

# **REVISIONS DE PCSI-MPSI**

## **CINEMATIQUE**

## **STATIQUE**

## **FICHE 1 - CALCUL VECTORIEL : RAPPELS**

### **Produit scalaire**

#### **1) Définition**

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre algébrique**, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et vaut  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

#### **2) Propriétés**

Commutativité :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributivité avec l'addition :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$  alors trois cas de figure peuvent se présenter :  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{u} \perp \vec{v} \end{array} \right.$

Dérivation  $\frac{d \vec{u} \cdot \vec{v}}{dt} = \vec{u} \cdot \left( \frac{d \vec{v}}{dt} \right)_b + \left( \frac{d \vec{u}}{dt} \right)_b \cdot \vec{v}$  (la notation indicée b sera vue lors du cours sur la dérivation vectorielle).

(nota : on peut rapprocher cette notation de la dérivation d'un produit :  $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u} \cdot \vec{v}' + \vec{u}' \cdot \vec{v}$ )

### **Produit vectoriel**

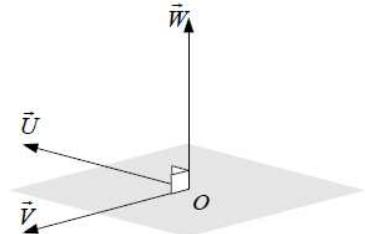
#### **1) Définition**

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un **vecteur**, noté  $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{W}$ .

Direction de  $\vec{W}$  : orthogonale à celles de  $\vec{U}$  et de  $\vec{V}$  (donc orthogonale au plan généré par  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ )

Sens de  $\vec{W}$  : tel que la base  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$  soit une base directe

Norme de  $\vec{W}$  :  $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \left| (\|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})) \right|$



#### **2) Propriétés**

Anticommutativité :  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

Distributivité avec l'addition :  $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$

Si  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U} = 0$  alors trois cas de figure peuvent se présenter :  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{U} = \vec{0} \\ \vec{V} = \vec{0} \\ \vec{U} \parallel \vec{V} \end{array} \right.$

Si une base b ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) est orthonormée directe :  $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$ ,  $\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$  et  $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$ .

## Produit mixte

### 1) Définition

Le produit mixte de trois vecteurs  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  pris dans cet ordre est le produit vectoriel des deux premiers scalairement par le troisième. Il est noté :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$

### 2) Propriétés importantes

- Le signe du produit mixte ne change pas si on fait une permutation circulaire des vecteurs  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ . Il change si la permutation n'est pas circulaire. Donc :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = -(\vec{V}_3, \vec{V}_2, \vec{V}_1) = -(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_3)$$

## APPLICATION au calcul

Soient 3 repères  $R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  définis de la façon suivante :

- $R_2$  est obtenu par une rotation de  $R_1$  d'angle  $\theta$  et d'axe  $(O, \vec{y}_1)$  ;
- $R_3$  est obtenu par une rotation de  $R_2$  d'angle  $\varphi$  et d'axe  $(O, \vec{z}_2)$ .

**1.** Représenter les figures planes correspondant aux 2 changements de base.

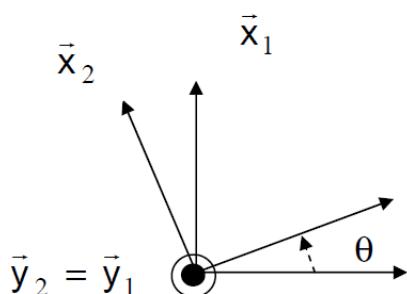


FIGURE 1

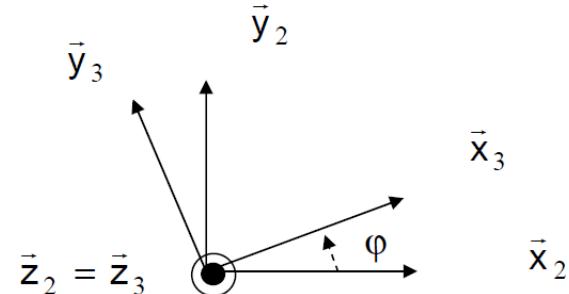


FIGURE 2

**2.** Déterminer les composantes des vecteurs unitaires  $\vec{x}_3$  et  $\vec{y}_3$  dans la base liée à  $R_1$ .

**3.** Calculer :  $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2$ ,  $\vec{y}_3 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_1$ ,  $\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2$

**4.** On donne les vecteurs  $\vec{V}_1 = a\vec{x}_1 + b\vec{z}_1$  et  $\vec{V}_2 = a\vec{x}_3$ ; calculer la projection de  $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  sur  $\vec{x}_1$ .

## FICHE 2 - FERMETURE GEOMETRIQUE : METHODES

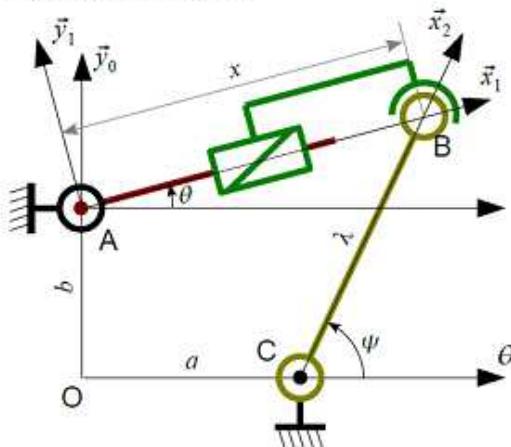
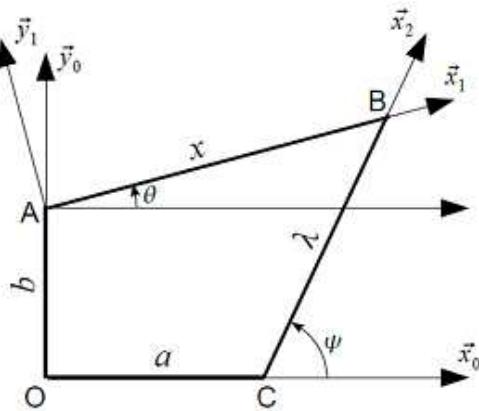
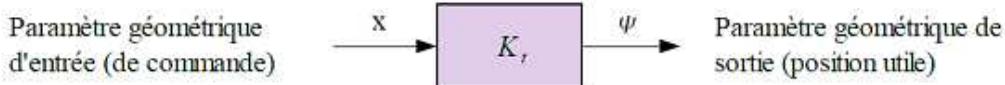
**Exemple : Maxpid**


Schéma cinématique plan paramétré



Squelette géométrique du schéma



La fonction de transfert de cette chaîne s'obtient par la « Loi Entrée-Sortie » géométrique, obtenue par la mise en équation géométrique du schéma.

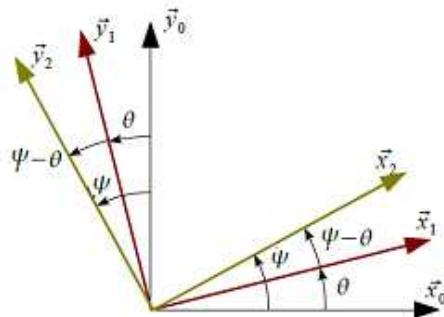
La méthode de fermeture géométrique consiste à écrire une équation « fermée » :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \quad (1)$$

$$b\vec{y}_0 + x\vec{x}_1 - \lambda\vec{x}_2 - a\vec{x}_0 = \vec{0} \quad (2)$$

L'équation de fermeture (2) est la mise en équation géométrique du mécanisme. Projeter cette équation sur les vecteurs d'une base fournira toutes les équations scalaires linéairement indépendantes. Toutefois, cette méthode n'est pas (et de loin !) la plus rapide.

Figure de calcul :



Précision des « entrées » et « sorties » ou encore des « données » et des « inconnues »

**1<sup>er</sup> exemple :**

On donne  $(a, b, \lambda, \theta)$ , on cherche  $\psi$  (inconnue principale). On veut donc éliminer des équations la

variable  $x$  (inconnue secondaire).

**Règle pratique :**

Lorsque l'inconnue à éliminer (ici  $x$ ) est un scalaire en facteur d'un vecteur unitaire (ici  $\vec{x}_1$ ), la projection de l'équation vectorielle sur un vecteur unitaire orthogonal (ici  $\vec{y}_1$ ) élimine cette inconnue.

**2<sup>nd</sup> exemple :**

On donne  $(a, b, \lambda, \theta)$ , on cherche  $x$ , on veut éliminer  $y$ .

**Règle pratique :**

Pour éliminer la direction angulaire inconnue définissant la position d'un vecteur unitaire (ici  $\phi$ ), on isole ce vecteur unitaire d'un côté de l'équation vectorielle, que l'on élève au carré.

**Remarque :** il s'agit bien de s'intéresser à la variable *que l'on souhaite supprimer*. Celle-ci détermine alors la méthode à employer.

## FICHE 3 - Ce qu'il faut retenir de la CINÉMATIQUE

**Notation :** la vitesse du point M appartenant à 1 dans le mouvement de 1 par rapport à R, un repère ou bien par rapport à un solide associé à un repère R, est notée soit :

$$\vec{V}(M \in 1/R) = \vec{V}(M, 1/R) = \left[ \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} \right]_R$$



la difficulté ici est de dériver un vecteur.

« /R » ne signifie pas qu'on exprime le vecteur dans la base associée au repère R

→ En effet, on pourra exprimer une vitesse à l'aide de vecteurs de bases différentes. Cela n'a rien de choquant, le principal étant en SI de réduire le nombre de termes obtenus afin d'avoir une expression simple du vecteur vitesse.

« /R » signifie que l'on va effectuer des dérivations mathématiques de vecteur par rapport à la base associé à R .

→ on va voir cela par la suite avec le théorème de dérivation de vecteur par changement de base, théorème indispensable en SI en raison de la présence de nombreuses bases en mouvement relatif. **En physique, vu le faible nombre de base en présence, on se contente de projeter dans la base liée au bâti afin de dériver un vecteur en se ramenant à dériver plusieurs scalaires**

**La vitesse** d'un point correspond donc à la variation, au cours du temps, de sa position. Elle s'obtient donc en dérivant par rapport au temps la fonction trajectoire. Elle est tangente à la trajectoire. Son unité est le m/s.

**L'accélération** correspond à la variation de la vitesse. Elle s'obtient donc en dérivant la vitesse par rapport au temps. Son unité est le m/s<sup>-2</sup>.

$$\vec{\Gamma}(M \in 1/R) = \vec{\Gamma}(M, 1/R) = \left[ \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2} \right]_R = \left[ \frac{d(\vec{V}(M \in 1/R))}{dt} \right]_R$$

**L'indispensable théorème de dérivation de vecteur par changement de base :**

$$\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{Rj} = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{Ri} + \vec{\Omega}_{Ri/Rj} \wedge \vec{U}$$

**Méthode 1 pour le calcul de vitesse : dérivation directe** avec la formule suivante qui s'appelle la « **Formule de BOOR** ». Elle est indispensable pour calculer la vitesse d'un point dont les coordonnées sont exprimées dans un repère mobile par rapport à un autre repère (c'est-à-dire dans quasiment tous les calculs de cinématique !)

$$\vec{V}(M \in 1/R) = \left[ \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} \right]_{R1} + \vec{\Omega}_{R1/R} \wedge (\overrightarrow{OM})$$

**Méthode 2 pour le calcul de vitesse : composition des torseurs cinématique**

Torseur cinématique du solide (1) dans son mouvement par rapport au solide (0): **2 manières de l'écrire !!!**

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1/0} \\ \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}(P,1/0) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}(P,1/0) \end{array} \right\}_{P,R}$$

$\longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1/0} \\ \Omega_{x1/0} V_x(P,1/0) \\ \Omega_{y1/0} V_y(P,1/0) \\ \Omega_{z1/0} V_z(P,1/0) \end{array} \right\}_P$$

(Vecteurs Résultante et Moment en lignes)

(Composantes Résultante et Moment en colonnes en projection dans R)

La formule suivante est connue sous les noms de « **relation de Varignon** » ou « **formule de distribution des vitesses** ». Elle permet de déterminer complètement le torseur cinématique d'un solide (1) en mouvement par rapport à un solide (0)

$$\vec{V}_{(Q,1/0)} = \vec{V}_{(P,1/0)} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{PQ}$$

Les relations de composition des vecteurs vitesses et des vecteurs vitesse de rotation, pour trois solides (0), (1) et (2), se résument ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{2/0} \\ \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}_{(P \in 2/0)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} v_{2/1} \\ \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{(P \in 2/1)} \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{l} v_{1/0} \\ \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{(P \in 1/0)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{(P \in 2/0)} = \vec{V}_{(P \in 2/1)} + \vec{V}_{(P \in 1/0)} \end{array} \right\}_P$$

**Attention !!!** On ne peut additionner deux torseurs que lorsqu'ils sont exprimés au même point !

**Condition de roulement sans glissement** : on dit qu'il y a roulement sans glissement entre un solide i et un solide j au point M lorsque :

$$\vec{V}(M \in i/j) = \vec{0} = \vec{V}(M \in i/0) - \vec{V}(M \in j/0)$$

**Torseur 3D → torseur 2D (forme simplifiée du torseur)** : si le problème est plan, de normale  $\vec{z}$  alors

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1/0} \\ \Omega_{x1/0} V_x(P,1/0) \\ \Omega_{y1/0} V_y(P,1/0) \\ \Omega_{z1/0} V_z(P,1/0) \end{array} \right\}_P \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{1/0} \\ \boxed{x1/0} V_x(P,1/0) \\ \boxed{y1/0} V_y(P,1/0) \\ \Omega_{z1/0} V_z(P,1/0) \end{array} \right\}_{P,R}$$

avec  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

NB2 :  $\blacksquare$  signifie n'existe pas !

## FICHE 4 - Ce qu'il faut retenir de la STATIQUE

**Notation :** le moment des actions mécaniques exercé par K sur S au point P, est notée :

$$\overline{M}(P, K \rightarrow S)$$

On utilise l'outil torseur pour modéliser l'action mécanique de (**K**) sur (**S**).

$$\left\{ T_{K \rightarrow S} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{K \rightarrow S} \\ \overrightarrow{M}(P, K \rightarrow S) \end{array} \right\}_P$$

Avec la formule de déplacement du moment entre les points P et N :

$$\overline{M}(P, K \rightarrow S) = \overline{M}(N, K \rightarrow S) + \vec{R}_{K \rightarrow S} \wedge \overrightarrow{NP} \text{ ou } \overline{M}(P, K \rightarrow S) = \overline{M}(N, K \rightarrow S) + \vec{R}_{K \rightarrow S} \wedge \overrightarrow{NP}$$

**Remarque :** L'écriture des composantes en colonnes est souvent privilégiée en statique.

En posant, dans le repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

- $\vec{R} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z}$
- $\vec{M} = L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z}$

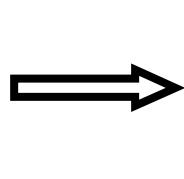
on a alors l'écriture classique du torseur statique :

$$\left\{ T_{K \rightarrow S} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} X_{KS} & L_{KS} \\ Y_{KS} & M_{KS} \\ Z_{KS} & N_{KS} \end{array} \right\}_{P,R}$$

$$\left\{ T_{K \rightarrow S} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{K \rightarrow S} \\ \overrightarrow{M}(P, K \rightarrow S) \end{array} \right\}_P$$

**Torseur 3D → torseur 2D (forme simplifiée du torseur) :** si le problème est plan, de normale  $\vec{z}$  alors

$$\left\{ T_{K \rightarrow S} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} X_{KS} & L_{KS} \\ Y_{KS} & M_{KS} \\ Z_{KS} & N_{KS} \end{array} \right\}_{P,R}$$



$$\left\{ T_{K \rightarrow S} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} X_{KS} & \blacksquare_{KS} \\ Y_{KS} & M_{KS} \\ \blacksquare_{KS} & N_{KS} \end{array} \right\}_{P,R}$$

avec  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

NB2 :  $\blacksquare$  signifie n'existe pas !

**Le torseur de l'action de la pesanteur sur notre solide S de masse m** s'écrit donc, au centre de gravité

:

$$\left\{ T_{pesanteur \rightarrow S} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{mg} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

**Modélisation des actions mécanique de contact exercée en P sur S par S1 :**

L'action élémentaire  $d\vec{F}$  définit sur la figure l'action de contact en M sur dS ; elle s'écrit dans le cas général :  $d\vec{F} = -P dS \vec{n} + f P dS \vec{t}$  avec P, la pression de contact et f, le coefficient de frottement.  $\vec{n}$ , normale « sortante » au contact et  $\vec{t}$ , vecteur tangentiel « opposé au mouvement » (cf. Lois de Coulomb ci-dessous). En l'absence de frottement, la seule force de pression s'exprime :  $d\vec{F} = -P dS \vec{n}$

Méthodologie pour le passage local → global

- On modélise l'action mécanique locale au lieu de contact (en M)

$$\left\{ T_{S_1 \rightarrow S} \right\}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{dF}(M) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

- On transporte l'action mécanique locale au lieu de calcul (en P)

$$\left\{ T_{S_1 \rightarrow S} \right\}_P = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{dF}(M) \\ \overrightarrow{dF}(M) \wedge \overrightarrow{MP} \end{Bmatrix}_P$$

- On globalise l'action mécanique locale au lieu de calcul (en P)

$$\left\{ T_{S_1 \rightarrow S} \right\}_P = \begin{Bmatrix} \int_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \\ \int_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \wedge \overrightarrow{MP} \end{Bmatrix}_P$$

NB ; pour cette dernière étape, il faut être vigilant dans l'intégration et projeter sur une base fixe. On analysera également les symétries afin d'éviter tout calcul inutile.

**Principe fondamental de la statique (PFS) :**

Dans un repère galiléen  $R_g$ , si un système matériel ( $S$ ) est en équilibre, le torseur de l'ensemble des actions mécaniques extérieures de  $\bar{S}$  sur  $S$  est nul :

$$(S) \text{ en équilibre dans } R_g \Rightarrow \left\{ t_{(\bar{S} \rightarrow S)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\bar{S} \rightarrow S)} \\ \vec{M}_{(P, \bar{S} \rightarrow S)} \end{array} \right\}_P = \{O\}$$

**Remarques :**

- Le théorème de l'équilibre est très souvent appelé « Principe Fondamental de la Statique » (PFS). Cette appellation est abusive car ce n'est qu'un cas particulier du Principe Fondamental de la Dynamique ( PFD ). (*Il nous arrivera d'abuser de temps en temps et de parler de PFS !*)
- Le théorème de l'équilibre ne se démontre pas, puisque c'est un cas particulier du PFD.
- Si un torseur est nul alors il est nul en tout point. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer un point pour exprimer le torseur des actions extérieures. En revanche, il est judicieux de choisir correctement ce point afin de simplifier au maximum les calculs : en particulier ce point peut être l'origine d'une force inconnue.
- Les repères galiléens sont des repères où le théorème de l'équilibre est vérifié. Pour des applications des systèmes mécaniques classiques (voiture, avion, machine,...), la Terre est une bonne approximation d'un repère Galiléen.
- L'analyse du PFD montre qu'il est possible d'étendre le champ d'application du PFS à des systèmes mobiles dans les trois cas particuliers suivants :
  - mouvement de translation uniforme
  - mouvement de rotation uniforme d'un solide équilibré dynamiquement
  - lorsque les effets des masses et des inerties peuvent être négligés devant les efforts extérieurs

**Théorème des actions réciproques :**

Soient deux ensembles solides  $S_1$  et  $S_2$ , alors :

$$\left\{ t_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\} = - \left\{ t_{(S_2 \rightarrow S_1)} \right\}$$

**Cas particulier d'isolement simples :**

Si un système matériel soumis à deux glisseurs est en équilibre, alors les deux résultantes sont égales et opposées.

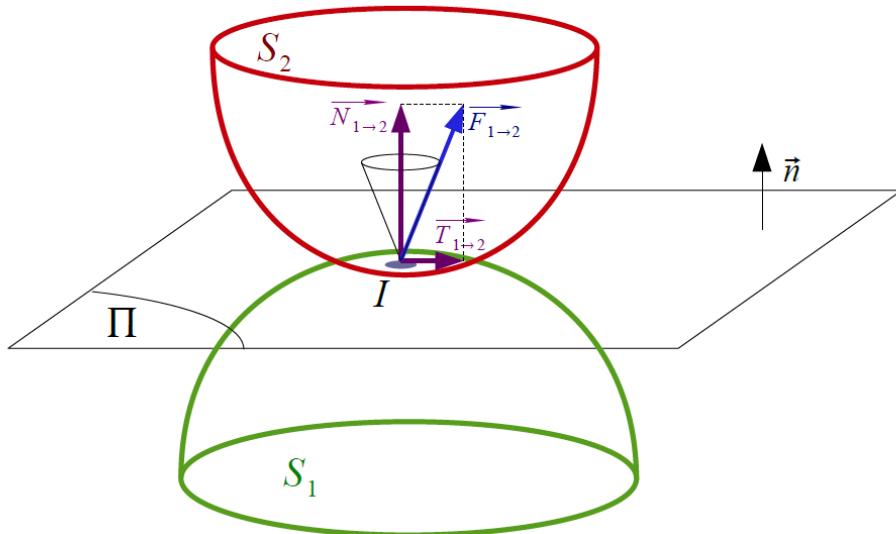
Si un système matériel soumis à trois glisseurs est en équilibre, alors les résultantes de ceux-ci sont :

- de somme géométrique nulle
- coplanaires
- concourantes ou parallèles. Dans ce dernier cas, les distances entre les directions parallèles sont inversement proportionnelles aux intensités des forces portées par ces directions.

**Lois de Coulomb :** entre deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact ponctuel peuvent se transmettre des actions mécaniques avec frottement (dû aux irrégularités de contact, et au bourrelet de contact). Coulomb a déterminé empiriquement des lois sur les efforts.

Soit  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  la force exercée par ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) au niveau du point I qui se décompose en :

- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  la force normale de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) au niveau du point I.  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2} = (\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  la force tangentielle de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) au niveau du point I.  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} - \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$



Les lois de Coulomb spécifient que :

En cas de glissement entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) :  $\vec{V}_{(I,2/1)} \neq \vec{0}$  :

- |  |   |
|--|---|
| $\Rightarrow \vec{T}_{(1 \rightarrow 2)} \wedge \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{0}$<br>$\Rightarrow \vec{T}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{V}_{(I,2/1)} < 0$<br>$\Rightarrow \ \vec{T}_{(1 \rightarrow 2)}\  = f \cdot \ \vec{N}_{(1 \rightarrow 2)}\ $ | (ces deux vecteurs sont colinéaires)<br>(l'effort tangentiel s'oppose au glissement)<br>(l'effort tangentiel est proportionnel à l'effort normal) |
|--|---|

où  $f$  est le **coefficient de frottement de glissement** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).

La force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  est située sur le cône de frottement de demi-angle au sommet  $\varphi$  tel que :

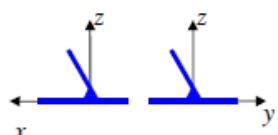
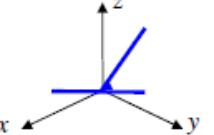
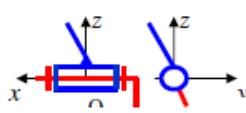
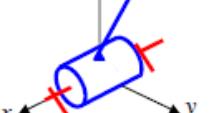
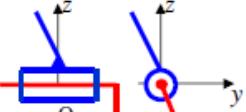
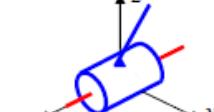
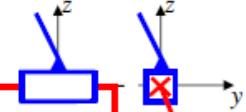
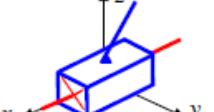
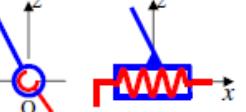
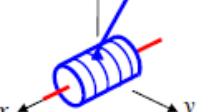
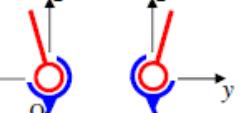
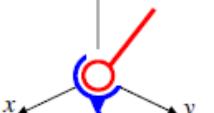
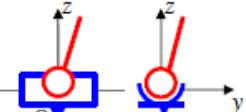
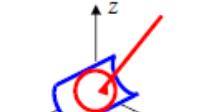
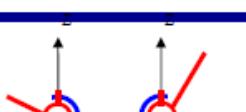
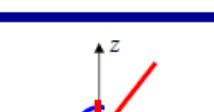
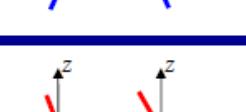
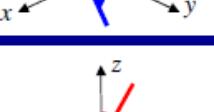
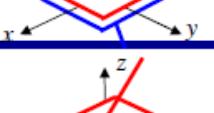
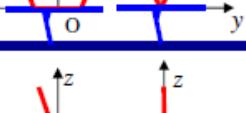
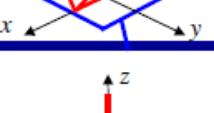
$$f = \tan \varphi$$

En cas de non-glissement entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) :  $\vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{0}$

- |  |   |
|--|---|
| $\Rightarrow \ \vec{T}_{(1 \rightarrow 2)}\  \leq f_0 \cdot \ \vec{N}_{(1 \rightarrow 2)}\ $ | $f_0$ est le <b>coefficient d'adhérence</b> entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ). |
|--|---|

**NB : Souvent, on confond  $f$  et  $f_0$**

## FICHE 5 - TABLEAU DES LIAISONS NORMALISEES

Liaisons	Représentation plane	Représentation 3D	Nombre de DDI	Torseur cinématique
Encastrement ou complète			0	$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall M}$
Pivot d'axe (O, x)			1	$\begin{cases} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall M \in (\vec{ox})}$
Pivot glissant d'axe (O, x)			2	$\begin{cases} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall M \in (\vec{ox})}$
Glissière de direction x			1	$\begin{cases} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall M}$
Hélicoïdale d'axe (O, x) de pas p			1	$\begin{cases} \omega_x & \pm \omega_x p / 2\pi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall M \in (\vec{ox})}$
Rotule ou Sphérique de centre O			3	$\begin{cases} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{cases}_o$
Linéaire annulaire ou sphère cylindre d'axe (O, x)			4	$\begin{cases} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{cases}_o$
Rotule à doigt de centre O bloquée suivant x			2	$\begin{cases} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{cases}_o$
Appui plan de normale z			3	$\begin{cases} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{cases}_{\forall M}$
Linéaire Rectiligne ou cylindre plan d'axe (O, x) et de normale z			4	$\begin{cases} \omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{cases}_{\forall M \in (\vec{ozx})}$
Ponctuelle ou sphère plan De normale (O, z)			5	$\begin{cases} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{cases}_{\forall M \in (\vec{oz})}$

## FICHE 6 - TABLEAU DES LIAISONS NORMALISEES

Liaisons	Représentation plane	Représentation 3D	Nombre de DDI	Torseur statique des inter-efforts
Encastrement ou complète			0	$\begin{cases} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}\}$
Pivot d'axe ( $O, x$ )			1	$\begin{cases} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}, \bar{x}\}$
Pivot glissant d'axe ( $O, x$ )			2	$\begin{cases} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}, \bar{x}\}$
Glissière de direction x			1	$\begin{cases} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}\}$
Hélicoïdale d'axe ( $O, x$ ) de pas p			1	$\begin{cases} X & \pm Xp / 2\pi \\ Y & M \\ Z & N \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}, \bar{x}\}$
Rotule ou Sphérique de centre O			3	$\begin{cases} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}\}$
Linéaire annulaire ou sphère cylindre d'axe ( $O, x$ )			4	$\begin{cases} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}\}$
Rotule à doigt de centre O bloquée suivant x			2	$\begin{cases} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}, \bar{x}\}$
Appui plan de normale z			3	$\begin{cases} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}\}$
Linéaire Rectiligne ou cylindre plan d'axe ( $O, x$ ) et de normale z			4	$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}, \bar{x}\}$
Ponctuelle ou sphère plan De normale ( $O, z$ )			5	$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{cases} \quad \forall M \in \{\bar{o}\}$

## FICHE 6 – Torseur des LIAISONS non parfaites et motorisées

### Cas de la glissière parfaite (sans moteur , sans frottement et sans jeu)

Glissière de direction x			1	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\forall M}$
				$\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M}$

La présence d'un moteur linéaire ou bien d'un vérin exerçant au sein de la liaison une action F implique :

La présence d'une force de frottement sec  $-F_s$  et de frottement visqueux  $-\alpha V_x$  implique :

$$\{T\}_{\forall M} = \begin{Bmatrix} F & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\forall M}$$

$$\{T\}_{\forall M} = \begin{Bmatrix} -F_s - \alpha V_x & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\forall M}$$

NB :  $\alpha$  en  $\frac{N}{(rad/s)}$

### Cas de la liaison pivot (sans moteur , sans frottement et sans jeu)

Pivot d'axe (O, x)			1	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\forall M \in (\vec{o}\vec{x})}$
				$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M \in (\vec{o}\vec{x})}$

La présence d'un moteur ou bien d'un vérin rotatif exerçant au sein de la liaison une action C implique :

La présence d'un couple de frottement sec  $-C_s$  et de frottement visqueux  $-f\omega$  implique :

$$\{T\}_{\forall M} = \begin{Bmatrix} X & C \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\forall M}$$

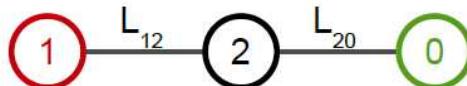
$$\{T\}_{\forall M} = \begin{Bmatrix} X & -C_s - f\omega_x \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\forall M}$$

NB :  $f$  en  $\frac{N.m}{(rad/s)}$

## FICHE 7 - LIAISONS EQUIVALENTES

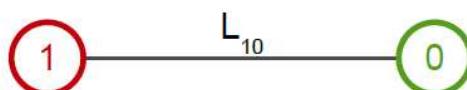
### 1) **Liaisons en série**

Point de vue cinématique



Dans le cas de liaisons en série, la pièce intermédiaire (2) peut être une pièce interposée pour des raisons technologiques (suppression des frottements, élargissement des appuis, etc.) mais ses mouvements propres n'ont pas d'influence sur la cinématique de l'ensemble.

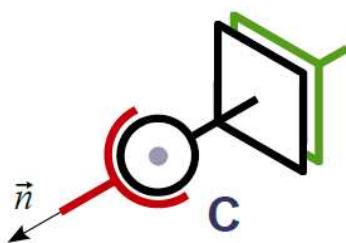
Cherchons alors la liaison équivalente aux liaisons  $L_{12} + L_{20}$  :



Par composition des vitesses, on peut écrire :  $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/0}\}$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente  $L_{10}$  aux deux liaisons en série est donc la somme des torseurs de ces deux liaisons.

Exemple : Liaisons rotule et appui-plan en série



$$\{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{pmatrix} \Omega_l & 0 \\ \Omega_m & 0 \\ \Omega_{1n} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})} ; \quad \{\mathcal{V}_{2/0}\} = \begin{pmatrix} 0 & V_l \\ 0 & V_m \\ \Omega_{2n} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})}$$

$$\text{soit : } \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{pmatrix} \Omega_l & V_l \\ \Omega_m & V_m \\ \Omega_{1n} + \Omega_{2n} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})} .$$

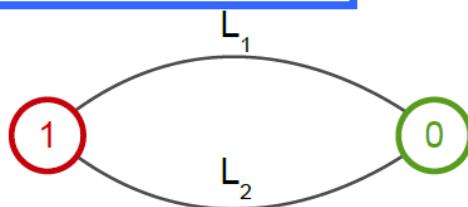
Soit un torseur cinématique équivalent à une liaison ponctuelle au point  $C$  et de normale  $\vec{n}$ .

Cette association de liaisons est couramment utilisée pour obtenir une liaison ponctuelle tout en conservant des contacts surfaciques entre les pièces (pour la transmission des efforts).

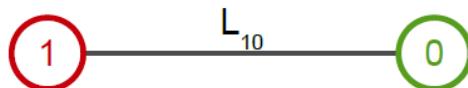
La présence du terme  $\Omega_{1n} + \Omega_{2n}$  pour la rotation suivant  $\vec{n}$  indique que la pièce (2) peut avoir une rotation relativement à (0) et (1). Cependant, celle-ci n'ayant aucune incidence sur la rotation propre de (1) par rapport à (0), on parle dans ce cas de **mobilité interne**.

2) **Liaisons en parallèle**

Point de vue cinématique

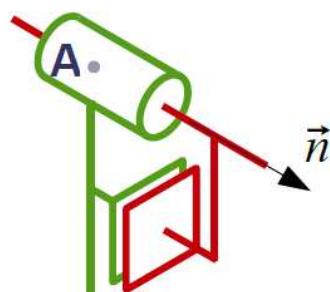


(0) et (1) sont liées par l'intermédiaire de deux surfaces différentes, cherchons la liaison équivalente à cette association en parallèle de  $L_1$  et  $L_2$ .



Le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$ , c'est-à-dire celle de la liaison équivalente  $L_{10}$  doit être compatible avec les blocages introduits par les liaisons  $L_1$  et  $L_2$ . Pratiquement, un zéro sur une composante de l'un ou l'autre des torseurs de liaison implique un zéro dans le torseur cinématique de (1) par rapport à (0).

Exemple : Association série d'une pivot glissant et d'une appui-plan



$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_1\} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_n & V_n \end{Bmatrix}_{(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})} ; \quad \{\mathcal{V}_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_l \\ 0 & V_m \\ \Omega_n & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})} \\ \text{soit : } \{\mathcal{V}_{1/0}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_n & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})} \end{aligned}$$

Soit le torseur cinématique d'une liaison Pivot d'axe ( $A$ ,  $\vec{n}$ ).

On remarque que des blocages en rotation suivant les axes  $\vec{l}$  et  $\vec{m}$  sont à la fois introduits par  $L_1$  et  $L_2$ . Ceci indique que la liaison entre (0) et (1) est **hyperstatique** (ici d'ordre 2).

**3) Résumé et généralisation du point de vue cinématique et des inter-effort pour n liaisons en série ou en parallèle : torseur cinématique ou d'inter-effort équivalent.**

Liaisons placées en			
	série	parallèle	
Liaison équivalente caractérisée par son torseur	cinématique	$\{\mathcal{V}_{n/0}\}_M = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{V}_{i/i-1}\}_M$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_M = \{\mathcal{V}_{2/1}\}_M$
	d'inter-effort	$\{\mathbf{t}_{eq,0 \rightarrow n}\}_M = \{\mathbf{t}_{i,i-1 \rightarrow i}\}_M$	$\{\mathbf{t}_{eq,1 \rightarrow 2}\}_M = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{t}_{1 \rightarrow i \rightarrow 2}\}_M$

# **CORRECTION**

# **FICHE 1 - CALCUL VECTORIEL : RAPPELS**

## **APPLICATION au calcul**

Soient 3 repères  $R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  définis de la façon suivante :

- $R_2$  est obtenu par une rotation de  $R_1$  d'angle  $\theta$  et d'axe  $(O, \vec{y}_1)$  ;
- $R_3$  est obtenu par une rotation de  $R_2$  d'angle  $\varphi$  et d'axe  $(O, \vec{z}_2)$ .

**5.** Représenter les figures planes correspondant aux 2 changements de base.

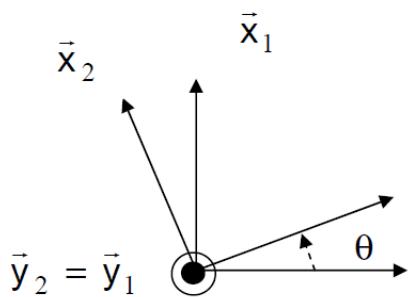


FIGURE 1

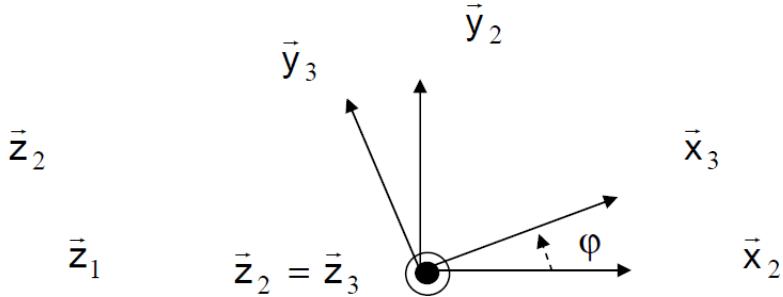


FIGURE 2

**6.** Déterminer les composantes des vecteurs unitaires  $\vec{x}_3$  et  $\vec{y}_3$  dans la base liée à  $R_1$ .

$$\text{A l'aide de la figure 1 : } \vec{x}_2 = \cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1 \quad \vec{z}_2 = \cos \theta \vec{z}_1 + \sin \theta \vec{x}_1 \quad \vec{y}_2 = \vec{y}_1$$

$$\text{A l'aide de la figure 2 : } \vec{x}_3 = \cos \varphi \vec{x}_2 + \sin \varphi \vec{y}_2 \quad \vec{y}_3 = \cos \varphi \vec{y}_2 - \sin \varphi \vec{x}_2 \quad \vec{z}_3 = \vec{z}_2$$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = \cos \varphi (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1) + \sin \varphi \vec{y}_1 \quad \vec{y}_3 = \cos \varphi \vec{y}_1 - \sin \varphi (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1)$$

$$\vec{z}_3 = \cos \theta \vec{z}_1 + \sin \theta \vec{x}_1$$

**7.** Calculer :  $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2$ ,  $\vec{y}_3 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_1$ ,  $\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2$

- Méthode 1 : avec produits scalaires/produits vectoriels de vecteurs d'une base orthonormée

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 = \vec{z}_1 \wedge (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1) = \cos \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 = \vec{z}_1 \cdot (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1) = -\sin \theta$$

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_2 - \sin \varphi \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_1 - \sin \varphi (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1)) \wedge \vec{z}_1 = \text{trop long....}$$

$$\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_2 - \sin \varphi \vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_1 - \sin \varphi (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_1)) \cdot \vec{z}_1 = \text{trop long....}$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 = \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2 = \vec{x}_2$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 = \vec{y}_2 \cdot \vec{z}_2 = 0$$

- **Méthode 2 : avec les figures planes et la définition du produit scalaire/produit vectoriel**

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 = + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{y}_1 = \cos \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_2 - \sin \varphi \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_1 - \sin \varphi \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_1 = \cos \varphi \vec{x}_1 - \sin \varphi \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_1 = \cos \varphi \vec{x}_1 + \sin \varphi \cos \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_2 - \sin \varphi \vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = (\cos \varphi \vec{y}_1 - \sin \varphi \vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = -\sin \varphi \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 = \sin \varphi \sin \theta$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 = \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2 = \vec{x}_2$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 = \vec{y}_2 \cdot \vec{z}_2 = 0$$

8. On donne les vecteurs  $\vec{V}_1 = a\vec{x}_1 + b\vec{z}_1$  et  $\vec{V}_2 = a\vec{x}_3$  ; calculer la projection de  $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  sur  $\vec{x}_1$ .

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot \vec{x}_1 &= (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{x}_1 = ((a\vec{x}_1 + b\vec{z}_1) \wedge a\vec{x}_3) \cdot \vec{x}_1 \\ &= (a\vec{x}_1 \wedge a\vec{x}_3) \cdot \vec{x}_1 + (b\vec{z}_1 \wedge a\vec{x}_3) \cdot \vec{x}_1 \quad (\text{Permutation produit mixte}) \\ &= (\vec{x}_1 \wedge a\vec{x}_1) \cdot a\vec{x}_3 + (\vec{x}_1 \wedge b\vec{z}_1) \cdot a\vec{x}_3 \\ &= 0 + ab(\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_3 = ab(-\vec{y}_1) \cdot \vec{x}_3 = \dots \end{aligned}$$

- Méthode 1 avec le produit scalaire de vecteurs d'une base orthonormée

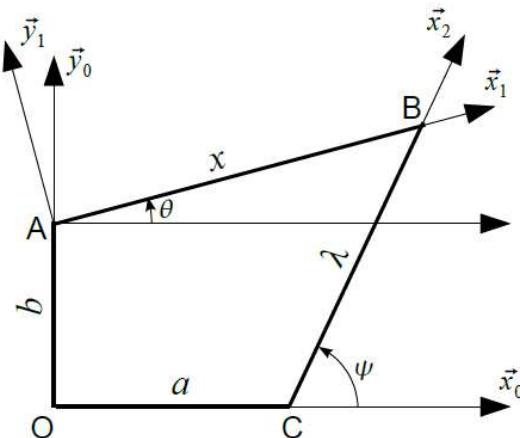
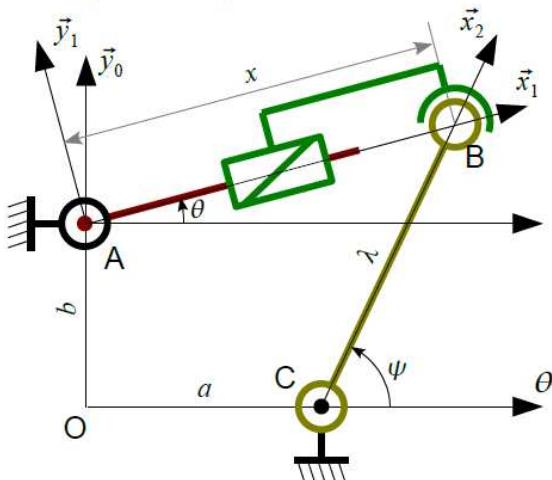
$$\begin{aligned} ab(-\vec{y}_1) \cdot \vec{x}_3 &= -ab\vec{y}_1 \cdot (\cos \varphi \vec{x}_2 + \sin \varphi \vec{y}_2) \\ &= -ab\vec{y}_1 \cdot (\cos \varphi \vec{x}_2 + \sin \varphi \vec{y}_2) = -ab \sin \varphi \end{aligned}$$

- **Méthode 2 avec la figure plane 2 et la définition du produit scalaire**

$$\begin{aligned} ab(-\vec{y}_1) \cdot \vec{x}_3 &= -ab(\vec{y}_2) \cdot \vec{x}_3 \\ &= -ab \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -ab \sin \varphi \end{aligned}$$

## FICHE 2 - FERMETURE GEOMETRIQUE : METHODES

## **Exemple : Maxpid**



## 1<sup>er</sup> exemple :

On donne  $(a, b, \lambda, \theta)$ , on cherche  $\psi$  (inconnue principale). On veut donc éliminer des équations la variable  $x$  (inconnue secondaire).

L'opération projection de (2) sur  $\vec{y}_1$  élimine  $x$ .

$$(2). \vec{y}_1 \Rightarrow b\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 + x\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 - \lambda\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 - a\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1 = 0$$

$0 = b \cos \theta - \lambda \sin(\psi - \theta) + a \sin(\theta)$ , que l'on résout en  $\psi$ , données  $a, b, \lambda, \theta$ .

$$\sin(\psi - \theta) = \left( \frac{b \cos \theta + a \sin \theta}{\lambda} \right) \text{ soit : } \quad \psi = \arcsin \left( \frac{b \cos \theta + a \sin \theta}{\lambda} \right) + \theta$$

### Règle pratique :

Lorsque l'inconnue à éliminer (ici  $x$ ) est un scalaire en facteur d'un vecteur unitaire (ici  $\vec{x}_1$ ), la projection de l'équation vectorielle sur un vecteur unitaire orthogonal (ici  $\vec{y}_1$ ) élimine cette inconnue.

## 2<sup>nd</sup> exemple :

On donne  $(a, b, \lambda, \theta)$ , on cherche  $x$ , on veut éliminer  $\psi$ .

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{x}_2 = b \vec{y}_0 + x \vec{x}_1 - a \vec{x}_0 \quad (2')$$

$$(2')^2 \Rightarrow \lambda^2 = b^2 + x^2 + a^2 + 2bx\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1 - 2ab\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 - 2ax\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1$$

$$\text{or } \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1 = -\sin \theta ; \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 = 0 ; \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 = \cos \theta$$

$$\text{d'où : } x^2 + 2x(b \sin \theta - a \cos \theta) + b^2 + a^2 - \lambda^2 = 0$$

#### Règle pratique :

Pour éliminer la direction angulaire inconnue définissant la position d'un vecteur unitaire (ici  $\phi$ ), on isole ce vecteur unitaire d'un côté de l'équation vectorielle, que l'on élève au carré.

**Remarque :** il s'agit bien de s'intéresser à la variable *que l'on souhaite supprimer*. Celle-ci détermine alors la méthode à employer.