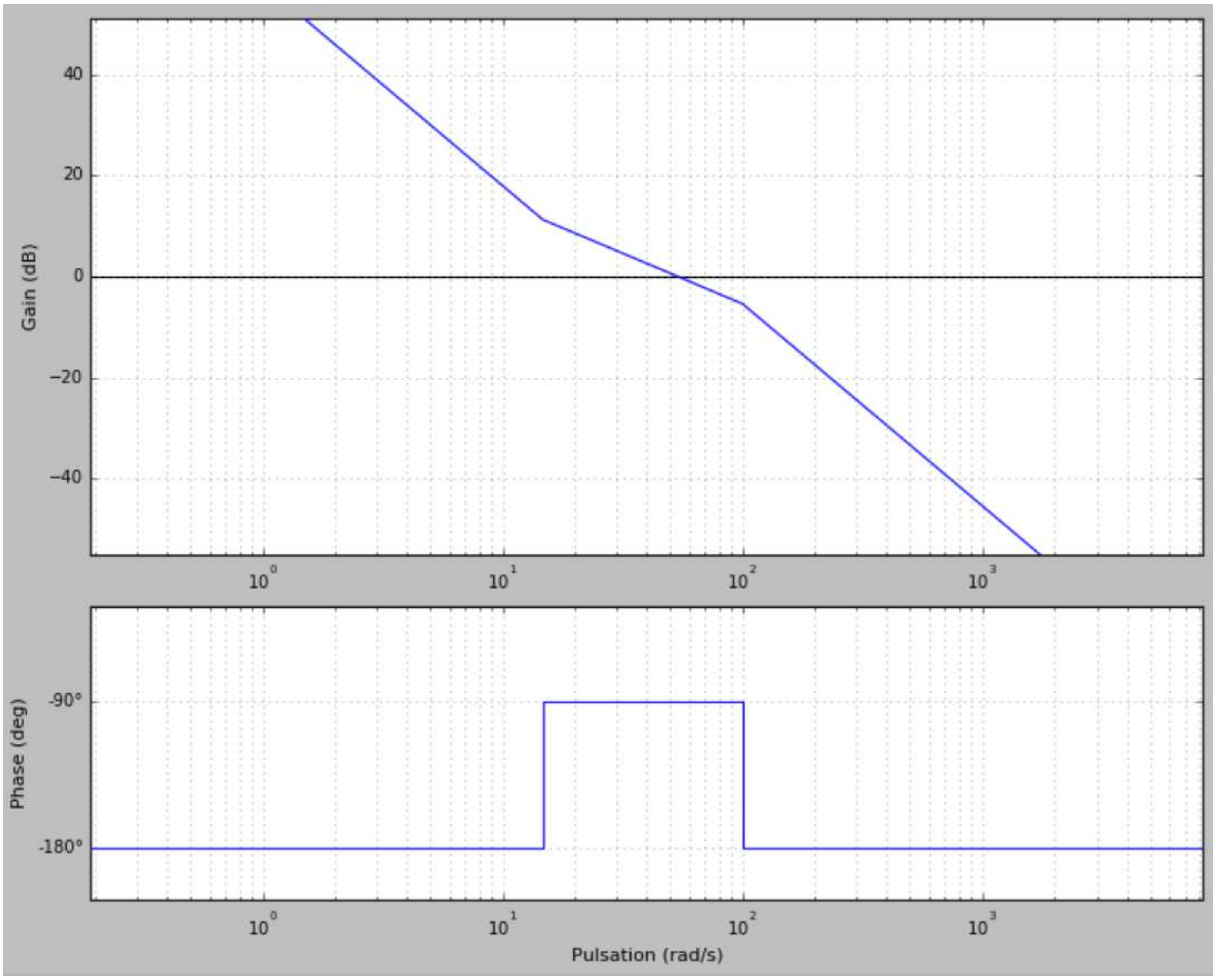


La marge de phase est bien de 45° à 50 rd/s. La marge de gain est infinie (> à 7 dB) puisque le phase ne descend pas au dessous de -180°.

L'erreur statique est nulle et nous avons bien un temps de réponse 0.12 s < 0.2 s

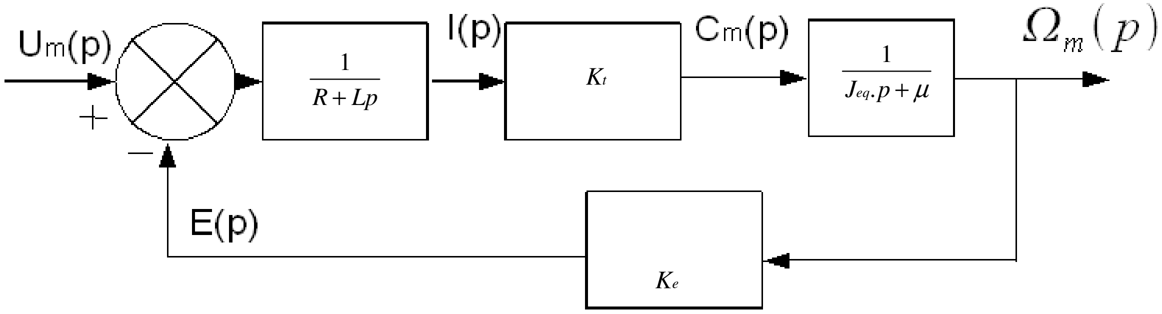
Le cahier des charges est donc respecté.

Q12 BODE ASYMPTOTIQUE



EXERCICE 3 : SYSTEME DE DEPOSE DE PATE A CHOUX D'APRES CNC GDE ECOLE ING. MAROC 2004

Q1-Á partir de ces 4 équations, remplir le schéma bloc du document en fin de sujet. S'agit-il d'un système asservi? Justifier la réponse.



Il ne s'agit pas d'un système asservi puisque, bien que bouclé, le système ne comporte pas d'entrée et de sortie de même nature et qu'aucun capteur ne vient mesurer la valeur de la sortie.

Q2-Calculer la fonction de transfert du moteur: $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = G(p)$

$$G(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_t.\frac{1}{R+Lp}.\frac{1}{J_{eq}.p}}{1+K_e.K_t.\frac{1}{(R+Lp)}.\frac{1}{(J_{eq}.p+\mu)}} = \frac{K_t}{(R+Lp)(\mu+J_{eq}.p)+K_e.K_t}$$

Q3-Mettre G(p) sous la forme canonique d'un système du second ordre de gain statique noté K_s, de coefficient d'amortissement noté ξ et de pulsation propre notée ω_0 :

$$G(p) = \frac{K_s}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

$$G(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_t}{(R+Lp).(J_{eq}.p+\mu)+K_e.K_t} = \frac{\frac{K}{(\mu R+K^2)}}{1+\frac{(\mu L+R.J_{eq})}{(\mu R+K^2)}p+\frac{L.J_{eq}}{(\mu R+K^2)}p^2}$$

Déterminer l'expression de ses paramètres caractéristiques en fonction des constantes du modèle.

$$K_s = \frac{K}{(\mu R+K^2)}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{L.J_{eq}}{(\mu R+K^2)} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu R+K^2}{L.J_{eq}}}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{(\mu L+R.J_{eq})}{(\mu R+K^2)} \Leftrightarrow \xi = \frac{\sqrt{\frac{\mu R+K^2}{L.J_{eq}}}}{2}\frac{(\mu L+R.J_{eq})}{(\mu R+K^2)} \Leftrightarrow \xi = \frac{\mu L+R.J_{eq}}{2\sqrt{L.J_{eq}(\mu R+K^2)}}$$

Q4-Effectuer les applications numériques. Á quel type de régime a t-on affaire?

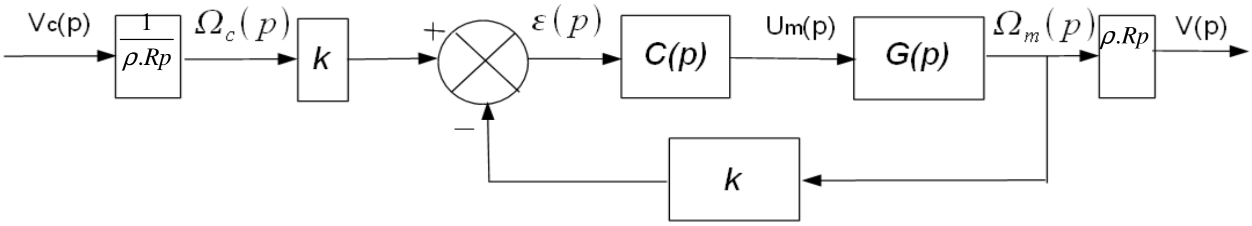
$$K_s = \frac{0,5}{\left(0,02.0,25+0,5^2\right)} \approx 2\ rad/s/V$$

$\omega_0 \approx 60\ rad/s$

$\xi \approx 0,4 \prec 1$

régime pseudopériodique !

Q5-Donner l'expression de l'erreur en régime statique $e_v = v_c(\infty) - v(\infty)$ *résultant d'une consigne de vitesse chariot en échelon d'amplitude constante Vc0. On prendra soin de détailler la totalité du raisonnement.*



$$e_v = v_c(\infty) - v(\infty) = \lim_{p\to 0} p\left(\frac{v_{c0}}{p} - \frac{V}{V_c}.\frac{v_{c0}}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(1-\frac{V}{V_c}\right)v_{c0} = \lim_{p\to 0}\left(1 - \frac{k\dfrac{K_s}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}}{1+k\dfrac{K_s}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}}\right)v_{c0}$$

$$\Leftrightarrow e_v = \left(1 - \frac{kK_s}{1+kK_s}\right)v_{c0}$$

Q6-Effectuer l'application numérique et conclure quant au respect du cahier des charges. Le gâteau réalisé avec ce type de correcteur sera alors de quelle nature? De quelle nature doit donc être le correcteur à insérer dans l'asservissement? Justifier la réponse.

$$e_v = \left(1-\frac{2}{1+2}\right)v_{c0} \Leftrightarrow e_v = 0,33.v_{c0}$$

Le chou va ressembler à un éclair !

Il faut, pour annuler l'erreur, placer un correcteur à action intégrale...

Q7-En déduire la fonction de transfert C(p) de ce nouveau correcteur.

$$u_m(t) = K_c.\varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau}.\int \varepsilon(t)dt \rightarrow U_m(p) = K_c.\varepsilon(p) + \frac{K_c}{\tau}.\frac{\varepsilon(p)}{p} \Leftrightarrow \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_c}{p}\left(p+\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\Leftrightarrow C(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = K_c\frac{\left(p+\dfrac{1}{\tau}\right)}{p}$$

Q8-En déduire la valeur de Kc assurant la marge de phase de 45°.

N'ayant au voisinage des pulsations qui nous intéressent qu'un effet proportionnel, le correcteur utilisé n'introduit pas de déphasage. Pour obtenir une marge de phase de 45°, le gain Kc doit exactement compenser celui de la fonction de transfert G lorsque celle-ci présente une phase de -135°.

On cherche donc une pulsation de coupure ω_c assurant $M\varphi = 45°$: graphiquement on trouve $\omega_c \approx 85\ rads$.

On retrouve ce résultat analytiquement :

$$M\varphi = 45° \Leftrightarrow \varphi = -135° \Leftrightarrow \tan(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\xi\dfrac{\omega_c}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 - 2\xi\frac{\omega_c}{\omega_0} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} = \xi \pm \sqrt{\xi^2+1}$$

AN : $\omega_c = \left(0,37 \pm \sqrt{0,37^2+1}\right).62 \Leftrightarrow \omega_c \approx 85\ rads$

Valeur du gain apporté à la pulsation ω_c : on relève un gain de l'ordre de 3dB à 4dB. On retrouve cette valeur analytiquement :

$$G = 20\log(k.K_s) - 20\log\left[\left(1-\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right]$$

AN : $G = 20\log(2) - 20\log\left[\left(1-(1,37)^2\right)^2 + (2.0,37.1,37)^2\right] \approx 3\ dB$

Le correcteur devra donc apporter $20\log(K_c) = -3\ dB \Leftrightarrow K_c = 10^{\frac{-3}{20}} = 0,7$

Q9-La valeur de Kc ayant été fixée à la question précédente, déterminer une valeur de τ permettant de conserver une marge de phase d'environ 40°.

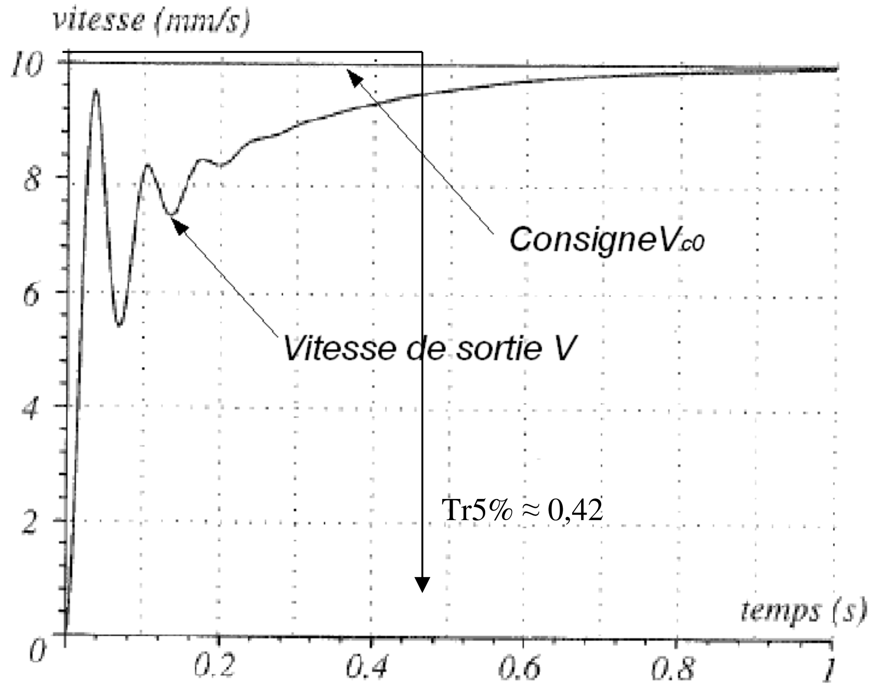
Il faut que le correcteur apporte une phase égale à -5° environ.

$$Arg\left(C(j\omega_c)\right) = -5° \Leftrightarrow -Arg\left(j\omega_c\right) + Arg\left(j\omega_c + \frac{1}{\tau}\right) = -5 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\omega_c}{\frac{1}{\tau}}\right) = 85° \Leftrightarrow \tau = \frac{\tan(85°)}{\omega_c}$$

AN : $\tau = \frac{\tan(85°)}{85}$ =0,13 s

On peut retrouver cet ordre de grandeur sans calcul en considérant qu'à une décade de la pulsation $\frac{1}{\tau}$, la phase vaut environ -5° donc $\frac{1}{10\tau} = 85$ et $\tau \approx 0.117s$

Q10-Á partir du tracé du document réponse, définir le temps de réponse à 5% et la précision de cet asservissement. On précisera le raisonnement mis en place.



erreur nulle en fin de mesure (1s) : Bonne précision
Tr 5% = 0,42 s < 0,45 s

Q11-Conclure quant au respect du cahier des charges.
C'est OK !